

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الجزء الخاص بالشرح و التمارين

يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير



معك
Ma3ak App

التطبيق التفاعلي
للتعلم عن بعد



المعلم

إعداد نخبة من خبراء التعليم



1

ثانوي
2021

محتويات الكتاب

الجبر وحساب المثلثات

أولاً

الوحدة 1

الجبر والعلاقات والدوال

على الوحدة الأولى.

- مقدمة عن الأعداد المركبة.
- تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.
- العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.
- تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها.
- إشارة الدالة.
- متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

- متطلبات قبلية :
- الدرس الأول :
- الدرس الثانى :
- الدرس الثالث :
- الدرس الرابع :
- الدرس الخامس :
- الدرس السادس :

حساب المثلثات

الوحدة 2

الزاوية الموجهة.

- القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.
- الدوال المثلثية.
- الزوايا المنتسبة.
- التمثيل البيانى للدوال المثلثية.
- إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

- الدرس الأول :
- الدرس الثانى :
- الدرس الثالث :
- الدرس الرابع :
- الدرس الخامس :
- الدرس السادس :



للإطلاع على الموضوعات
التي لم تتم دراستها العام
الماضي نظراً لتوقف
الدراسة في منتصف مارس
امسح هذا الكود



ثانياً الهندسة

التشابه

الوحدة 3

الدرس الأول :

الدرس الثاني :

الدرس الثالث :

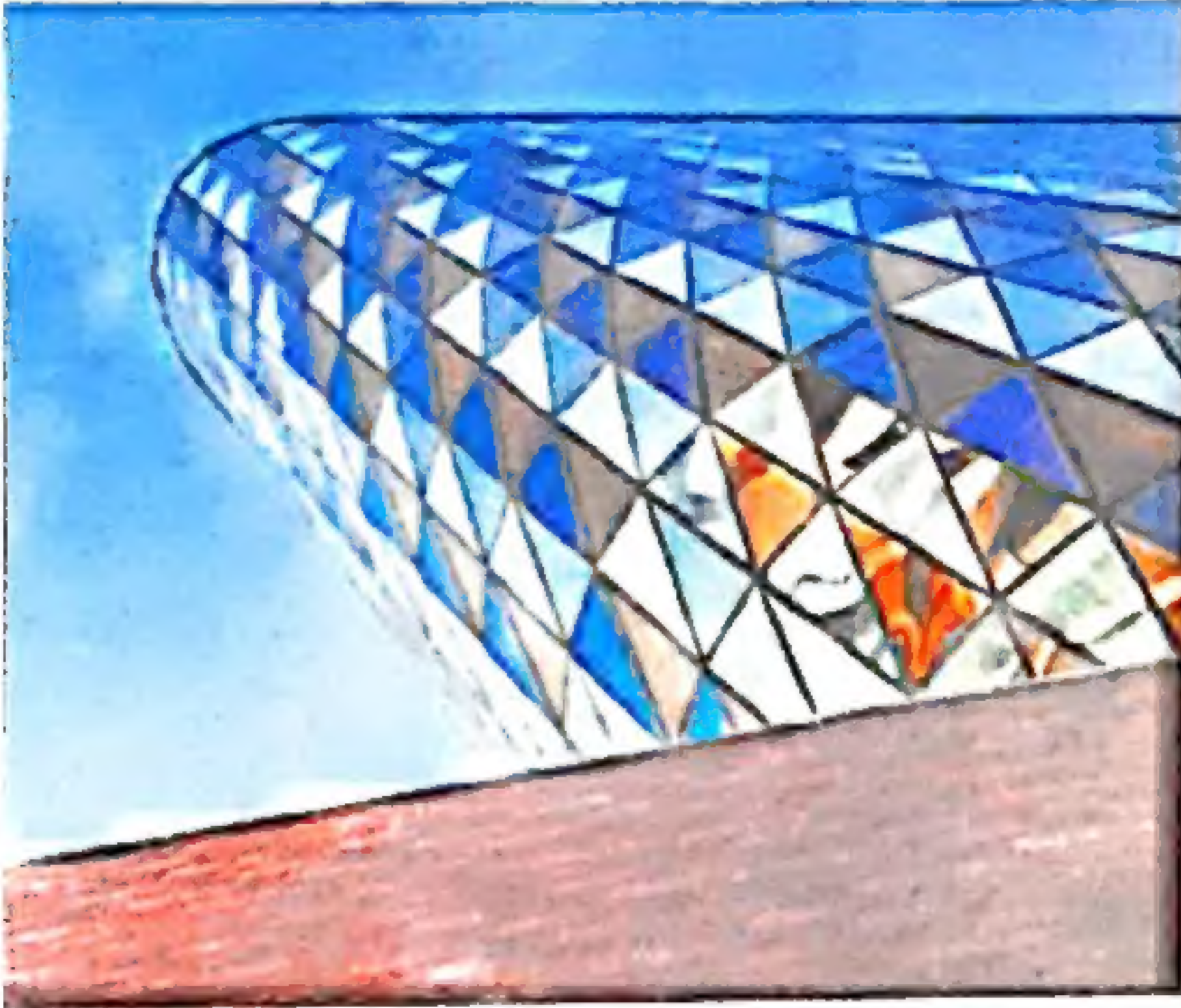
الدرس الرابع :

تشابه المضلعات.

تشابه المثلثات.

العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين
متشابهين.

تطبيقات التشابه في الدائرة.



نظريات التناسب في المثلث

الوحدة 4

الدرس الأول :

الدرس الثاني :

الدرس الثالث :

الدرس الرابع :

الدرس الخامس :

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

نظرية تاليس.

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة
(عكس نظرية ٣)

تطبيقات التناسب في الدائرة.



أولاً

الجبر وحساب المثلثات



الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال.

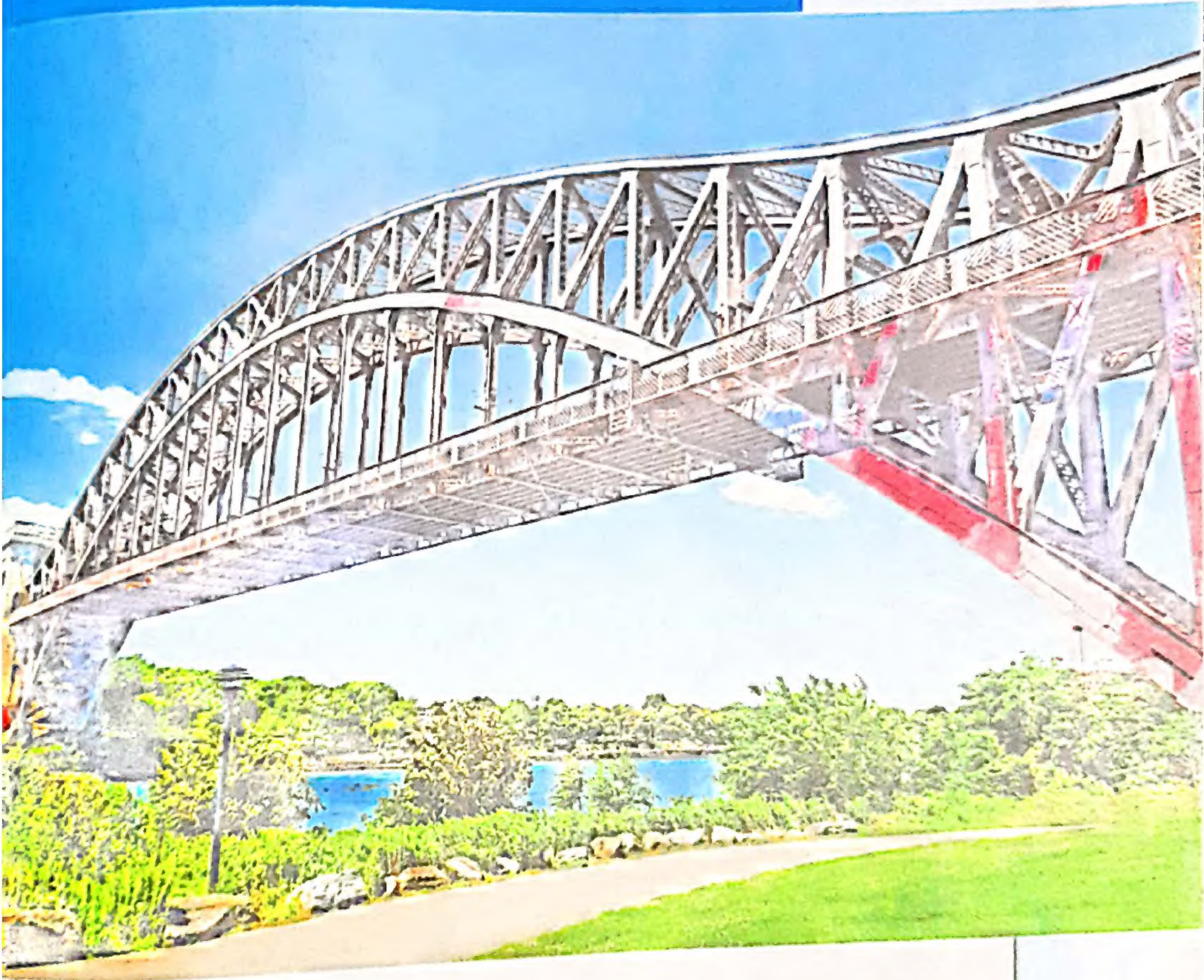
الوحدة الثانية

حساب المثلثات.

الجبر والعلاقات والدوال

1

الوحدة



فى نهاية الوحدة

• تطبيقات حياتية على الوحدة الاولى.

◀ دروس الوحدة

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

- 1 مقدمة عن الأعداد المركبة.
- 2 تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.
- 3 العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.
- 4 تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها.
- 5 إشارة الدالة.
- 6 متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبرياً وبيانياً.
- يستخدم معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى حل بعض التطبيقات الحياتية.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب ، قوى ت الصحيحة ، تساوى عددين مركبين).
- يُجرى العمليات على الأعداد المركبة.
- يتعرف العددين المترافقين فى الأعداد المركبة.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد متى عُلم جذراها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة (ثابتة ، خطية ، تربيعية).
- يحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

أولاً حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً

١ باستخدام التحليل

مثال ١

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

$$٢٥ = ٤س^٢ \quad ٢$$

$$٠ = ٦ - س - س^٢ \quad ١$$

الحل

$$\therefore (٦ - س)(١ + س) = ٠ \quad \text{[تحليل المقدار الثلاثي]}$$

$$١ \quad \therefore س^٢ - س - ٦ = ٠$$

$$\therefore س - ٦ = ٠ \quad \text{ومن هنا } س = ٦$$

$$أ، س + ١ = ٠ \quad \text{ومن هنا } س = -١$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{٦، -١\}$$

$$٢ \quad \therefore ٤س^٢ = ٢٥$$

$$\therefore ٤س^٢ = ٢٥$$

$$\therefore (٥ + س)(٥ - س) = ٠ \quad \text{[تحليل الفرق بين مربعين]}$$

$$\therefore ٥ + س = ٠ \quad \text{ومن هنا } س = -٥$$

$$أ، ٥ - س = ٠ \quad \text{ومن هنا } س = ٥$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{٥، -٥\}$$

تذكراه

معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد لها حلان على الأكثر في ح

حل آخر باستخدام الجذر التربيعي :

$$\therefore ٤س^٢ = ٢٥ \quad \therefore س = \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٤}}$$

$$\therefore س = \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٤}}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{٥}{٢}، -\frac{٥}{٢} \right\}$$

٢ باستخدام القانون العام

لايجاد جذرى المعادلة التربيعية : $١س^٢ + ٢س + ح = صفر$ حيث $١ \neq صفر$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times ح}}{٢ \times ١}$$

نستخدم القانون :

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

$$١س^٢ - ٢س - ٦ = ٠ \quad ٢س + \frac{٥}{س} = ٤ \text{ حيث } س \neq صفر$$

الحل

١ المقدار : $١س^٢ - ٢س - ٦$ يتعذر تحليله لذلك نلجأ إلى التعويض فى القانون العام.

$$\therefore ١ = ١س^٢, ٢ = -٢س, ٦ = -٦$$

$$\therefore س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٧}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{١ + \sqrt{٧}, ١ - \sqrt{٧}\}$$

٢ بضرب طرفى المعادلة فى س : $\therefore ١س^٢ + ٥ = ٤س$

$$\therefore ١س^٢ - ٤س + ٥ = ٠ \text{ لاحظ وضع المعادلة على الصورة : } ١س^٢ + ٢س + ح = صفر$$

$$\therefore ١ = ١س^٢, ٤ = -٤س, ٥ = ٥$$

$$\therefore س = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢} \therefore ٤ - \sqrt{-٤} \notin ح$$

\therefore لا توجد جذور حقيقية للمعادلة : $١س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$. \therefore مجموعة الحل = \emptyset

حاول بنفسك

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$١س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$$

$$٢س + ٥ = ٤س$$

$$٢س^٢ = ٢٧$$

$$٢ = (٤ - س)س$$

ثانياً حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بيانياً

لحل المعادلة التربيعية في متغير واحد بيانياً نتبع الخطوات الآتية :

١ نضع المعادلة على الصورة : $اس^٢ + بس + ج = ٠$

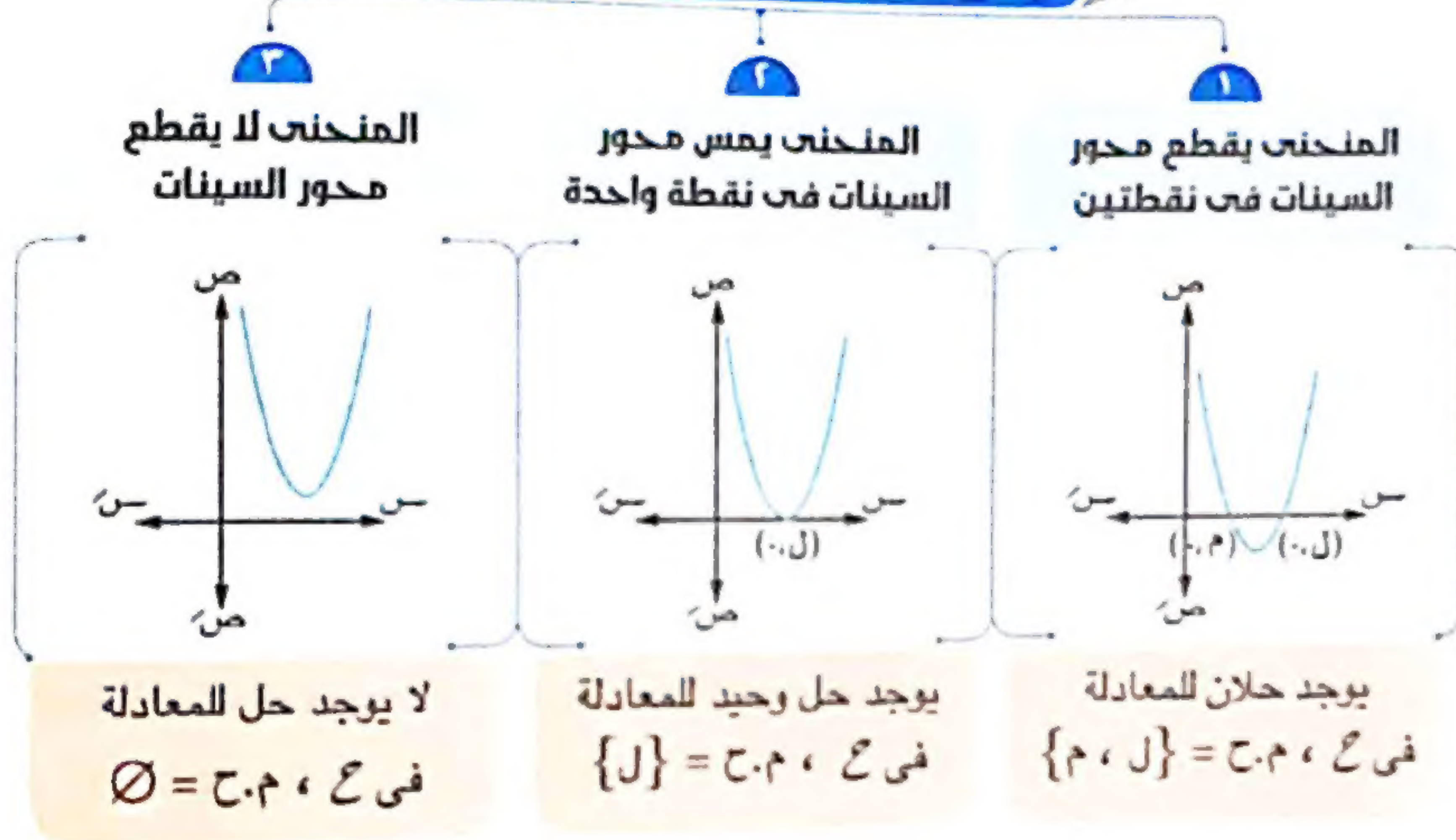
٢ نرسم منحنى الدالة د

٣ نفرض أن : د (س) = $اس^٢ + بس + ج$

٤ نعين نقط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هذه هي حلول

المعادلة : د (س) = ٠ أي $اس^٢ + بس + ج = ٠$

وعلى هذا فإنه توجد ثلاث حالات



مثال ٣

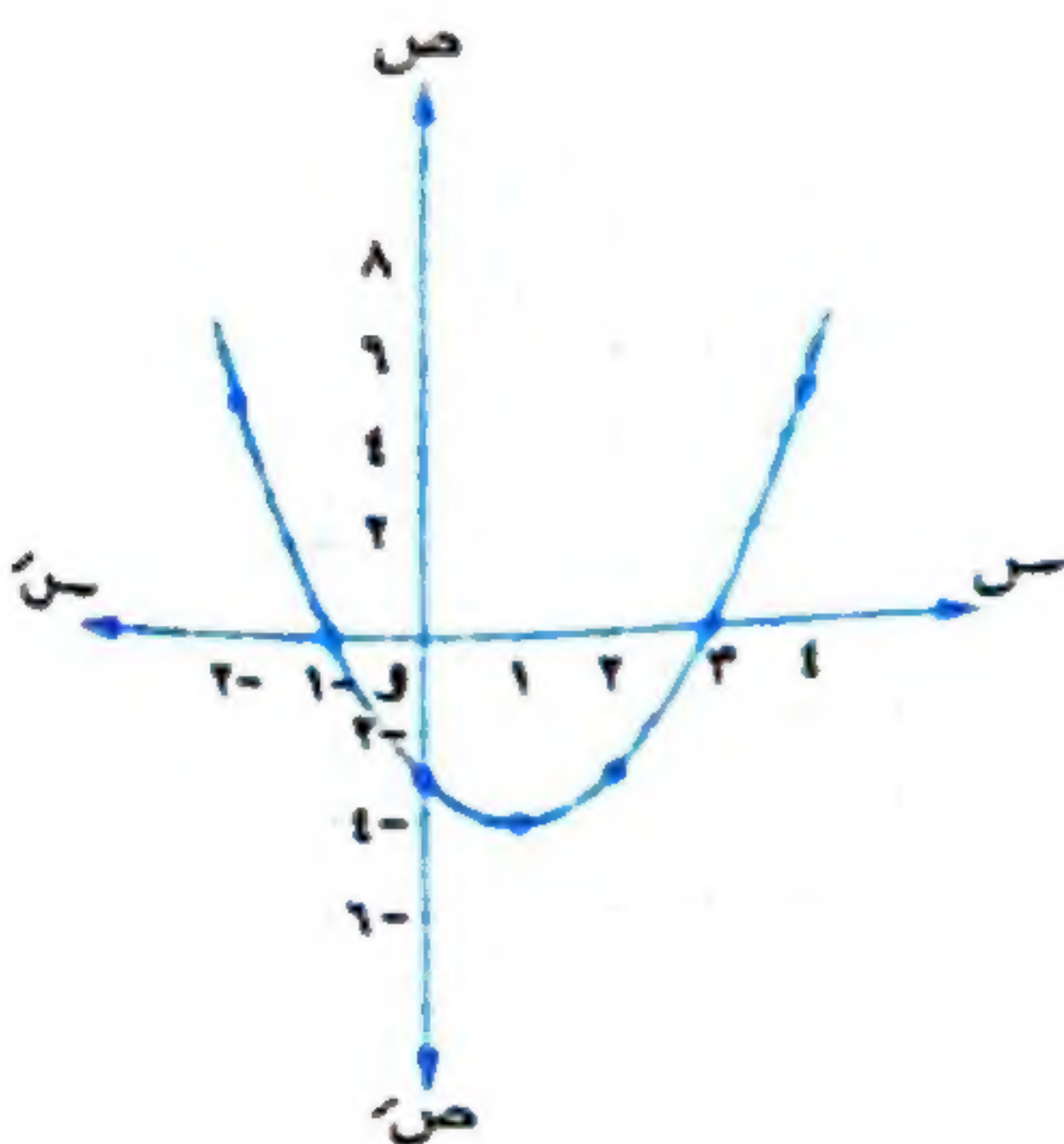
أوجد بيانياً في ح مجموعة حل المعادلة : $اس^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ مستعيناً بالفترة $[-٢، ٤]$

الحل

نفرض أن : د (س) = $اس^٢ - ٢س - ٣$

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

من الرسم : مجموعة الحل = $\{-١، ٣\}$



ملاحظة

في حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل البياني فإنه يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهي $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ ثم نوجد عدة نقاط أخرى على يمينها ومثلهم على يسارها.

مثال ٤

حل بيانياً في ح المعادلة : $٤س(س-١) - ٥ = ٠$ ثم حقق الناتج جبرياً [علماً بأن $\sqrt{٦٠.٤} \approx ٢.٤$]

الحل

$$\therefore ٤س(س-١) - ٥ = ٠ \quad \therefore ٤س^2 - ٤س - ٥ = ٠$$

أولاً : الحل البياني

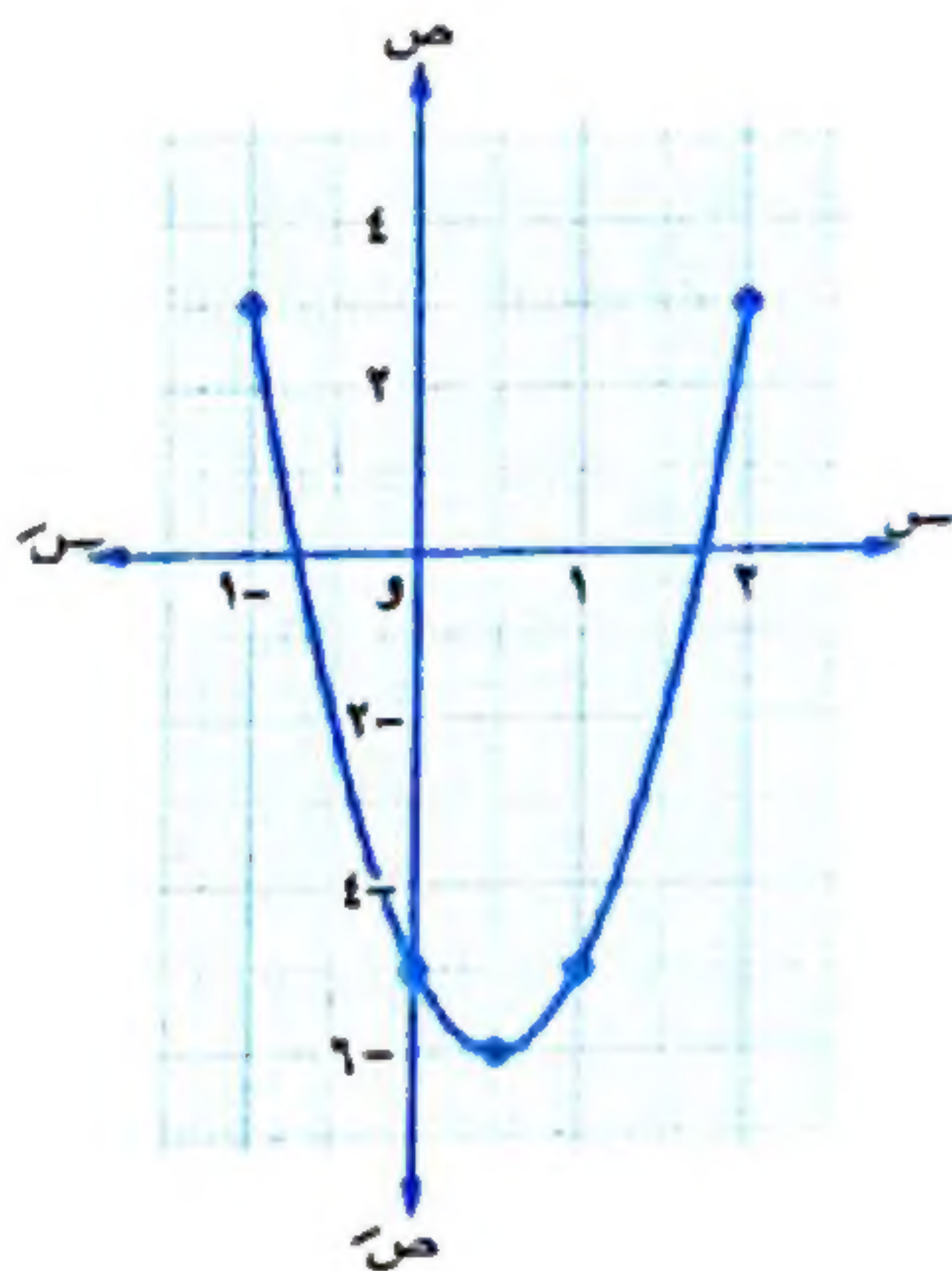
نفرض أن : $د(س) = ٤س^2 - ٤س - ٥$

• نوجد نقطة رأس المنحنى :

$$\therefore \text{الإحداثي السيني لرأس المنحنى} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-٤}{2 \times ٤} = \frac{١}{٢}$$

$$د\left(\frac{١}{٢}\right) = ٤\left(\frac{١}{٢}\right)^2 - ٤\left(\frac{١}{٢}\right) - ٥ = -٦$$

\therefore نقطة رأس المنحنى هي $\left(\frac{١}{٢}, -٦\right)$



س	١-	٠	$\left(\frac{١}{٢}\right)$	١	٢
ص	٣	٥-	$\left(-٦\right)$	٥-	٣

• نكون الجدول :

• نلاحظ من الرسم أن : جذري المعادلة هما : -٠.٧ ، ١.٧ تقريباً

ثانياً : الحل الجبري

$$\therefore س = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ حيث } a = ٤, b = -٤, c = -٥$$

$$\therefore س = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^2 - 4(٤)(-٥)}}{2 \times ٤} = \frac{٤ \pm \sqrt{٩٦}}{٨}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٦٠.٤}}{٨} = \frac{٤ \pm ٢.٤}{٨}$$

\therefore جذرا المعادلة هما : ١.٧ ، -٠.٧ تقريباً

حاول بنفسك

حل بيانياً في ح المعادلة : $س^2 - ٤س + ٤ = ٠$ متخذاً $س \in [٠, ٤]$ ثم حقق الناتج جبرياً.

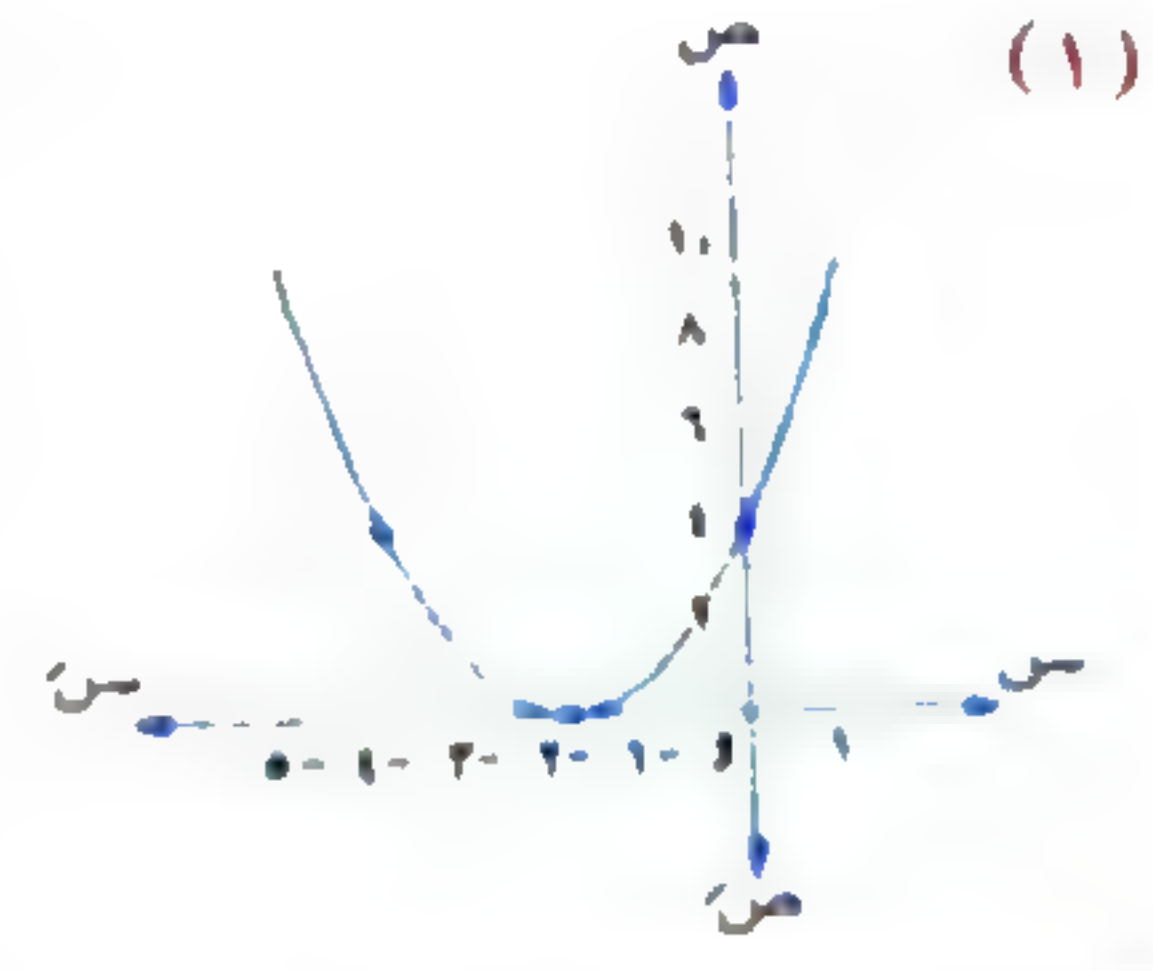
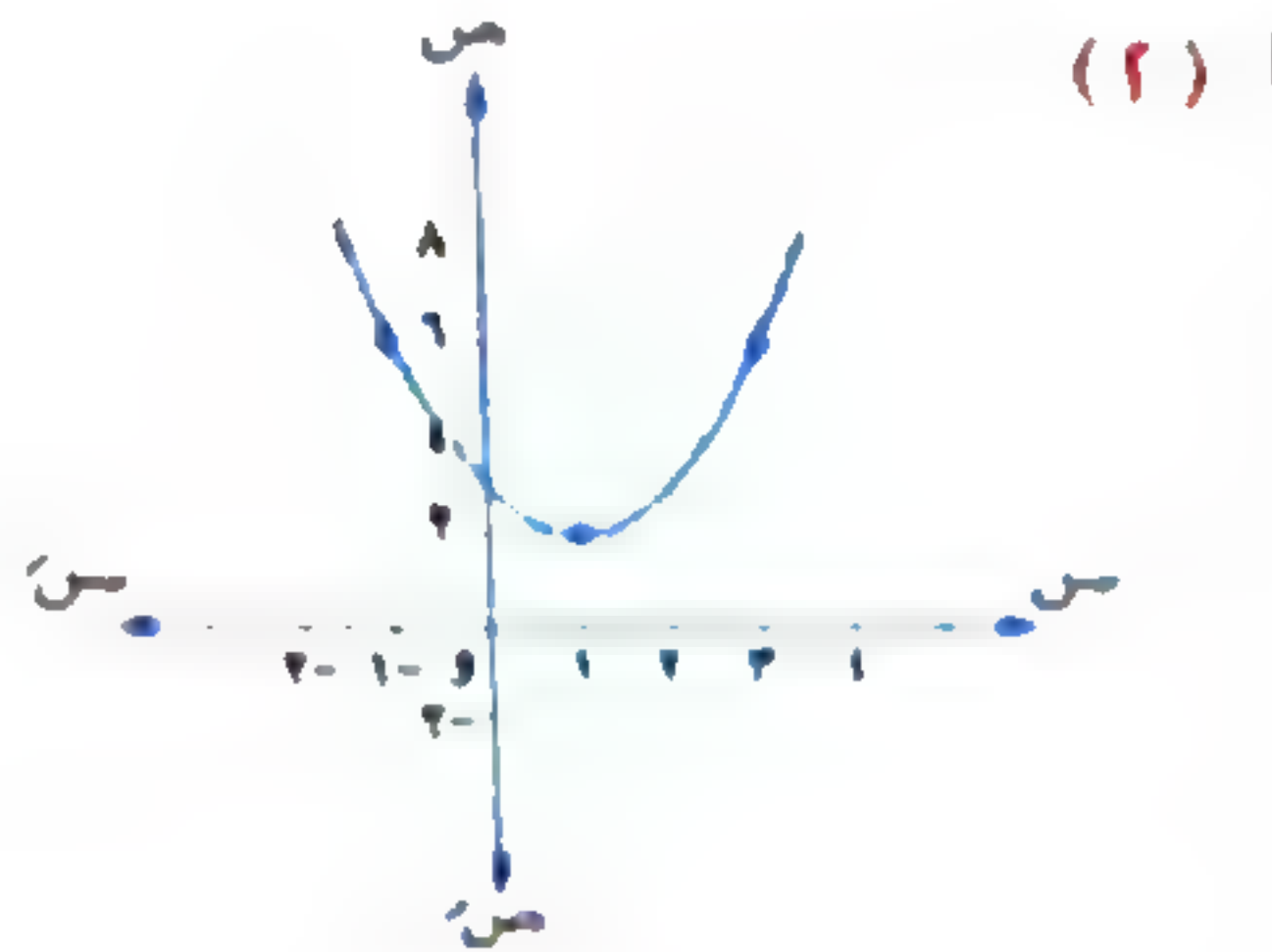
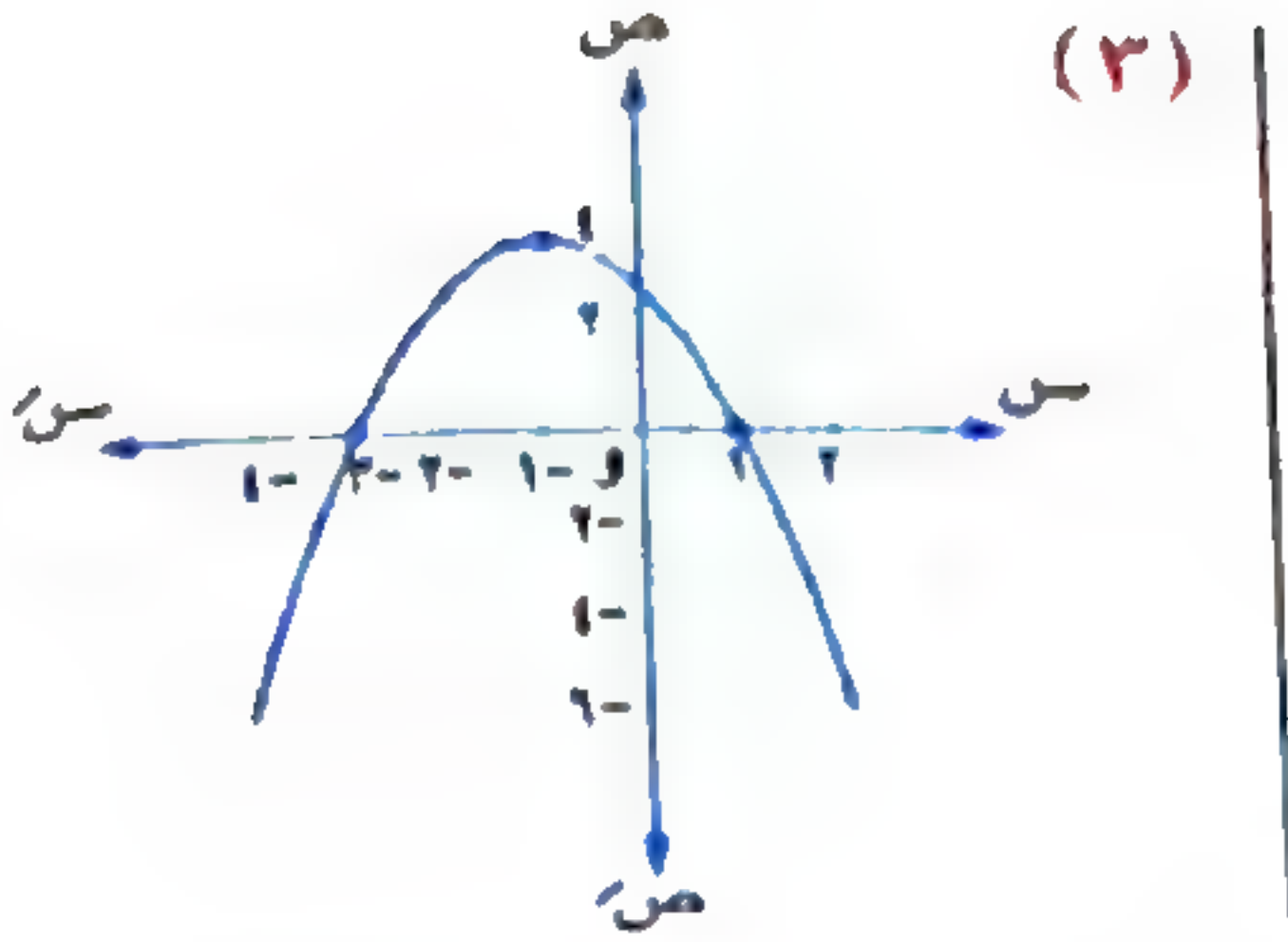
تمارين على متطلبات قبلية على الوحدة الأولى



[.] من أسئلة الكتاب المدرسي

١. [.] بين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية.

أوجد مجموعة الحل في \mathbb{C} للمعادلة : د (س) = ٠ في كل شكل.



٢. اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات في النقطتين (٠ ، ٢) ، (٠ ، -٣) ، فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ في \mathbb{C} هي

- (١) {٠ ، ٢} (ب) {٠ ، -٣} (ج) {٢ ، -٣} (د) {٢ ، -٣} (٢) مجموعة حل المعادلة : $س^2 - س = ٠$ في \mathbb{C} هي

- (١) {٠ ، ١} (ب) {٠} (ج) {١ ، ٠} (د) {١} (٢) إذا كانت : د (س) = $س^2 + س + ح$ ، $س = ٢$ أحد جذري المعادلة : د (س) = ٠ ، فإن : د (٢) =

- (١) ٢ (ب) -٢ (ج) ٤ (د) صفر (٤) إذا كان : $س = ٣$ جذراً للمعادلة : $س^2 + م س + ٢ = ٠$ ، فإن : م =

- (١) ١- (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ١ (٥) إذا كان أحد جذري المعادلة : $س^2 - ١٦ = ٠$ هو ٤ ، فإن الجذر الآخر هو

- (١) ٤- (ب) ٤ (ج) ٨ (د) صفر

٣. [.] أوجد جبرياً مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في \mathbb{C} :

(١) $س^2 - ١ = ٠$

(٢) $س^2 + ٩ = ٠$

(٣) $س^2 + ٣ س = ٠$

(٤) $س^2 - ٦ س + ٩ = ٠$

متطلبات قبلية

٤ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد :

$$\begin{array}{l|l|l} (1) \text{ س}^2 - 6\text{ س} + 1 = 0 & (2) \text{ س}^2 + 2\text{ س} + 5 = 0 & (3) \text{ س}^2 - 2\text{ س} + 3 = 4 \\ (4) \text{ س}^2 - 3\text{ س} - 60 = 0 & (5) \text{ س} - \frac{5}{\text{س}} = 2 & (6) 2 = \frac{2}{2+\text{س}} + \frac{2}{2-\text{س}} \end{array}$$

٥ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبرياً وحقق الناتج بيانياً :

$$\begin{array}{l} (1) \text{ س}^2 - 2\text{ س} - 4 = 0 \quad \text{ارسم بيانياً فى الفترة } [-2, 4] \\ (2) \text{ س}^2 - 3\text{ س} + 2 = 0 \quad \text{ارسم بيانياً فى الفترة } [-1, 4] \\ (3) \text{ س}^2 + 3 = 0 \quad \text{ارسم بيانياً فى الفترة } [-2, 3] \\ (4) -2\text{ س}^2 - 4\text{ س} + 1 = 0 \end{array}$$

٦ إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية $(1 + 2 + 2 + \dots + \text{ن})$ يعطى بالعلاقة : $\frac{\text{ن}}{4} = \text{ح} + 1$ فكم عدداً صحيحاً متتالياً بدءاً من العدد ١ يكون مجموعها مساوياً :

$$\begin{array}{llll} (1) 78 & (2) 171 & (3) 252 & (4) 465 \end{array}$$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) الشرط الذى يجعل المعادلة : $2\text{ س}^2 + \text{ب س} + \text{ح} = 0$ تربيعية هو
- (٢) إذا كان : $(\text{ص} - 4)^2 = 36$ ، $\text{ص} > 0$ فإن : $\text{ص} + 4 = \dots$
- (٣) إذا كان : $4 = \text{س}$ أحد جذرى المعادلة : $2\text{ س}^2 + \text{م س} + 4 = 0$ فإن :
- (٤) الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين : $2\text{ س}^2 - 3\text{ س} + 2 = 0$ ، $2\text{ س}^2 - 5\text{ س} + 2 = 0$ هو

$$\begin{array}{llll} (1) \text{ س} = 2 & (2) \text{ س} = 1 & (3) \text{ س} = -2 & (4) \text{ س} = \frac{1}{2} \end{array}$$

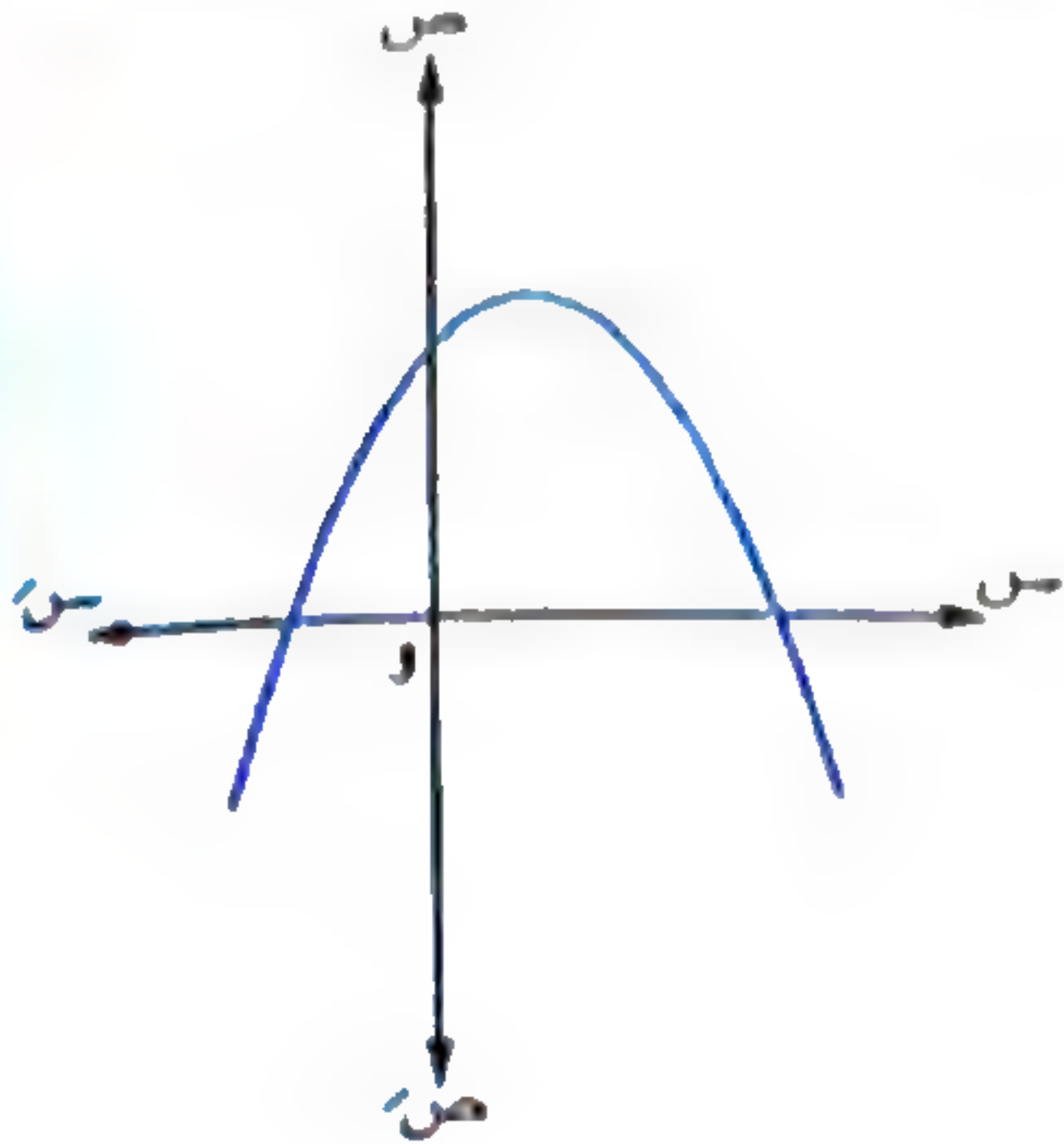
(٥) إذا كان المنحنى : $ص = س - ١$ (س) فأى من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

(١) المنحنى يقطع محور السينات عند النقطتين $(٠, ١)$ و $(١, ٠)$

(٢) رأس المنحنى هو $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(٣) محور التماثل للمنحنى هو $ص = ١$

(١) فقط (٢) فقط (ب) (١) فقط (٣) فقط (ج) (٢) فقط (د) جميع ما سبق.



(٦) الشكل المقابل يمثل المنحنى : $ص = ١ - س + س^٢$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(١) $٠ < ص < ١$

(ب) $٠ < ص < ١$

(ج) $٠ < ص < ١$

(د) $٠ < ص < ١$

(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان حجم متوازى المستطيلات = ٤٠ سم^٣

فإن : $ص =$ سم

(١) ٧ (ب) ٦

(ج) ٥ (د) ٤

(٨) فى الشكل المقابل :

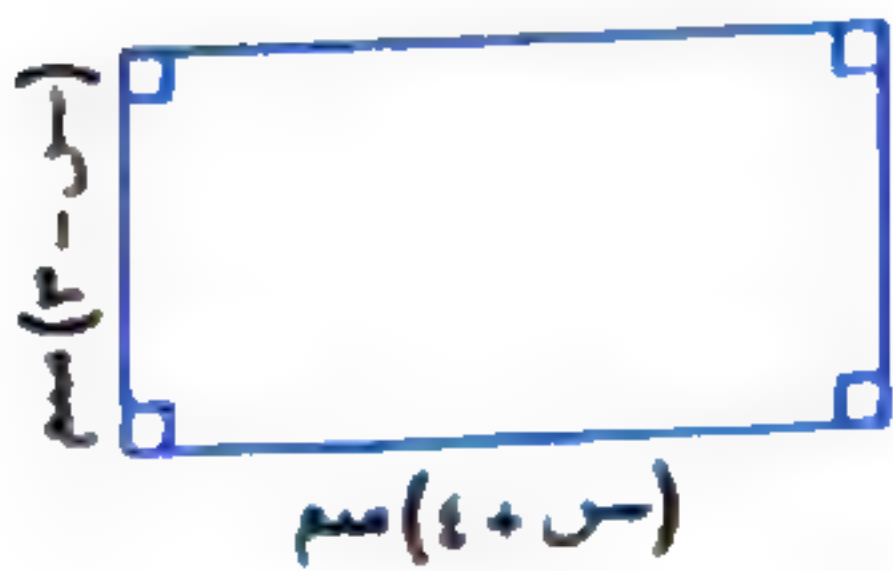
إذا كانت مساحة المستطيل = ٧٨ سم^٢

فإن محيط المستطيل = سم

(١) ٧٨ (ب) ٥٨

(ج) ٣٨

(د) ١٩



(٩) قطعة أرض على شكل مستطيل بعدها ٦ ، ٩ من الأمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك

بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار فإن المقدار المضاف يساوى أمتار.

(١) ٣

(ب) ٥

(ج) ٧

(د) ٩

٨ أوجد قيمة ٢ التى تجعل $ص = ٢$ أحد جذرى المعادلة :

$$س^٢ - ١٢س + ٢ = (٦ - ٢)$$

$$١ + \sqrt{٥}, ١ - \sqrt{٥}$$

٩ إذا كانت د (س) = $١ - س + س^٢$ فأى مما يأتى صحيح ؟

أوجد قيم : ١ ، ٢ ، ٣ إذا علم أن جذرى المعادلة : د (س) = ٠ هما ٣ ، $\frac{1}{3}$

٢٠



1

مقدمة عن الأعداد المركبة

الحاجة إلى مزيد من الأعداد

نعلم أن هناك معادلات ليس لها حل في \mathbb{R} مثل المعادلة $x^2 = -1$ إذ لا يوجد عدد حقيقي مربعه يساوي سالب واحد ، لذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلاً لمثل هذه المعادلات ، هذه المجموعة الجديدة من الأعداد تسمى (مجموعة الأعداد المركبة) ، وقبل دراسة مجموعة الأعداد المركبة بشيء من التفصيل سنتعرف أولاً على العدد التخيلي «ت».

العدد التخيلي ت

يُعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي -1

$$\text{أي أن } t^2 = -1$$

وعلى هذا فإنه يمكننا حل المعادلة : $x^2 = -1$ كالتالي :

$$\therefore x^2 = -1 \quad \therefore x = \pm t$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{-1} \quad \therefore x = \pm t \quad \therefore \text{مجموعة الحل} = \{t, -t\}$$

لاحظ أن

$$t \times t = t^2 = -1$$

$$-t \times -t = (-t)^2 = -1$$

ملاحظات

العدد ت ليس عدداً حقيقياً (لا ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية) **أي أن** $t \notin \mathbb{R}$

وعلى ذلك يستحيل تمثيله على خط الأعداد الحقيقية.

الأعداد : $3t$ ، $-2t$ ، $\sqrt{5}t$ ، ... أعداد تخيلية.

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإن : $\sqrt{a} = \sqrt{a-1+1}$ ، $\sqrt{a} = \sqrt{a-2+2}$ ، $\sqrt{a} = \sqrt{a-3+3}$ ، ... وهكذا

العمليات على الجذور التربيعية لا يمكن تعميمها على الأعداد التخيلية فإذا كان : a ، b عددين حقيقيين سالبين

فإن : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \neq \sqrt{a \times b}$ **مثلاً**

لان : $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$ ، $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1 \times -1 = 1$

بينما : $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1 \times -1}$

قوى الصحيحة

العدد n يحقق قوانين الأسس الصحيحة التي سبق لك دراستها في المرحلة الإعدادية

وحيث أن : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ فبناءً على ذلك يكون :

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

• $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$... وهكذا

مما سبق نجد أن :

القوى الصحيحة للعدد a تعطى إحدى القيم الآتية : a^0 ، a^1 ، a^{-1} ، a^{-2} ، ...

هذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار 1 وبصفة عامة فإنه لكل $n \in \mathbb{Z}$ فإن :

• $a^n = a^{n+1} = a^{n+2} = \dots$

• $a^n = a^{n+1} = a^{n+2} = \dots$

• $a^{-n} = a^{-n-1} = a^{-n-2} = \dots$

• $a^{-n} = a^{-n-1} = a^{-n-2} = \dots$

• $a^{-n} = a^{-n-1} = a^{-n-2} = \dots$ وهكذا

وبطريقة أخرى :

لإيجاد a^n حيث n عدد صحيح

نوجد باقي قسمة $n \div 4$ فإذا كان :

$a^0 = 1$

فإن

الباقي = صفر

$a^1 = a$

فإن

الباقي = 1

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

فإن

الباقي = 2

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

فإن

الباقي = 3

١١٥٠



للإطلاع على الموضوعات
التي لم تتم دراستها العام
الماضي نظراً لتوقف
الدراسة في منتصف مارس
أمسح هذا الكود



- ت^{١٦} = ١ «لأن $٤ \div ١٦ = ٤$ والباقي صفر»
 • ت^{٦٣} = - «لأن $٤ \div ٦٣ = ١٥$ والباقي ٣»
 • ت^{٤٢} = ١- «لأن $٤ \div ٤٢ = ١٠$ والباقي ٢»
 • ت^{١٠١} = ت «لأن $٤ \div ١٠١ = ٢٥$ والباقي ١»
 • ت^{٢٣ + ٧٤} حيث $٧ \exists \text{ ص} = -$ «لأن $٤ \div (٢٣ + ٧٤) = ٥$ والباقي ٣»

ملاحظة

يمكن التعبير عن الواحد الصحيح باستخدام العدد التخيلي t مرفوعاً لقوى صحيحة من مضاعفات العدد ϵ ويساعد ذلك في تبسيط بعض الأعداد التخيلية.

فمثلا $\frac{20}{19} = \frac{1}{19} = 19^{-1}$

العدد المركب

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة : $۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$ ، ۱ عددان حقيقيان ، $۱ = ۱ - ۱$.
 • يُسمى ۱ بالجزء الحقيقي .
 • يُسمى ۱ بالجزء التخيلي .

ومن أمثلة الأعداد المركبة: $2 - t$ ، $7 + 12t$ ، $5 - t$ ، $2\sqrt{t} + 3\sqrt{t}$

ملاحظات

لای عدد مرکب: $E = 1 + B$ ت فایان:

١. إذا كان $b = 0$ فإن $a = 0$ ويكون c عددًا حقيقيًا.

فمثلا ع = ٥ عدد حقيقي وهو عدد مركب جزءه التخيلي = صفر.

٢. إذا كان : $a = 0$ فإن : $c = b$ ويكون c عددًا تخيليًا. (حيث $b \neq 0$).

فمثلا ع = ٢ ت عدد تخيلي وهو عدد مركب.

ومما سبق فإن كل عدد حقيقي هو عدد مركب جزءه التخيلي = صفر لذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية جزئية من مجموعة الأعداد المركبة التي يمكن تعريفها كالتالي :

مجموعة الأعداد المركبة

مجموعة الأعداد المركبة والتي سنرمز لها بالرمز K هي :

$$\{1 = \tau, \exists \tau, \exists \tau: \tau + 1\} = \kappa$$

مثال ١

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين في مجموعة الأعداد المركبة :

$$١ \quad ٢س^٢ + ١٨ = ٠$$

$$٢ \quad ٢س^٢ + س + ١ = ٠$$

الحل

$$١ \quad ٢س^٢ + ١٨ = ٠ \quad \therefore ٢س^٢ = -١٨$$

$$\therefore س^٢ = -٩ \quad \therefore س = \pm \sqrt{-٩}$$

$$\therefore س = \pm ٣١ \quad \therefore س = \pm ٣٢$$

\therefore مجموعة الحل = $\{٣-٢، ٣-٢\}$

$$٢ \quad ٢س^٢ + س + ١ = ٠ \quad \therefore ٢س^٢ = -س - ١$$

$$\therefore س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٨}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٧}}{٢}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{٧}٣}{٢} \quad \therefore س = \frac{-١ \pm \sqrt{٧}٣}{٢}$$

$$\therefore$$
 مجموعة الحل = $\left\{ \frac{-١ + \sqrt{٧}٣}{٢}، \frac{-١ - \sqrt{٧}٣}{٢} \right\}$

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي في مجموعة الأعداد المركبة :

$$١ \quad ٥س^٢ + ١٨٠ = ٠$$

$$٢ \quad ٢س^٢ - ٢س + ٥ = ٠$$

تساوى عددين مركبين

يتساوى العددين المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

أي أنه إذا كان : $(١ + س٢)$ ، $(٢ + س٢)$ عددين مركبين وكان : $س = س$ ، $س = س$

فإن : $١ + س٢ = ٢ + س٢$

والعكس صحيح أي أنه إذا كان : $١ + س٢ = ٢ + س٢$ فإن : $س = س$ ، $س = س$

لاحظ أنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة التي جزأها التخيلي لا يساوى الصفر فلا نعلم مثلاً أي العددين أكبر $(٥ + ٢س)$ أم $(٧ + ٤س)$ ؟

مثال ٢

أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان كلا مما يأتي :

$$١ \quad (٢ - س) + ٧ = ٥ + (٢ - ٢س)$$

$$٢ \quad ٢س + \sqrt{٤} = ٢٢ + س$$

$$٣ \quad ٢س - ٢س + ٦ = ٥ + (٢س + ٢س)$$

الحل

$$\begin{aligned}
 & \text{١} \quad \therefore 2 - س = 7 \quad \therefore 2 - س = 10 \quad \therefore س = 5 \\
 & \text{٢} \quad \therefore 2 - 2 - ص = 5 \quad \therefore 2 - 2 - ص = 2 \quad \therefore س = 1- \\
 & \therefore س + ت + ص = 2 + ت + 4 + 5 = 11 \\
 & \therefore س + ت + ص = 2 + 1- = 2 \quad \therefore س = 1- , ص = 2 \\
 & \text{٣} \quad \therefore س - 2 - ص = 6 \\
 & \therefore 2 - س + ص = 5 \\
 & \text{بضرب المعادلة (٢) في ٣ :} \quad \therefore 6 - س + 3 - ص = 15 \\
 & \text{بجمع (١) ، (٢) :} \quad \therefore 7 - س = 21 \\
 & \text{بالتعويض في (٢) :} \quad \therefore ص = 1- \\
 & \therefore س = 2
 \end{aligned}$$

حاول بنفسك

أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان كلا مما يأتي :

$$\begin{aligned}
 & \text{١} \quad س + ت + ص = 2 - ت - 1 + 4 \\
 & \text{٢} \quad 4 - س - ص + (2 - س + ص) = 7 + 5 - ت
 \end{aligned}$$

جمع وطرح الأعداد المركبة

• عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معًا والجزأين التخيليين معًا.

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

$$\begin{aligned}
 & \text{١} \quad (2 + 7 - 13) + (5 - 9) - (2 - 16 - 2) - (5 - 5) \\
 & \text{٢} \quad (2 - 5) - (2 - 16 - 2) - (5 - 5)
 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 & \text{١} \quad \therefore 2 - 13 = -11 \\
 & \therefore \text{المقدار} = (2 + 7 - 13) + (5 - 9) = (-11) + (-4) = -15 \\
 & \therefore 2 - 8 = -6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{٢} \quad \therefore 2 - 16 - 2 = -16 \\
 & \therefore \text{المقدار} = (2 - 5) - (2 - 16 - 2) = (-3) - (-16) = 13 \\
 & \therefore (2 - 2) + (5 - 2) = 3
 \end{aligned}$$

ضرب الأعداد المركبة

• عند ضرب عددين مركبين نتبع نفس الطرق المستخدمة في ضرب المقادير الجبرية مع الأخذ في الاعتبار أن $1- = 2$

العددين المترافقان

العددان : $٢ + ت$ ، $١ - ت$ يُسميان بالعددين المترافقين ولاحظ أنهما لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

فمثلاً العددان $٣ + ٤ ت$ ، $٣ - ٤ ت$ عددان مترافقان.

ملاحظات

- ◀ مرافق العدد $٢ ت - ٥$ هو العدد $٢ ت - ٥$ وليس $٢ ت + ٥$
- ◀ مرافق العدد $٢ ت$ هو $٢ ت$
- ◀ مرافق العدد ٣ هو ٣
- ◀ مجموع العددين المترافقين هو دائماً عدد حقيقي ، وحاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدد حقيقي

فمثلاً العدد المركب $٣ + ٤ ت$ مرافقه هو $٣ - ٤ ت$ ويكون :

$$\begin{aligned} * \text{مجموعهما} &= (٣ + ٤ ت) + (٣ - ٤ ت) = ٦ \\ * \text{حاصل ضربهما} &= (٣ + ٤ ت)(٣ - ٤ ت) = ٩ - ١٦ ت^٢ = ٩ - ١٦ \end{aligned}$$

حاول بنفسك

اكتب مرافق العدد $٥ - ٤ ت$ ثم أوجد :

- ١ مجموع العدد ومرافقه.
- ٢ حاصل ضرب العدد ومرافقه.

مثال ٥

اختصر إلى أبسط صورة :

$$\frac{٣ - ٤ ت}{ت} \quad \frac{١٠}{٣ + ت} \quad \frac{٢ + ٣ ت}{٥ - ٢ ت} \quad \frac{(٣ + ت)(١ - ت)}{(٣ - ٢ ت)(١ + ت)}$$

الحل

لاحظ أنه لاختصار الكسر الذي مقامه عدد مركب نضرب حدى الكسر فى مرافق المقام.

$$١ \quad \frac{٣ - ٤ ت}{ت} = \frac{٣ - ٤ ت}{(١ - ت) -} = \frac{٣ - ٤ ت}{١ - ت} = \frac{٣ - ٤ ت}{١ - ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{(٣ - ٤ ت)(١ - ت)}{(١ - ت)^٢}$$

$$٢ \quad \frac{١٠}{٣ + ت} = \frac{(١٠)(١ - ت)}{(٣ + ت)(١ - ت)} = \frac{١٠(١ - ت)}{(٣ - ٢ ت)(١ + ت)} = \frac{١٠(١ - ت)}{(٣ - ٢ ت)(١ + ت)}$$

ولكن $t^2 = 1 -$

$$\frac{t^2 + 10t + 6}{t^2 - 25} = \frac{(t+2)(t+5)}{(t+2)(t-5)} = \frac{t+2}{t-5} \quad 3$$

$$\therefore \frac{19}{29} + \frac{4-t}{29} = \frac{19+4-t}{29} = \frac{23-t}{25+4} = \frac{t+2}{t-5}$$

$$\frac{t-2}{t+5} = \frac{1+t-2}{2+t+2} = \frac{t-1}{t+2} = \frac{(t-1)(t+2)}{(t-2)(t+1)} \quad 4$$

$$\frac{(t-7)(2)}{26} = \frac{2-14}{26} = \frac{1-t-15}{t-25} = \frac{(t-5)(t-3)}{(t-5)(t+5)} = \frac{t-3}{t+5}$$

$$\therefore \frac{4}{13} - \frac{7}{13} = \frac{(t-1)(t+2)}{(t-2)(t+1)}$$

حاول بنفسك

اختصر إلى أبسط صورة :

$$\frac{(t+2)(t+2)}{(t-2)(t-2)} \quad 2$$

$$\frac{t+2}{t-2} \quad 1$$

مثال 6

$$\text{إذا كان : } \frac{t-7}{t-2} = \text{س} , \quad \frac{t-13}{t+4} = \text{ص}$$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أثبت أن : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 16$

الحل

$$\therefore \text{س} = \frac{t-7}{t-2} = \frac{1+t-7}{1-2} = \frac{t-6}{-1} = 6-t$$

$$\text{ص} = \frac{t-13}{t+4} = \frac{1-t-13}{1+4} = \frac{-t-12}{5} = -\frac{t+12}{5}$$

\therefore س ، ص مترافقان (لاحظ اختلاف إشارتي الجزأين التخيليين في س ، ص)

$$\text{س}^2 = (6-t)^2 = 36 - 12t + t^2 , \quad \text{ص}^2 = \left(-\frac{t+12}{5}\right)^2 = \frac{t^2 + 24t + 144}{25}$$

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = (36 - 12t + t^2) + \frac{t^2 + 24t + 144}{25} = 16$$

حاول بنفسك

$$\text{أثبت أن العددين 2 ، 3 مترافقان إذا كان : } \frac{2-t}{t-1} = 2 , \quad \frac{3-t}{t-2} = 3$$



1



على مقدمة عن الأعداد المركبة

أولاً من أسئلة الكتاب المدرسي

١ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

$\frac{1}{2}t$ (١)	$\frac{1}{10}t$ (٨)	$\frac{1}{21}t$ (٩)
$\frac{1}{4}t$ (٤)	$\frac{1}{20}t$ (٥)	$\frac{1}{100}t$ (٦)
$\frac{1}{2}t$ (٢)	$\frac{1}{26}t$ (٢)	$\frac{1}{42}t$ (٣)

٢ إذا كان m عدداً صحيحاً فاكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

$\frac{1}{8}m$ (١)	$\frac{1}{42}m$ (٢)	$\frac{1}{12}m$ (٣)	$\frac{1}{8}m$ (٤)
--------------------	---------------------	---------------------	--------------------

٣ بسط كلاً مما يأتي :

$\frac{1}{15} \times \frac{1}{2}$ (١)	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$ (٢)	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{2}$ (٣)
$\frac{1}{2}t$ (٤)	$\frac{1}{4}t$ (٥)	$\frac{1}{2}t$ (٦)

٤ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

$\frac{1}{2}t$ (١)	$\frac{1}{2}t$ (٢)	$\frac{1}{2}t$ (٣)
$\frac{1}{2}t$ (٤)	$\frac{1}{2}t$ (٥)	$\frac{1}{2}t$ (٦)
$\frac{1}{2}t$ (٧)	$\frac{1}{2}t$ (٨)	$\frac{1}{2}t$ (٩)
$\frac{1}{2}t$ (١٠)	$\frac{1}{2}t$ (١١)	$\frac{1}{2}t$ (١٢)

٥ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ حيث a, b, c, d عددان حقيقيان :

$\frac{1}{2}t$ (١)	$\frac{1}{2}t$ (٢)	$\frac{1}{2}t$ (٣)
$\frac{1}{2}t$ (٤)	$\frac{1}{2}t$ (٥)	$\frac{1}{2}t$ (٦)
$\frac{1}{2}t$ (٧)	$\frac{1}{2}t$ (٨)	$\frac{1}{2}t$ (٩)

٦ حل كلاً من المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة :

$$\begin{array}{l} (١) \quad ٠ = ١٢ + ٢س \\ (٢) \quad ٠ = ٥ + ٤س \\ (٣) \quad ٧٥ = ١٠٠ + ٢س \\ (٤) \quad ٠ = ٥ + ٦س + ٢س \end{array}$$

٧ أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان كلاً من المعادلات الآتية :

$$(١) \quad س + ص ت = (٢ + ٣) + (ت - ٢)$$

$$(٢) \quad س + ص ت = (٢ - ٢) + (ت - ٢)$$

$$(٣) \quad ٣س - ٢ص ت = (٢ - ٥) + (ت - ٢)$$

$$(٤) \quad ١٠ + ٧ت = (٢ - ٣س) + (٢ + ٣ص) + (ت - ٢)$$

$$(٥) \quad ٥ + ت = (٢ - ٣س) + (٢ - ٣ص) + (ت - ٢)$$

$$(٦) \quad ٥ = ٣س + س ت - ٢ص + ص ت$$

$$(٧) \quad ٤ت = ٢س - ٢ص + (٣س + ٣ص) + (ت - ٢)$$

٨ أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

$$(١) \quad س + ص ت = \frac{١٠}{٢ + ت} \quad (٢) \quad س + ت = \frac{٤ - ٦}{٢ - ١}$$

$$(٣) \quad س + ت = \frac{(٢ - ٢)(٢ + ت)}{٢ + ٤ت}$$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

$$\text{إذا كان : } س = \frac{١٣}{٢ - ٥} ، ص = \frac{٢ + ٣}{٢ + ١}$$

فأثبت أن : ٢س + ٢ص = ١

$$\text{إذا كان : } ٢ + ٣ت = \frac{٢ + ٢}{٢ - ٢}$$

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مرافق العدد (٣ - ت - ٤) هو

- (أ) ٣ + ت - ٤ (ب) ٣ - ت - ٤ (ج) ٣ - ت + ٤ (د) ٣ - ت - ٤

(٢) المعكوس الجمعي للعدد المركب (٤ - ٧ت) هو

- (أ) ٤ + ٧ت (ب) ٤ - ٧ت (ج) ٤ - ٧ت (د) ٤ - ٧ت



للاطلاع على الموضوعات التي لم تتم دراستها العام الماضي نظراً لتوقف الدراسة في منتصف مارس امسح هذا الكود



$$(٣) \dots\dots\dots = ١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤$$

- (١) $١ + ت$ (ب) $١ - ت$ (ج) ١ (د) ٥

$$(٤) \text{ إذا كان : } ١٢ + ٢٣ = ت - ٤ = ٢٧ \text{ ت}$$

$$\text{فإن : } ٢ + ٧ = \dots\dots\dots$$

- (١) $٩ -$ (ب) ١٢ (ج) $٦ -$ (د) ٦

$$(٥) \text{ مرافق العدد } (٨ -) \text{ هو } \dots\dots\dots$$

- (١) ٨ ت (ب) $٨ - \text{ ت}$ (ج) $٨ -$ (د) ٨

$$(٦) \text{ أى مما يأتى يكون عددًا تخيليًا ؟}$$

- (١) π (ب) $\sqrt[٥]{٥}$ (ج) $\sqrt[٥]{٥} -$ (د) ٢ ت

$$(٧) \dots\dots\dots = ٥ \text{ ت}^٧ + ٤ \text{ ت}^{-١} =$$

- (١) ٩ ت (ب) $٩ - \text{ ت}$ (ج) ٩ ت (د) $- \text{ ت}$

$$(٨) \text{ إذا كان : } (١ + ت^٤) (١ - ت^٧) = س + ت ص \text{ فإن : } س + ص = \dots\dots\dots$$

- (١) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ١

$$(٩) \text{ إذا كان : } س ، ص \text{ عددين حقيقيين وكان : } ٣ + \sqrt[٤]{٤} = ت + ص =$$

$$\text{فإن : } س + ص = \dots\dots\dots$$

- (١) ٣ (ب) ٥ (ج) $٢ + ٢ \text{ ت}$ (د) ٥ ت

اكتشف الخطأ

$$\text{أوجد في أبسط صورة المقدار : } (٢ + ت^٣)^٢ (٢ - ت^٣)$$

إجابة كريم

إجابة احمد

$$(٢ + ت^٣)^٢ (٢ - ت^٣)$$

$$(٢ - ت^٣) (٢ + ت^٣) (٢ - ت^٣)$$

$$= (٢ - ت^٣) (٩ + ٤ \text{ ت}^٦)$$

$$= (٢ + ت^٣) (٩ - ٤ \text{ ت}^٦)$$

$$= (٢ - ت^٣) (٩ - ٤) =$$

$$= (٢ + ت^٣) ١٣ = (٩ + ٤) (٢ + ت^٣) =$$

$$= - ٥ (٢ - ت^٣) = - ١٠ + ١٥ \text{ ت}$$

$$= ٢٦ + ٣٩ \text{ ت}$$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

مسائل

تقريباً مستويات

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $x^2 - 11x + 10 = 0$ فإن : $2^{2018} \cdot 2^{2018} = \dots$

- (أ) 2^{4036} (ب) 2^{2018} (ج) 2^{2017} (د) 2^{2019}

(٢) $(1 + t)^{2020} = \dots$

- (أ) $(1 - t)^{2020}$ (ب) $1 - t^{2020}$ (ج) $1 + t^{2020}$ (د) t^{2020}

(٣) إذا كان : $\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{100} = \dots$ فإن : (س ، ص) =

- (أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١٠) (ج) (١٠ ، ٠) (د) (٠ ، ١)

(٤) مرافق العدد $(2 + t)^{-1}$ هو

- (أ) $2 + t$ (ب) $2 - t$ (ج) $\frac{2}{2+t}$ (د) $\frac{2}{2-t}$

(٥) أي مما يأتي يعتبر تحليلًا للمقدار : $4x^2 + 4x + 1$

- (أ) $(x - 2)(x + 2)$ (ب) $(x + 2)^2$
(ج) $(x - 2)^2$ (د) $(x + 2)(x - 2)$

(٦) لإيجاد قيمة كل من س ، ص الحقيقية يكون كافيًا الحصول على

- (أ) $(x + 2) + 4 = x + 2 - 4$ فقط. (ب) $(2x + 5) + 5 = 5 + 7 = 12$ فقط.
(ج) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٧) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^n = 1$ هو

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٢

(٨) إذا كانت : ٢ ، ب ، ح ، د أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : $t^1 + t^2 + t^3 + t^4 = \dots$

- (أ) صفر (ب) ١- (ج) ١ (د) ت

(٩) $t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots + t^{100} = \dots$

- (أ) ت (ب) ١- (ج) صفر (د) $t^1 + t^2 + t^3 + \dots$

$$(10) \quad (1+t)(1+t^2)(1+t^4) \dots (1+t^{2^{100}}) = \dots$$

- (أ) 2 (ب) 1 (ج) صفر (د) لا شيء مما سبق.

(11) إذا كان $t^m = t^n$ فأي مما يأتي دائماً صحيح ؟

- (أ) $m = n$ (ب) $m + n$ عدد زوجي. (ج) $m - n$ مضاعف للعدد 4

(أ) فقط (ب) فقط (ج) فقط (د) جميع ما سبق.

(12) إذا كان $a > b > 0$ ، حيث a, b أعداد حقيقية

$$\text{وكان : } \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$$

فإن $a = b$ =

- (أ) 2 (ب) 2- (ج) 2 (د) 5-

(13) أي من الآتي صحيح ؟

(أ) $2 + 2 > 4$ (ب) $4 - 2 > 2$ (ج) $1 + 1 < 1$ (د) لا شيء مما سبق.

14 إذا كانت $7t = (s + 2t)(s - t) - 9$

فأوجد قيم s ، s الحقيقية التي تحقق المعادلة السابقة.

15 إذا كانت $s = \frac{t+2}{t-2}$ ، $s = \frac{t+2}{t+2}$ وكان $2s - s = s + 1$

فأثبت أن : $9 = s + s$



2

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية


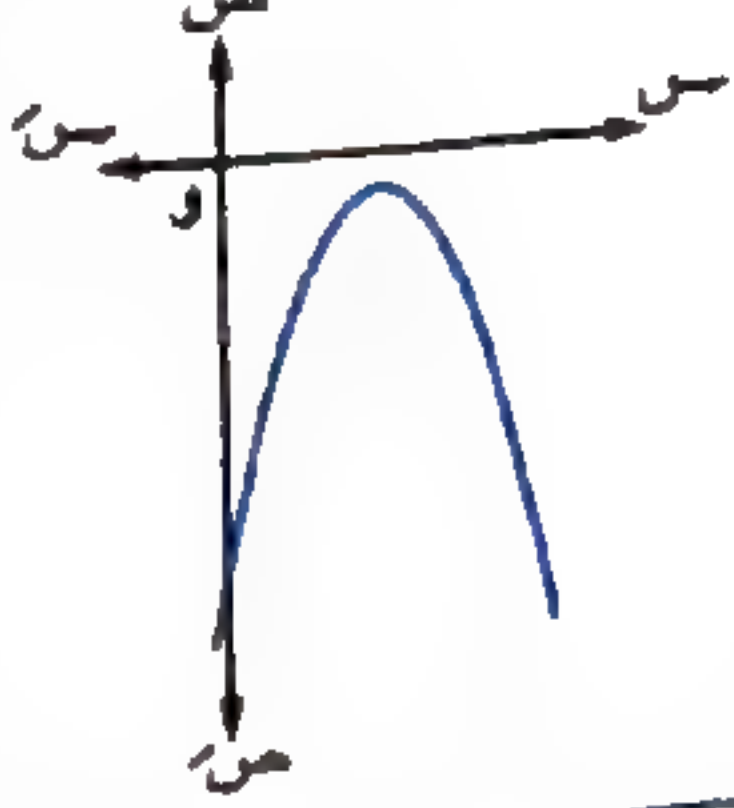

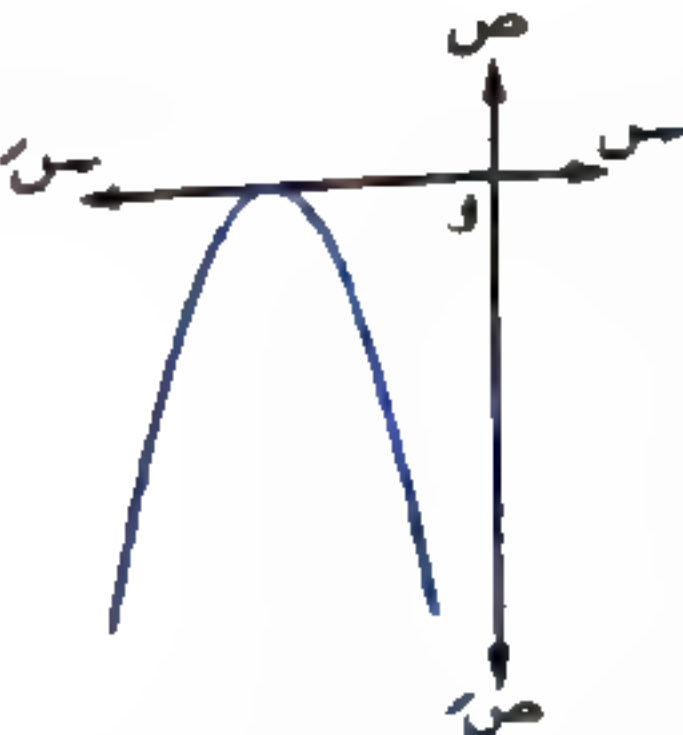
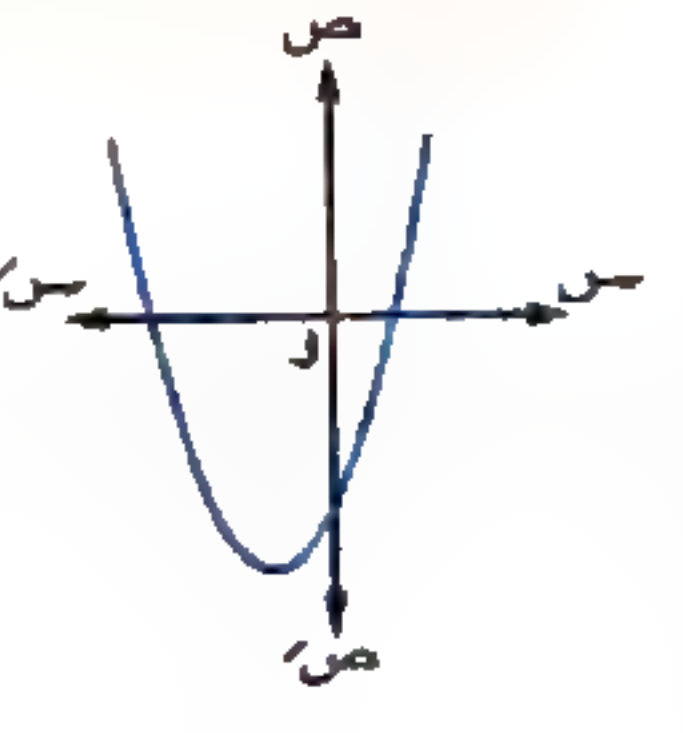
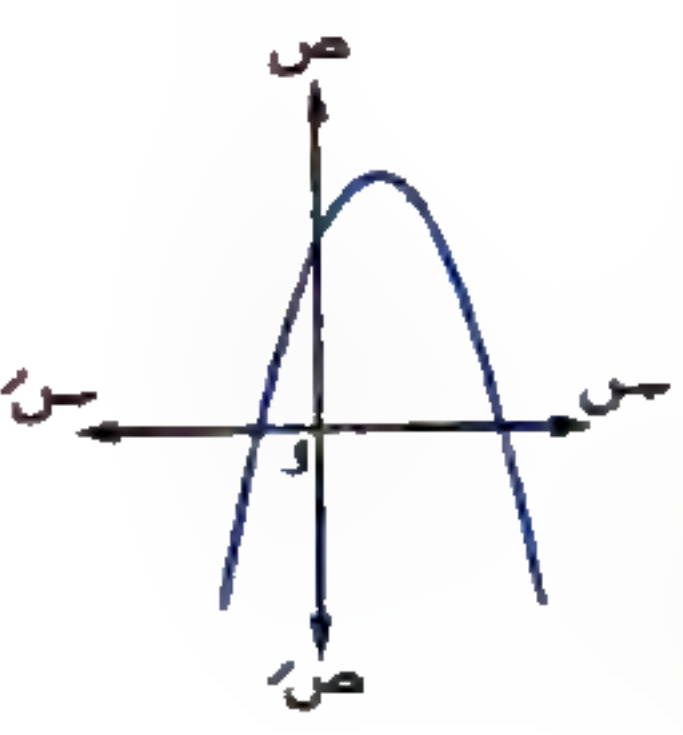
سبق أن درسنا كيفية حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) في متغير واحد في ح وعلمنا أنه عند حلها فإننا نحصل على حلين على الأكثر. والسؤال الذي سنتطرق له في هذا الدرس هو :

هل يمكن تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية دون حلها ؟

نعم ، يمكن أن نفعل هذا باستخدام مميز المعادلة والذي سنتعرف عليه فيما يلي :

المميز

- عند حل المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ باستخدام القانون العام فإننا نحصل على جذرين هما : $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- وكلا الجذرين يحتوى على المقدار : $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ، ويُسمى المقدار : $b^2 - 4ac$
- مميز المعادلة التربيعية لأنه يستخدم لتمييز نوع جذري المعادلة التربيعية ، كالتالى :

سالب $(b^2 - 4ac) < 0$	مساوياً للصفر $b^2 - 4ac = 0$	موجب $(b^2 - 4ac) > 0$
مركبان وغير حقيقيين	حقيقيان متساويان	حقيقيان مختلفان
 	 	 

المميز

نوع الجذرين

رسم
توضيحي
للدالة
المرتبطة
بالمعادلة

والمثال التالي يوضح الحالات الثلاثة بالجدول السابق :

مثال ١

عُيِّن نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية :

$$١ \text{ س}^٢ - ٣ \text{ س} + ٥ = ٠ \quad ٢ \text{ س}^٢ + ١٠ \text{ س} + ٢٥ = ٠ \quad ٣ \text{ س}^٢ + ٢ \text{ س} + ١٠ = ٤$$

الحل

$$١ \text{ : } ١ = ١ \text{ ، } ٣ = -٣ \text{ ، } ٥ = ٥$$

$$\therefore \text{ المميز } = ٣^٢ - ٤ \times ١ \times ٥$$

$$\therefore \text{ الجذران مركبان وغير حقيقيين. } (٣ -) = ٥ \times ١ \times ٤ - ١١ = \text{ (كمية سالبة)}$$

$$٢ \text{ : } ١ = ١ \text{ ، } ١٠ = ١٠ \text{ ، } ٢٥ = ٢٥$$

$$\therefore \text{ الجذران حقيقيان متساويان. } \therefore \text{ المميز } = ١٠^٢ - ٤ \times ١ \times ٢٥ = ٠$$

$$٣ \text{ : } ٣ = ٣ \text{ ، } ١٠ = ١٠ \text{ ، } ٤ = -٤$$

$$\therefore \text{ الجذران حقيقيان مختلفان. } \therefore \text{ المميز } = ١٠^٢ - ٤ \times ٣ \times ٤ = ١٤٨ = \text{ (كمية موجبة)}$$

حاول بنفسك

عُيِّن نوع جذري كل معادلة من المعادلات الآتية :

$$١ \text{ س}^٢ - ٧ \text{ س} + ١٠ = ٠ \quad ٢ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} + ٥ = ٠ \quad ٣ \text{ س}^٢ - ٤ \text{ س} - ١٢ = ٩$$

مثال ٢

أثبت أن جذري المعادلة : $٧ \text{ س}^٢ - ١١ \text{ س} + ٥ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

$$٧ = ٧ \text{ ، } ١١ = -١١ \text{ ، } ٥ = ٥$$

$$\therefore \text{ المميز } = ١١^٢ - ٤ \times ٧ \times ٥ = ١٩ > ٠ \therefore \text{ الجذران مركبان وغير حقيقيين.}$$

$$\therefore \text{ س} = \frac{-(-١١) \pm \sqrt{١٩}}{١٤} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}}{١٤}$$

$$\therefore \text{ الجذران هما : } \frac{١١ + \sqrt{١٩}}{١٤} \text{ ، } \frac{١١ - \sqrt{١٩}}{١٤}$$

حاول بنفسك

$$\text{إذا كانت : } ٢ \text{ س}^٢ - ٤ \text{ س} + ٥ = ٠$$

فأثبت أن : جذري المعادلة مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال 3

إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 - (x+2) - 4 = 0$ متساويين فأوجد قيمة x الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة : $x^2 - (x+2) - 4 = 0$

∴ المميز $= (x+2)^2 - 4 = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x = x(x+4)$

∴ جذري المعادلة متساويان. ∴ المميز = 0

∴ $x^2 - 4 = 0$

∴ $x = 2$

∴ $x = -2$

عند $x = 2$: ∴ المعادلة هي : $x^2 - 6x + 9 = 0$ ∴ $(x-3)^2 = 0$ ∴ $x = 3$

∴ عند $x = 2$ يكون الجذران متساويين وكل منهما = 3

عند $x = -2$: ∴ المعادلة هي : $x^2 - 2x + 1 = 0$ ∴ $(x-1)^2 = 0$ ∴ $x = 1$

∴ عند $x = -2$ يكون الجذران متساويين وكل منهما = 1

حاول بنفسك

أوجد قيمة x الحقيقية التي تجعل جذري المعادلة : $x^2 - 8x + 16 = 0$ متساويين ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال 4

1. أوجد قيم m الحقيقية التي تحقق أن المعادلة : $x^2 - (2m-1)x + m^2 = 0$

ليس لها جذور حقيقية. (أى : ليس لها حل فى \mathbb{R})

2. أوجد قيم x الحقيقية التي تحقق أن المعادلة : $x^2 + (1-x)x + m^2 = 0$

لها جذران حقيقيان. (أى : لها حل فى \mathbb{R})

الحل

1. ∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

∴ $\Delta < 0$

∴ $(2m-1)^2 - 4m^2 < 0$

∴ $4m^2 - 4m + 1 < 4m^2$

∴ $4m^2 - 4m + 1 < 4m^2$

∴ $m < \frac{1}{4}$

∴ المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية إذا كانت $m \in [\frac{1}{4}, \infty)$

لاحظ أنه في المعادلة $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ بالرغم من أن المميز مربع كامل إلا أن الجذرين حقيقيان غير نسبيين وذلك لكون معامل الحد الأوسط غير نسبي.

مثال ٦

إذا كان : ١ ، ٢ عددين نسبيين أثبت أن جذري المعادلة : $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$ نسبيان.

الحل

$$\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4 = 2\sqrt{2} - 1$$

$$= 1 - 2 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

∴ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل.

∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان.

حاول بنفسك

إذا كان ١ عددًا نسبيًا فاثبت أن جذري المعادلة : $x^2 - 15x + (10 + \sqrt{2}) = 0$ يكونان نسبيين.

ملاحظة

إذا كان مميز المعادلة التربيعية (ذات المعاملات الحقيقية) غير موجب فإن جذري المعادلة التربيعية يكونان عددين مركبين مترافقين.

فمثلا المعادلة $x^2 - 2x + 2 = 0$

• معاملات الحدود هي : ١ ، -٢ ، ٢ (أعداد حقيقية)

• المميز = ٤ - ٨ (غير موجب)

∴ الجذران مركبان مترافقان

وللتحقق من ذلك بالتعويض في القانون العام نجد أن الجذرين هما

$$1 + i \text{ ، } 1 - i \text{ (مركبان مترافقان)}$$



على تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

2

من أسئلة الكتاب المدرس

حدد نوع جذري كل من المعادلات الآتية :

(١) $x^2 - 2x + 5 = 0$	(٢) $x^2 - 11x + 10 = 0$
(٣) $x^2 - 10x + 25 = 0$	(٤) $x^2 - 14x + 1 = 0$
(٥) $x^2 + 5x - 30 = 0$	(٦) $x^2 - 7x = 0$

حدد نوع جذري كل من المعادلات الآتية :

(١) $x(x - 2) = 5$	(٢) $6x^2 = 19x - 15$
(٣) $x(x - 11) - (x - 6) = 0$	(٤) $x = 5 + 2(x + 2)$
(٥) $x + \frac{9}{x} = 6$	(٦) $x - \frac{2}{1-x} = 4$
(٧) $x = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$	
(٨) $(x - 1)(x - 7) = 2(x - 3)(x - 4)$	

أثبت أن جذري المعادلة : $x^2 - 2x + 2 = 0$ مركبان وغير حقيقيين ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

إذا كان جذرا كل معادلة من المعادلات الآتية حقيقيين متساويين ، فأوجد قيم k في كل حالة :

(١) $x^2 - 6x + k = 0$	(٢) $18x^2 - kx + 8 = 0$
(٣) $x^2 + 5x + k = 0$	(٤) $75x^2 + 7kx + 3 = 0$
(٥) $x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{k}$	(٦) $x^2 + (2 + k)x + k^2 = 0$
(٧) $x^2 + (1 - k)x + (2 + k) = 0$	(٨) $x^2 - 2x + kx + 7 - k - 6x + 9 = 0$

ثم أوجد الجذرين .

٣٩

5 أوجد قيمة k في كل من الحالات الآتية :

ك. $[-\infty, 4]$

(1) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 + 4x + k = 0$ حقيقيين مختلفين.

ك. $[-1, \infty]$

(2) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 - 8x + 16 = 0$ مركبين وغير حقيقيين.

ك. $[-2, \infty]$

(3) إذا كانت المعادلة : $x^2 + k = 0$ لها جذران حقيقيان مختلفان.

6 أوجد قيم العدد الحقيقي m التي تحقق أن المعادلة :

م. $[-\infty, 0]$

$(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ ليس لها جذور حقيقية.

7 بدون حل أى من المعادلات الآتية بين أيّا منها لها جذران نسبيا وأياها لها جذران غير نسبيا ثم حقق إجابتك بإيجاد الجذرين :

(1) $x^2 - 3x - 2 = 0$

(2) $x^2 + \sqrt{5}x - 5 = 0$

(3) $2(3+x) + (1-x) = 9$

8 إذا كان : $1, 2, 3$ عددين نسبيا فأثبت أن جذرى المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$ نسبيا.

9 إذا كان : $1, 2, 3$ عددين نسبيا فأثبت أن جذرى المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$ عددا نسبيا.

10 أثبت أن جذرى المعادلة : $x^2 + kx + 1 = 0$ دائما نسبيا حيث $k \in \mathbb{N}$

11 إذا كان : $1, 2, 3$ عددين نسبيا فأثبت أن جذرى المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$ عددا نسبيا.

12 أوجد الفترة التي تنتمي إليها 1 والتي تجعل جذرى المعادلة :

ك. $[-\frac{11}{8}, \infty]$

$(2+x)x^2 + (2+2x) + 1 - 1 = 0$ حقيقيين.

13 أثبت أنه لجميع قيم 1 الحقيقية عدا الصفر لا يكون للمعادلة : $(1+x)x^2 - 2x + 1 = 0$ جذور حقيقية.

14 أثبت أنه لجميع قيم 1 ، الحقيقية يكون جذرا المعادلة : $(1-x)(2-x) = 0$ حقيقيين.

15 أثبت أنه لجميع قيم 1 الحقيقية ما عدا $(2=1)$ يكون للمعادلة :

$(1-1)x^2 - 1x + 1 = 0$ جذران حقيقيان مختلفان.



١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جذرا المعادلة : $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ يكونان

(أ) حقيقيين نسبیین. (ب) غیر حقیقیین.

(ج) حقیقیین متساویین. (د) حقیقیین و غیر نسبیین.

(٢) إذا كان : $x^2 + 2x + 1 = 0$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، $x \in \mathbb{C}$ ، وكان $(x^2 - 4x + 1) \neq 0$ غیر موجب فإن جذری المعادلة يكونان

(أ) متساویین. (ب) غیر حقیقیین. (ج) مرکبین مترافقین. (د) حقیقیین مختلفین.

(٣) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 + 2x + 1 = 0$ حقیقیین ومختلفین فإن :

(أ) $x < 1$ ، $x < 0$ (ب) $x = 1$ (ج) $x > 1$ (د) $x < 1$ ، $x < 0$

(٤) إذا كانت : x, y, z أعدادا صحيحة ، $x + y + z = 0$ ، $x \neq 0$ فإن جذری المعادلة :

$(x - y + z)^2 + (y - z + x)^2 + (z - x + y)^2 = 0$ يكونان

(أ) حقیقیین متساویین. (ب) حقیقیین مختلفین نسبیین.

(ج) حقیقیین مختلفین غیر نسبیین. (د) غیر حقیقیین.

(٥) فى أى من المعادلات التربيعية الآتية يكون الجذران مركبين مترافقين ؟

(أ) $x^2 - 4x - 5 = 0$ (ب) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

(ج) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ (د) $x^2 - 7\sqrt{2}x + 5 = 0$

(٦) إذا كان للمعادلة : $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ جذران مركبان مترافقان فإن : $x \in \mathbb{R}$

(أ) $[2, \infty)$ (ب) $[-2, \infty)$ (ج) $[2, \infty)$ (د) $[-\infty, 2]$

(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $4x^2 - 2x + m = 0$ ينتميان للفترة $[-1, 1]$ فإن :

(أ) $2 > m \geq 0$ (ب) $2 > m \geq \frac{1}{8}$ (ج) $2 > m \geq \frac{1}{4}$ (د) $2 > m > 6$

١٧ إذا كانت x, y, z أعدادا حقيقية فأثبت أن جذرى المعادلة : $x^2 + 2x + 1 = 0$ حقیقیان.

١٨ أثبت أن جذرى المعادلة : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ دائما غير حقیقیین إذا كانت $x \in \mathbb{C}$ ، $y \in \mathbb{C}$ ، $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ ، $x \neq -y$



العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

3

لنعلم أن جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ هما :

$$-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ويكون}$$

$$1 \text{ مجموع الجذرين} = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{2a} \times 2$$

أي أن : مجموع الجذرين = $-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2}$

$$2 \text{ حاصل ضرب الجذرين} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \times 2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a^2}$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \times \frac{1}{1} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

أي أن : حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^2}$

وبصورة رمزية نكتب :

إذا كان : L ، M جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ فإن :

$$1 \quad L + M = -\frac{b}{a}$$

$$2 \quad L \times M = \frac{c}{a}$$

مثال ١

دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل من المعادلتين الآتيتين :

$$\boxed{1} \quad 2x^2 + 5x - 12 = 0 \quad \boxed{2} \quad 6x^2 - 11x - 10 = 0$$

الحل

$$\boxed{1} \quad 2 = a, \quad 5 = b, \quad 12 = c$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2}, \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{2}$$

$$\boxed{2} \quad 6 = a, \quad 11 = b, \quad 10 = c$$

$$\therefore 6 = a, \quad 11 = b, \quad 10 = c$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a} = \frac{-11}{6}, \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-10}{6}$$

لتفق من صدق الدل
بملاحظته أن الجذرين
هما
 $\frac{2}{3}$ ، 4

حاول بنفسك

إذا كانت : $3x^2 + 5 = 4x$ فأوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربيهما.

مثال ٢

$$\boxed{1} \quad \text{إذا كان مجموع جذري المعادلة : } 2x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ هو } -\frac{3}{2}$$

فأوجد قيمة : k ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة.

$$\boxed{2} \quad \text{إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة : } 2x^2 - 4x + k = 0 \text{ هو } \frac{1}{4}$$

فأوجد قيمة : k ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة.

الحل

$$\boxed{1} \quad \therefore \text{مجموع الجذرين} = -\frac{3}{2} \quad \therefore \frac{-k}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } 2x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \therefore (2x + 1)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ ، } x = -1$$

$$\boxed{2} \quad \therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{k}{2} = k \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } 2x^2 - 4x + \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore 8x^2 - 16x + 1 = 0$$

$$\frac{56 - \sqrt{14} \pm 4}{4} = \frac{9 \times 2 \times 4 - 2(4 -) \sqrt{14} \pm 4}{2 \times 2} = \frac{-14 - 2 \sqrt{14} \pm 4}{2} = \text{س} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{14} \sqrt{2} \pm 4}{2} \pm 1 = \frac{\sqrt{14} \sqrt{2} \pm 4}{4} = \frac{56 \sqrt{2} \pm 4}{4} =$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\sqrt{14} \sqrt{2}}{2} + 1 \quad , \quad \text{س} = \frac{\sqrt{14} \sqrt{2}}{2} - 1$$

حاول بنفسك

١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $2\text{س}^2 - 4\text{س} + 6 = 0$ هو $\frac{1}{3}$

فأوجد قيمة : ٢ ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $2\text{س}^2 + 3\text{س} + 4 = 0$ هو ٥

فأوجد قيمة : ٢ ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال ٣

١ إذا كان : $3 = \text{س}$ أحد جذرى المعادلة : $2\text{س}^2 + 4\text{س} - 3 = 0$ فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ٢

٢ إذا كان : $6 = \text{س}$ أحد جذرى المعادلة : $2\text{س}^2 - 5\text{س} + 4 = 0$ فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ٢

٣ إذا كان : $1 - 5$ هما جذرا المعادلة : $2\text{س}^2 + 3\text{س} - 5 = 0$ فأوجد قيمة كل من : ٢ ، ٣

الحل

$$\therefore \text{١} \quad \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{٢} \quad 3 = \text{س} \times \text{الجذر الآخر} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{الجذر الآخر} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\therefore \text{الجذر الآخر} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{الجذرين هما : } 3 - , \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 3 -$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

حل اخر:

$\therefore \text{س} = 3 -$ أحد جذرى المعادلة : $2\text{س}^2 + 4\text{س} - 3 = 0$ فهو يحققها.

$$\therefore 2(3 -)^2 + 4(3 -) - 3 = 0$$

$$\therefore 18 - 12 + 12 - 4 = 0 \quad \therefore 12 - 4 = 0 \quad \therefore 8 = 0$$

$$\therefore \text{المعادلة هى : } 2\text{س}^2 + 5\text{س} - 3 = 0$$

$$\text{وبالتحليل : } \therefore (2\text{س} - 1)(\text{س} + 3) = 0$$

$$\therefore 2\text{س} - 1 = 0 \quad \therefore \text{س} = \frac{1}{2} \quad \text{ومنها س} = \frac{1}{2}$$

$$\text{أ ، س} + 3 = 0 \quad \therefore \text{س} = -3 \quad \text{ومنها س} = -3$$

$$\therefore \text{الجذر الآخر} = \frac{1}{2}$$

$$2 \therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{(5-)}{1} = 5$$

$$\therefore 6 + \text{الجذر الآخر} = 5$$

$$\therefore \boxed{\text{الجذر الآخر} = 1-}$$

$$, \therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{5}{1} = 5 = \frac{5}{1} = 5, \therefore \text{الجذرين هما : } 6, 1-$$

$$\therefore \boxed{6 = 5} \therefore 6 = (1-) \times 5$$

حاول حل المثال بطريقة أخرى كما فى رقم ١

$$3 \therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{5}{1}$$

$$\therefore \frac{5}{1} = 5 -$$

$$, \therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{5}{1}$$

$$\therefore 4 = 5 -$$

حل آخر:

$$(1) \therefore 1- \text{ جذر للمعادلة} \therefore 1- = 5 - (1-) + 1^2(1-) \therefore 0 = 5 - 4 - 1$$

$$, \therefore 5 \text{ جذر للمعادلة} \therefore 5 = 5 - (5) + 1^2(5) \therefore 0 = 5 - 0$$

$$(2) \therefore 25 = 5 - 5 + 1^2 5 \therefore 0 = 5 - 5 + 5 \therefore 0 = 1 - 5 + 1^2 5$$

$$\therefore \boxed{1 = 5}$$

$$\text{وبجمع المعادلتين (1) ، (2) : } \therefore 6 = 5 - 1$$

$$\text{وبالتعويض فى (1) : } \therefore 0 = 5 - 1 - 1$$

حاول بنفسك

أوجد الجذر الآخر لكل من المعادلتين الآتيتين ، ثم أوجد قيمة x فى كل حالة :

$$1. \text{ إذا كان : } 1- = x \text{ أحد جذرى المعادلة : } x^2 + 7x - 7 = 0$$

$$2. \text{ إذا كان : } \frac{2}{3} = x \text{ أحد جذرى المعادلة : } 9x^2 - 9x + 5 = 0$$

مثال ٤

$$\text{إذا كان : } (1 + \sqrt{2}x) \text{ هو أحد جذرى المعادلة : } x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ حيث } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{فأوجد : } 1. \text{ قيمة الجذر الآخر. } 2. \text{ قيمة } x$$

الحل

لاحظ مباشرة أنه :

\therefore معاملات الحدود x^2 ، x ، أحد

الجذرين مركب غير حقيقى

\therefore الجذر الآخر هو مرافق الجذر

المعطى أى أنه يساوى $1 - \sqrt{2}x$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{(2-)}{1} = 2$$

$$\therefore (1 + \sqrt{2}x) + \text{الجذر الآخر} = 2 \therefore \text{الجذر الآخر} = 2 - (1 + \sqrt{2}x)$$

$$\therefore \boxed{\text{الجذر الآخر} = 1 - \sqrt{2}x}$$

، \therefore حاصل ضرب الجذرين $= ح$

$$\therefore ح = (٢\sqrt{٢} - ١) - ٢١$$

$$\therefore ح = (٢\sqrt{٢} + ١) (٢\sqrt{٢} - ١)$$

$$\therefore ح = ٢$$

$$\therefore ح = ٢ + ١$$

$$\therefore ح = ٢ - ١$$

حل اخر:

$\therefore (٢\sqrt{٢} + ١)$ أحد جذرى المعادلة المعطاة ، فهو يحققها.

$$\therefore (٢\sqrt{٢} + ١) - ٢ = ح + (٢\sqrt{٢} + ١) - ٢$$

$$\therefore ٢\sqrt{٢} + ١ - ٢ = ح + ٢\sqrt{٢} + ١ - ٢$$

$$\therefore ٢\sqrt{٢} - ١ = ح + ٢\sqrt{٢} - ١$$

$$\therefore ح = ٢$$

$$\therefore ح = ٢ - ١$$

اى ان $س - ٢ = ح + ٢$

ويمكن باستخدام القانون العام إيجاد الجذر الآخر المطلوب.

حاول بنفسك

إذا كان $(٢\sqrt{٢} + ١)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س - ٢ = ح + ٢$ ، حيث $ح \in \mathbb{C}$

فأوجد : **١** قيمة الجذر الآخر.

ملاحظات

فى المعادلة التربيعية : $١س^٢ + بس + ح = ٠$

١ إذا كان : $١ = ١$ فإن : $ل + م = -ب$ ، $ل م = ح$

اى ان مجموع الجذرين = المعكوس الجمعى لمعامل س ، حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق.

٢ إذا كان : $ب = ٠$ فإن : $ل + م = ٠$ **اى** $ل = -م$

اى ان أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر.

٣ إذا كان : $ح = ٠$ فإن : $ل م = ٠$ **اى** $ل = ١/م$

اى ان أحد جذرى المعادلة معكوس ضربى للآخر.

مثال ٥

١ أوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة : $2x^2 + (x-2)x + 7 = 0$ هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر.

٢ أوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة : $2x^2 + 7x + 1 = 0$ هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

الحل

١ ∴ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر.

$$x = -x$$

$$x = 2 - x$$

$$x = 2$$

٢ ∴ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر.

$$x = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 1 + 2x$$

$$x^2 = 1 + 2x$$

$$x = (1 - x)^2$$

$$x = 1$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة :

$$1 - x^2 + (x-5)x - 9 = 0 \text{ معكوساً جمعيّاً للآخر.}$$

$$2 - x^2 + 3x + x = 0 \text{ معكوساً ضربيّاً للآخر.}$$

مثال ٦

وجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة : $5x^2 + 5x - 50 = 0$ ضعف المعكوس الجمعي للجذر الآخر.

الحل

نفرض أن أحد الجذرين L

∴ الجذر الآخر $-L$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^2}$

$$L(-L) = \frac{50}{5}$$

$$-L^2 = 10$$

$$L = \pm \sqrt{10}$$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2}$

$$L + (-L) = \frac{5}{5}$$

$$L - L = -1$$

$$L = \pm 1$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة : $5x^2 - 12x + 12 = 0$ ثلاثة أمثال الجذر الآخر.

مثال ٧

أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة : $٢س^٢ + س + ح = ٠$ مساوياً للمعكوس الجمعي لضعف الجذر الآخر.

الحل

∴ الجذر الآخر = $٢-ل$

بفرض أن أحد الجذرين = $ل$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{س}{١}$

∴ $\frac{س}{١} = (ل ٢-) + ل$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ح}{١}$

∴ $\frac{ح}{١} = ل ٢$

بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ $\frac{ح}{١} = (ل ٢)$

∴ $\frac{ح}{١} = \frac{ل ٢}{١}$

∴ $٢س^٢ + س + ح = ٠$ (وهذا هو الشرط اللازم)

حاول بنفسك

أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة : $٢س^٢ + س + ح = ٠$ مساوياً أربعة أمثال الجذر الآخر.

احرص على اقتناء

كتاب **المعاصر**

في

اللغة الإنجليزية والفرنسية

للسف الأول الثانوى





على العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل من المعادلات الآتية :

(١) $x^2 + 2x - 10 = 0$	(٢) $x^2 - 5x + 6 = 0$
(٣) $x^2 + 4x - 25 = 0$	(٤) $x^2 - 7x - 6 = 0$
(٥) $x^2 - 4 = 0$	(٦) $x^2 - 2x = 0$
(٧) $2x^2 = 23x - 30$	(٨) $(x+1)(x+6) = (x-2)(x-4)$
(٩) $\frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$	(١٠) $\frac{x+1}{1-x} = \frac{x+2}{x+2}$
(١١) $(1-x)^2 + x^2 - 1 = 0$	(١٢) $(x+1)^2 + (x^2 - 2) + x^2 + 2x + 2 = 0$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) حاصل ضرب جذري المعادلة : $x^2 + 2x - 3 = 0$ يساوي
 (أ) $\frac{2}{3}$ (ب) ١٢ (ج) -١٢ (د) $\frac{2}{3}$
- (٢) المعادلة : $x^2 + x + 1 = 0$ حاصل ضرب جذريها يساوي
 (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$
- (٣) مجموع جذري المعادلة : $x^2 - 3 = 0$ هو
 (أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) صفر (د) $\frac{5}{3}$
- (٤) إذا كان : ل ، (٣ - ل) هما جذرا المعادلة : $x^2 - 1x - 8 = 0$ فإن :
 (أ) ٣ (ب) -٣ (ج) ٨ (د) -٨
- (٥) إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 - 3x + 2 = 0$ معكوساً ضربياً للآخر فإن :
 (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) ٢ (د) ٣
- (٦) إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 - (3 - ب)x + 5 = 0$ معكوساً جمعياً للآخر فإن : ب =
 (أ) -٥ (ب) -٣ (ج) ٢ (د) ٥
- (٧) في المعادلة : $x^2 + بx + ح = 0$ إذا كان مجموع جذريها = حاصل ضربيهما فإن : ب =
 (أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ح (د) -ح

(٨) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $(2 - x) x^2 - 6x + 12 = 0$ هو ٢

فإن : $x =$ فان : $x =$ فان : $x =$

(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $2x^2 - (2 + x)x + 2 = 0$ معكوساً ضربياً للجذر الآخر

(١) ١، ٣ (٢) ١، ٣ (٣) ١، ٣ (٤) ١، ٣

(١٠) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $2x^2 + 10x - 8 = 0$ هو $\frac{8}{3}$

فأوجد قيمة x ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

(١١) إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $2x^2 + 5x - 5 = 0$ هو $\frac{2}{3}$

فأوجد قيمة x ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة x فى كل مما يأتى حيث $x \in \mathbb{C}$:

(١) إذا كان : $x = 1$ أحد جذرى المعادلة : $x^2 - 2x + 1 = 0$

(٢) إذا كان : $x = \frac{1}{3}$ أحد جذرى المعادلة : $x^2 - 2x + 3 = 0$

(٣) إذا كان : $(x + 1)$ أحد جذرى المعادلة : $x^2 - 2x + 9 = 0$

(٤) إذا كان : $(x + 2)$ أحد جذرى المعادلة : $x^2 + 1x + 5 = 0$

أوجد قيمتى x ، y فى كل من المعادلات الآتية إذا كان :

(١) 5 ، 2 جذرى المعادلة : $x^2 + 9x + 1 = 0$

(٢) 7 ، 3 جذرى المعادلة : $x^2 - 21x + 1 = 0$

(٣) 1 ، $\frac{2}{3}$ جذرى المعادلة : $x^2 - 1x + 1 = 0$

(٤) $\sqrt[3]{2}x$ ، $\sqrt[3]{2}x$ جذرى المعادلة : $x^2 + 1x + 1 = 0$

فى كل مما يأتى أوجد قيمة x التى تجعل :

(١) x أحد جذرى المعادلة : $x^2 + (1 - x)x - 3 = 0$ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

(٢) x أحد جذرى المعادلة : $(2 - x)x + (3 - x)x - 4 = 0$ معكوساً ضربياً للآخر.

(٣) x أحد جذرى المعادلة : $4x^2 + 7x + 1 = 0$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(٤) x أحد جذرى المعادلة : $2x^2 + 1x + 5 = 0$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

الدرس الثالث

- ٨ أوجد قيمة $ح$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٢س + ح = ٠$ ضعف الجذر الآخر. «٢»
- ٩ أوجد قيمة $ك$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 + كس - ٩٨ = ٠$ ضعف المعكوس الجمعي للجذر الآخر. «٧±»
- ١٠ أوجد قيمة $هـ$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٥س + هـ = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١ «٦»
- ١١ أوجد قيمة ٢ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٢س + ٢١ = ٠$ يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١ «١٠، ٩، ٥-»
- ١٢ في المعادلة : $(٢ - ٢)س + (٣ - ٢)س - ٤ = ٠$ أوجد قيمة ٢ إذا كان :
(١) مجموع جذريها يساوي ٣
(٢) حاصل ضرب جذريها يساوي ٤ «٣، ٩»
- ١٣ في المعادلة : $(ك - ٤)س^2 - (٢ - ك)س - ٣ = ٠$ أوجد قيمة $ك$ إذا كان :
(١) مجموع جذريها يساوي ٥
(٢) أحد جذريها يساوي المعكوس الجمعي للآخر.
(٤) أحد جذريها يساوي المعكوس الضربي للآخر. «١، ٣، ٥، ٢٢»
- ١٤ أوجد قيمة $ك$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - (١ - ك)س + (٢ + ك)س - ٣ = ٠$ ضعف الجذر الآخر. «١، ٣، ٥-»
- ١٥ أوجد قيمة ٢ إذا كان أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٢س + ٢ - ٤ = ٠$ أربعة أمثال الجذر الآخر. «٢، ١٠»
- ١٦ إذا كان مجموع جذري المعادلة : $(٢ - ٢)س^2 - ٢س + ٢ = ٠$ يساوي ٣ وحاصل ضربيهما ٥ أوجد قيمتي : ٢، ٢ «٥، ٣»
- ١٧ أوجد قيمة $ح$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٦س + ح = ٠$ يساوي مربع الجذر الآخر. «٨، ٢٧-»
- ١٨ إذا كان أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٨س - ٣٠ = ٠$ يساوي مربع الجذر الآخر فأوجد قيمة : $ح$ «٢٧، ١٢٥-»
- ١٩ أوجد قيمة ٢ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $س^2 - ٢س - ٣ = ٠$ يزيد عن المعكوس الجمعي للآخر بمقدار ١ «٤»

٢٠ أوجد قيمة ١ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $٢س^٢ - ١س + ٢ = ٠$ يزيد عن المعكوس الضربي للجذر الآخر بمقدار ١

٧٠

٢١ أوجد قيمة $ح$ التي تجعل أحد جذري المعادلة : $١٠س - ح + ١ = ٠$ يقل عن مربع الجذر الآخر بمقدار ٢

٥٦-٥٨، ٢١

٢٢ إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة : $١س^٢ + ٢س + ح = ٠$ كنسبة $٢ : ٣$ أثبت أن : $٢٥ح = ٦س^٢$

٢٣ إذا كان جذرا المعادلة : $٨س^٢ - ٢س + ٣ = ٠$ موجبين والنسبة بينهما $٢ : ٣$ فأوجد قيمة : $س$

١٠٠

٢٤ إذا كان مجموع جذري المعادلة : $(١ + ٢)س^٢ + (١ - ٢٣)س + ١ = ٠$ يساوي حاصل ضربيهما فما قيمة ؟

٣-، ١٠٠

٢٥ أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة : $٢س^٢ + ٢س + ح = ٠$ ضعف الجذر الآخر.

٢٩ح = ٢س، ١٤ح = ٢س - ٢٩

(٢) يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

٢٦ أوجد قيمة ١ التي تجعل مجموع جذري المعادلة : $٢س^٢ - (٤ + ١)س + ٢٣ = ٠$ يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة : $٢س^٢ - ١٧س + ١ = ٠$

٤٠، ٢-

اكتشف الخطأ

٢٧ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة : $٢س^٢ + ٤س + ح = ٢$ هو ١٢ فأوجد قيمة : $ح$

إجابة نورا

إجابة هي

$$\therefore ٢س^٢ + ٤س + ح = ٢$$

$$\therefore ٢س^٢ + ٤س + ح = ٢$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = ١٢$$

$$\therefore ١٢ = ٢ - ح$$

$$\therefore ١٢ = \frac{٢ - ح}{١}$$

$$\therefore ١٤ = ح$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = ١٢$$

$$\therefore \frac{ح}{١} = ١٢$$

$$\therefore ح = ١٢$$

أي الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان (٢ ت) أحد جذري المعادلة التربيعية : $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$ حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن جميع ما يلي صحيح ما عدا

(١) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (-٢ ت) (ب) مجموع جذري المعادلة = صفر

(ج) حاصل ضرب جذري المعادلة = -٤ (د) المميز للمعادلة التربيعية > صفر

(٢) لإيجاد قيم ب ، ح الحقيقية في المعادلة : $س^٢ + ب س + ح = ٠$ يكون كافياً الحصول على

(١) مجموع الجذرين = ٦ فقط. (ب) أحد الجذرين = (٢ + ت) فقط.

(ج) (١) ، (ب) معاً. (د) لا شيء مما سبق.

(٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = $س^٢ + ٢س + ١$

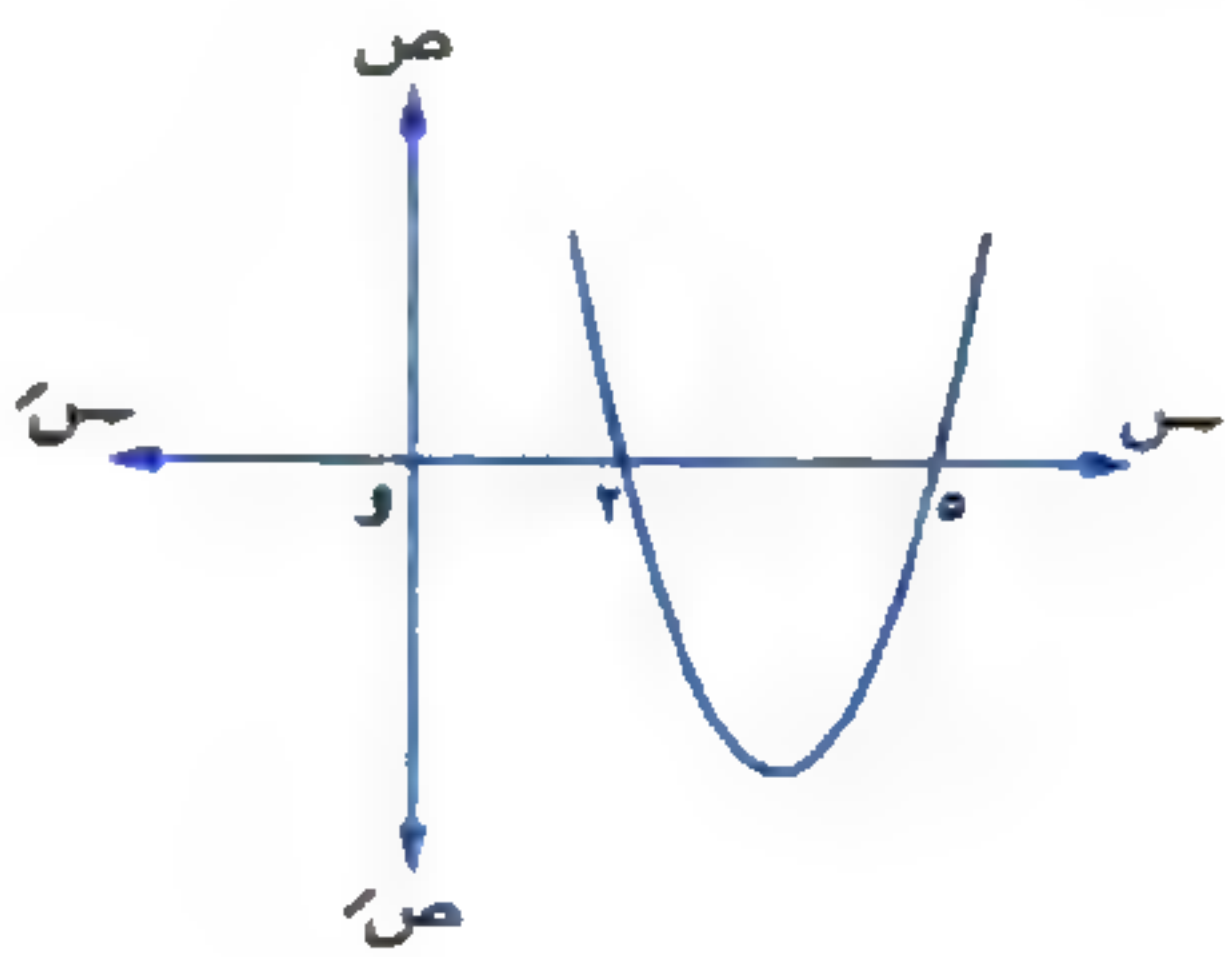
فإن : $\frac{ب + ح}{٢} = \dots\dots\dots$

(١) ٣

(ب) ٥

(ج) ٧

(د) ١٠



(٤) حاصل ضرب جذور المعادلات :

$س^٢ + ٢س + ١ = ٠$ ، $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$ ، $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$ ، $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

يساوى

(١) ٢ - ح

(ب) ١ -

(ج) ١

(د) صفر

(٥) إذا كان : س ، س هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

وكان : س > ٠ ، س > ٠ ، $|س| < |س|$ فأي من العبارات الآتية تكون صحيحة ؟

(١) $٢ > ٠$

(ب) $٢ < ٠$

(ج) $٢ > ٠$

(د) $س + س < ٠$

أوجد قيم ١ التي تجعل للمعادلة : $س^٢ - ٢(١ - س) + (٤ - ١) = ٠$

$٢٠ \in [-\infty, ٤]$ ،

جذرين مختلفي الإشارة.



4

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

بفرض أن $ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة التربيعية : $س^2 + س + ح = ٠$
ويضرب الطرفين في $\frac{1}{م}$ حيث $م \neq ٠$ تصبح المعادلة على الصورة :

$$س^2 + س + \frac{ح}{م} = ٠ \quad \text{أى : } س^2 + س - \left(\frac{م}{م}\right) - \frac{ح}{م} = ٠$$

$$\text{ولكن : } -\frac{م}{م} = ل + م , \quad \frac{ح}{م} = ل م$$

وبالتعويض في (١) نحصل على المعادلة التربيعية التى جذراها $ل$ ، $م$

$$\text{وهى : } س^2 - (ل + م) س + ل م = ٠$$

$$\text{أى : } س^2 - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$$

وبتحليل المقدار الثلاثى فى الطرف الأيمن للمعادلة (٢) نحصل على صورة أخرى للمعادلة

$$\text{وهى : } (س - ل) (س - م) = ٠$$

مثال ١

كُون المعادلة التربيعية التى جذراها :

$$١ \quad \frac{2}{3} , \quad \frac{5}{4}$$

$$٢ \quad \sqrt{2} + ٣ , \quad \sqrt{2} - ٣$$

$$٣ \quad \frac{٢}{ت+١} , \quad \frac{١-ت}{ت}$$

الحل

١ مجموع الجذرين $= \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{11}{12}$ ، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$

∴ المعادلة هى : $س^2 - \left(\frac{11}{12}\right) س + \frac{10}{12} = ٠$ ،

∴ المعادلة هى : $س^2 - \frac{11}{12} س + \frac{10}{12} = ٠$ وبضرب الطرفين فى ١٢

∴ المعادلة هى : $١٢ س^2 - ١١ س + ١٠ = ٠$

$$٢ \text{ مجموع الجذرين } = \sqrt{٢} - ٣ + \sqrt{٢} + ٣ = ٢\sqrt{٢}$$

$$٧ = ٢ - ٩ = (\sqrt{٢} - ٣)(\sqrt{٢} + ٣)$$

∴ المعادلة هي : $٢ - ٦ - ٧ = ٠$

$$٣ \text{ ∴ } \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٢ + ت - ت}{٢} = \frac{٢(١ - ت)}{٢} = \frac{١ - ت}{٢}$$

$$٢ - ١ = \frac{٢ - ٢}{٢} = \frac{٢ - ٢}{٢} = \frac{(١ - ت) ٢}{(١ - ت)(١ + ت)} = \frac{٢}{١ + ت}$$

∴ مجموع الجذرين $١ + ت - ١ - ت = ٢$ ، حاصل ضرب الجذرين $(١ - ت)(١ + ت) = ٢$

∴ المعادلة هي : $٢ - ٢ - ٢ = ٠$

حاول بنفسك

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها :

$$١ - ٤ ، ٧ ، ٢ - ٣ ، ٢ ، \frac{٧ + ٤}{٢ + ٢}$$

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٢

إذا علم أن جذرى المعادلة : $٢ - ٥ - ٦ = ٠$ هما ل ، م

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل + ٧ ، م + ٧

الحل

فى هذا المثال المطلوب تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاة حيث توجد علاقة معينة بين جذرى كل من المعادلتين.

ولهذا المثال عدة طرق للحل نسردها فيما يلى :

الطريقة الأولى

وتتلخص خطواتها فيما يلى :

١ نوجد جذرى المعادلة المطلوبة.

٢ نوجد جذرى المعادلة المعطاة.

٣ نكون المعادلة المطلوب تكوينها.

$$\therefore (١ - ٦)(١ - ٦) = ٠$$

$$\therefore ٢ - ٥ - ٦ = ٠$$

∴ ٦ ، ١ هما جذرا المعادلة المعطاة.

وبفرض أن : ل = ٦ ، م = ١ ، جذرى المعادلة المطلوبة هما هـ ، و

$$\therefore ٦ = ٧ + ١ = ٧ + م = و ، ١٢ = ٧ + ٦ = ٧ + ل = هـ$$

$$\therefore ١٩ = ٦ + ١٢ = هـ + و ، ٧٨ = ٦ \times ١٢ = هـ \times و$$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $١٩ - ٧٨ + ٠ = ٠$

الطريقة الثانية

نفرض أن h ، u هما جذرا المعادلة المطلوبة :

$$\therefore h + u = 7 + m + 7 + l = 14 + m + l$$

$$\therefore h + l = 7 + m, \quad u + m = 7 + l$$

$$\therefore h + u = 14 + 5 = 19$$

$$\therefore h + l = m + 5 \quad (\text{من المعادلة المعطاة})$$

$$h + u = (7 + m)(7 + l) = 49 + (m + l)7$$

$$\therefore h + u = 49 + 5 \times 7 + 6 = 78$$

$$\therefore h + l = m + 6 \quad (\text{من المعادلة المعطاة})$$

\therefore المعادلة المطلوبة هي : $h^2 - 19h + 78 = 0$

الطريقة الثالثة

نفرض أن h ، u هما جذرا المعادلة المطلوبة :

$$\therefore h - u = m, \quad h - h = l$$

$$\therefore h + l = 7 + m, \quad u + m = 7 + l$$

$$\therefore h - l = 6 - 5 = 1$$

$$\therefore h - l = 6 - 5 = 1 \quad (\text{من المعادلة المعطاة})$$

$$\therefore h - (h - m) = 6 - (7 - m)$$

$$\therefore h - h = l$$

$$\therefore h - h = 7 - 6 = 1$$

$$\therefore h - h = 7 - 6 = 1$$

أي أن h جذر للمعادلة : $h^2 - 19h + 78 = 0$ وهي المعادلة المطلوبة.

ملاحظة

لا تستخدم الطريقة الثالثة إلا في حالة أن تكون العلاقة بين الجذر الأول للمعادلة المطلوبة والجذر الأول للمعادلة المعطاة هي نفسها العلاقة بين الجذر الثاني للمعادلة المطلوبة والجذر الثاني للمعادلة المعطاة.

تذكر المتطابقات الآتية !

$$\boxed{1} \quad (m - l)^2 = (m + l)^2 - 4ml$$

$$\boxed{1} \quad (m + l)^2 = m^2 + l^2 + 2ml$$

$$\boxed{2} \quad (m - l)^2 = (m + l)^2 - 4ml$$

$$\boxed{2} \quad (m + l)^2 = (m - l)^2 + 4ml$$

$$\boxed{3} \quad \frac{(m + l)^2}{ml} = \frac{m^2 + l^2}{ml} + \frac{2ml}{ml} = \frac{m}{l} + \frac{l}{m}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{m + l}{ml} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$$

مثال 3

إذا كان l ، m هما جذرا المعادلة : $h^2 - 7h + 9 = 0$ حيث $l < m$ فأوجد القيمة العددية لكل من المقدارين الآتية :

$$\boxed{1} \quad m^2 - l^2$$

$$\boxed{2} \quad m - l$$

$$\boxed{3} \quad l^2 + m^2 + 3ml$$

$$\boxed{4} \quad m^2 + l^2$$

الحل

$$\frac{5}{3} = م + ل ، \frac{7}{3} = م ل$$

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة.

∴ ل + م ، م + ل هما جذرا المعادلة المطلوبة.

$$\frac{م + ل}{م ل} + م + ل = \frac{1}{ل} + م + \frac{1}{م} + ل = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\frac{20}{21} = \frac{10 + 20}{21} = \frac{0}{7} + \frac{0}{3} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}} + \frac{0}{3} =$$

$$، حاصل ضرب الجذرين = \left(\frac{1}{ل} + م \right) \left(\frac{1}{م} + ل \right) = 2 + \frac{1}{م ل} + م ل$$

$$\frac{16}{21} = \frac{42 + 9 - 49}{21} = 2 + \frac{2}{7} - \frac{7}{3} =$$

$$∴ المعادلة المطلوبة هي : س² - \frac{20}{21} س + \frac{16}{21} = 0$$

$$أي 21 س² - 20 س + 16 = 0$$

حاول بنفسك

إذا كان ل ، م جذري المعادلة : 2 س² - 3 س - 1 = 0 . فكون المعادلة التي جذراها : ل² ، م²

مثال ٧

إذا كان \frac{2}{ل} ، \frac{2}{م} هما جذرا المعادلة : س² - 6 س + 4 = 0 . فأوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

$$∴ \frac{2}{ل} ، \frac{2}{م} هما جذرا المعادلة المعطاة.$$

$$∴ \frac{4}{م ل} = 4$$

$$∴ م ل = 1$$

$$، 6 = \frac{2}{م} + \frac{2}{ل}$$

$$∴ 6 = \frac{م^2 + ل^2}{م ل}$$

$$∴ 6 = \frac{(م + ل)^2}{1}$$

$$∴ 3 = \frac{1}{2} = م + ل$$

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة ، ل + م = 3 ، ل م = 1

∴ المعادلة المطلوبة هي : س² - 3 س + 1 = 0

حاول بنفسك

إذا كان \frac{1}{ل} ، \frac{1}{م} هما جذرا المعادلة : 6 س² - 5 س + 1 = 0 . فكون المعادلة التي جذراها : ل ، م

مثال ٨

إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$ يساوي ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذري المعادلة : $x^2 - 2x - 1 = 0$ فأوجد قيمة : x

الحل

بفرض أن جذري المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$ هما : x_1 ، x_2

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 \text{ ، } x_1 x_2 = 4$$

، الفرق بين x_1 ، x_2 يساوي ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذري المعادلة : $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\therefore x_1 - x_2 = 3$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 9 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 9 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9$$

$$\therefore 4 - 2(4) + 1 = 9 \Rightarrow 4 - 8 + 1 = 9 \Rightarrow -3 = 9$$

$$\therefore 4 = 9$$

$$\therefore 4 = 9$$

$$\text{ومنها } x = 2$$

$$x = 2$$

حل آخر : (باستخدام قانون الفرق بين الجذرين) :

$$\therefore x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{1} = \frac{\sqrt{8}}{1} = 2\sqrt{2}$$

ومن المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$ نجد أن :

(١)

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{2}$$

، $x_1 - x_2 = 2\sqrt{2}$ يساوي ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذري المعادلة : $x^2 - 2x - 1 = 0$

(٢)

$$\therefore x_1 - x_2 = 3$$

من (١) ، (٢) : $\therefore \sqrt{8} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{2} = 3 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}$ وبتربيع الطرفين.

$$\therefore 4 = 9$$

$$\therefore 4 = 9$$

$$\therefore 4 = 9$$

حاول بنفسك

إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $x^2 + 2x + 1 = 0$

يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة : $x^2 + 2x - 1 = 0$ فأوجد قيمة : x



على تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها



من أسئلة الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها ١ وحاصل ضربها ٢ هي

- (أ) $x^2 - x - 2 = 0$
- (ب) $x^2 + x - 2 = 0$
- (ج) $x^2 - x + 2 = 0$
- (د) $x^2 + x + 2 = 0$

المعادلة التربيعية التي جذراها ٢ ، -٥ هي

- (أ) $x^2 + 2x - 10 = 0$
- (ب) $x^2 - 2x - 10 = 0$
- (ج) $x^2 - 2x + 10 = 0$
- (د) $x^2 + 2x + 10 = 0$

إذا كان ل ، ل هما جذرا المعادلة : $2x^2 + x + 54 = 0$ فإن : ب =

- (أ) -١٢
- (ب) -٢٤
- (ج) ٢٧
- (د) ٣٦

إذا كان م ، $\frac{2}{م}$ هما جذرا المعادلة : $4x^2 + x + 12 = 0$ فإن : أ =

- (أ) ٣
- (ب) ٥
- (ج) ٦
- (د) ٩

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها :

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| (١) -٢ ، ٤ | (٢) ٧ ، ٧ | (٣) -٧ ، صفر |
| (٤) $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ | (٥) $\frac{2}{5}$ ، $2\frac{1}{5}$ | (٦) $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ |
| (٧) $\sqrt{2-7}$ ، $\sqrt{2-7}$ | (٨) -٥ ، ٥ | (٩) $1-3$ ، $1+3$ |
| (١٠) $2-\sqrt{2}$ ، $2+\sqrt{2}$ | (١١) $\frac{2}{2-1}$ ، $\frac{2+2}{2-1}$ | (١٢) $\frac{2-2}{2-1}$ ، $\frac{2+2}{2+1}$ |
| (١٣) $1-2$ ، $1+2$ | (١٤) $\frac{2-2}{2-1}$ ، $\frac{2+2}{2+1}$ | |

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 7x + 5 = 0$.

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

- (١) $ل^2 م - م^2 ل$
- (٢) $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$
- (٣) $(2-ل)(2-م)$
- (٤) $(\frac{1}{ل} + م)(\frac{1}{م} + ل)$

٢٥٠ ، $\frac{5}{2}$ ، -٥ ، $7\frac{1}{2}$

٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 4x + 2 = 0$ حيث $L < M$
 فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) $L^2 + M^2$	(٢) $L - M$	(٣) $L^2 + M^2$
(٤) $L^2 - 4L + 7$	(٥) $2M^2 - 8M + 15$	(٦) $11, 5, 4, 2, 12, 13$

٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 5 = 0$

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل - ٤ ، م - ٤

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 5x + 3 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : ل ٢ ، م ٢

$$x^2 - 10x + 12 = 0$$

٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 5x - 7 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : ل - ١ ، م - ١

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

٨ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x + 1 = 0$

فكُون المعادلة التي جذراها : ل + م ، ل م

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

٩ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 4 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : $\frac{1}{L}$ ، $\frac{1}{M}$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

١٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 6 = 0$

فكُون المعادلة التي جذراها : $\frac{L}{4}$ ، $\frac{M}{4}$

$$x^2 - 16x - 2 = 0$$

١١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 5x + 1 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : ل ٢ ، م ٢

$$x^2 - 20x + 21 = 0$$

١٢ كُون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة :

$$x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$x^2 - 9x - 1 = 0$$

١٣ كُون المعادلة التربيعية التي كل جذر من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة :

$$x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x^2 - 16x - 7 = 0$$

١٤ كُون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة :

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 - 19x + 25 = 0$$

١٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 1 = 0$

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها : $\frac{L}{M}$ ، $\frac{M}{L}$

$$x^2 - 20x + 12 = 0$$

١٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 + 5x + 6 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : ل - م ، م - ل

$$x^2 - 1 = 0$$

١٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 2x - 4 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$

$$x^2 - 12x + 1 = 0$$

١٨ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 5x + 2 = 0$

فكّون المعادلة التي جذراها : $\frac{l}{m}$ ، $\frac{m}{l}$

$$x^2 - 18x + 12 = 0$$

١٩ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 + 12x - 1 = 0$

فكّون المعادلة التي جذراها : $2l + \frac{1}{m}$ ، $2m + \frac{1}{l}$

$$x^2 - 48x - 32 = 0$$

٢٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 5 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : l^2m ، m^2l

$$x^2 + 15x - 125 = 0$$

٢١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x + 5 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : 6 ، $l^2 + m^2$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

٢٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x - 1 = 0$ حيث $l < m$

كّون المعادلة التي جذراها : $3l - 2m$ ، $2l - 3m$

$$x^2 - 5\sqrt{13}x + 79 = 0$$

٢٣ إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ جذري المعادلة : $x^2 - 11x + 3 = 0$

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

$$x^2 - 7x - 15 = 0$$

٢٤ إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ هما جذرا المعادلة : $x^2 - 5x + 11 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها : l^2m ، m^2l

$$x^2 + 5x + 125 = 0$$

٢٥ إذا كان $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$ هما جذرا المعادلة : $x^2 - 3x + 1 = 0$

كّون المعادلة التي جذراها : $l - 7$ ، $l + m + 3$

$$x^2 - 36 = 0$$

٢٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 2x - 5 = 0$

فكّون المعادلة التي جذراها : $l^2 + m$ ، $m^2 + l$

$$x^2 - 16x + 58 = 0$$

٢٧ إذا كان $\frac{2}{m}$ ، $\frac{2}{l}$ هما جذرا المعادلة : $س^2 - ١٢س + ٩ = ٠$.

فكُون المعادلة التي جذراها : $\frac{1}{\frac{2}{m}}$ ، $\frac{1}{\frac{2}{l}}$.

٢٨ إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $س^2 - ٦س + ٧ = ١ + ح$ هو $\frac{11}{6}$

أوجد : قيمة ح

٤٠

٢٩ إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $س^2 - ٢س + ح = ٠$ يساوى الفرق بين جذري

المعادلة : $س^2 - ٢س + ح = ٣$. فأثبت أن : $٩ح + ٤٨ - ٢٣٢ = ٠$.

٣٠ إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $س^2 + لس + ٢ = ٠$.

يساوى ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة : $س^2 + ٢س + ل = ٠$ أوجد : قيمة ل

٠٠ ، $\frac{8-}{3}$.

٣١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 - ٦س + ٩ = ٠$ وكان : $ل^2 + م^2 = ٧$ ل م

أوجد : قيمة ؟

١٠

٣٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 - ٨س + ح = ٠$ وكان : $ل^2 + م^2 = ٤٠$.

فأوجد قيمة ح العددية ، ثم كُون المعادلة التي جذراها : $ل^2 + م^2 + ل ، ل م$

٠٠ = $١٢ = ح$ ، $س^2 - ١٠٨س + ١١٥٢ = ٠$.

٣٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 - ٤س - ٥ = ٠$ حيث $ل < م$

فكُون المعادلة التي جذراها : ل - ٧ ، $٢م + ١$

٠٠ = $س^2 - ٦س - ٦ = ٠$.

اكتشف الخطأ

٣٤ إذا كان ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : $س^2 + ٥س + ٣ = ٠$.

فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها : ل ، م

حل أميرة

حل يوسف

$$\therefore ل + م = -٥ ، ل م = ٣$$

$$\therefore (ل + ١) + (م + ١) = -٤$$

$$ل + م + ٢ = -٤$$

$$\therefore (ل + ١) + (م + ١) + ل م = ١ - ٤ = -٣$$

$$١ = ١ + ٣ - ٣ =$$

∴ المعادلة هي : $س^2 + ٣س + ١ = ٠$.

$$\therefore (ل + ١) + (م + ١) = -٥$$

$$\therefore ل + م + ٢ = -٥$$

$$\therefore (ل + ١) + (م + ١) = -٣$$

$$\therefore ل + م + ٢ = -٣$$

$$\therefore ل م = ٣$$

∴ المعادلة هي : $س^2 + ٧س + ٩ = ٠$.

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟



٣٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التي جذراها بعدد مستطيل مساحته ١٥ سم^٢ ومحيطه ٢٦ سم هي

(أ) $x^2 - 26x + 15 = 0$ (ب) $x^2 + 26x - 15 = 0$

(ج) $x^2 - 13x - 15 = 0$ (د) $x^2 - 13x + 15 = 0$

(٢) إذا كان : $x^2 + 12x + 1 = 0$ ، $x^2 + 3x + 1 = 0$ ،

حيث x ، y عدنان حقيقيان مختلفان

فإن : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٧ (ج) -٥ (د) ١١

(٣) إذا كان x ، y هما جذرا المعادلة التربيعية : $(x - 1)(x - 2) = 0$ فإن المعادلة التربيعية التي

جذراها x ، y هي

(أ) $(x - 1)(x - 2) = 0$ (ب) $(x - 1)(x - 2) + 1 = 0$

(ج) $(x - 1)(x - 2) = 1$ (د) $(x - 1)(x - 2) - 1 = 0$

(٤) لتكوين المعادلة التربيعية التي جذراها x ، y ، z حيث x ، y عدنان حقيقيان

يكون كافياً الحصول على

(أ) $x + y = 0$ فقط.

(ب) $(x + y + z)^2 + (x - y - z)^2 = 0$ فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معاً.

(د) لا شيء مما سبق.

(٥) عمر و خالد يحاولان حل معادلة تربيعية ، أخطأ عمر في كتابة الحد المطلق في المعادلة فوجد أن جذري

المعادلة هما ٣ ، ٤ بينما أخطأ خالد في كتابة معامل x في المعادلة فوجد أن جذري المعادلة هما

٢ ، ٣ فإن الجذرين الصحيحين للمعادلة هما

(أ) ٢ ، ٤ (ب) -٢ ، -٤ (ج) ١ ، ٦ (د) -١ ، -٦

(٦) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $x^2 + 3x + 2 = 0$ عددين فرديين متتاليين

فإن : $x^2 - 4x + \dots\dots\dots = 0$

(أ) -١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $x^2 - 2x + 1 = 0$ عددين صحيحين مختلفين وكل من x ، y عدداً أولياً فأي من العبارات الآتية صحيحة ؟

(١) الفرق بين جذري المعادلة عدد فردي. (٢) $x^2 - 2x + 1 = 0$ عدد أولي.

(٣) $x + y$ عدد أولي.

(١) فقط.

(ب) (١) ، (٣) فقط.

(ج) (٢) ، (٣) فقط.

(د) كل ما سبق صحيح.

(٨) إذا قطع منحنى الدالة $y = x^2 + 2x + 1$ محور السينات في $x = 1$ ، $x = 2$ حيث $|1 - 2| < 1$ فإن :

(١) $1 < x < 2$ (ب) $1 < x < 2$ (ج) $1 < x < 2$

(د) $1 < x < 2$ (١) $1 < x < 2$ (٢) $1 < x < 2$

(٩) إذا كان x ، y هما جذرا المعادلة : $x^2 - 2x + 1 = 0$ وكان : $x^2 + y^2 = 2$ حيث $0 < \theta < 90^\circ$ فإن : $\theta = \dots$

(د) $\frac{\pi}{2}$

(ج) $\frac{\pi}{4}$

(ب) $\frac{\pi}{6}$

(١) $\frac{\pi}{12}$

إذا كان x ، y هما جذرا المعادلة : $x^2 + 2x + 1 = 0$ حيث $x \neq 1$ ، $y < 1$ وكان : $y = 1 - x$

(٢) $1 - x = y$

فأثبت أن : (١) $x^2 = (1 + x)$

إذا كان الفرق بين جذري المعادلة : $x^2 + 2x + 1 = 0$ حيث $x \neq 1$ ، $y < 1$ يساوي ضعف مجموع معكوسيهما الضربيين أثبت أن : $x^2 = (1 + x)$

يساوي ضعف مجموع معكوسيهما الضربيين أثبت أن : $x^2 = (1 + x)$



5

إشارة الدالة

بحث إشارة الدالة

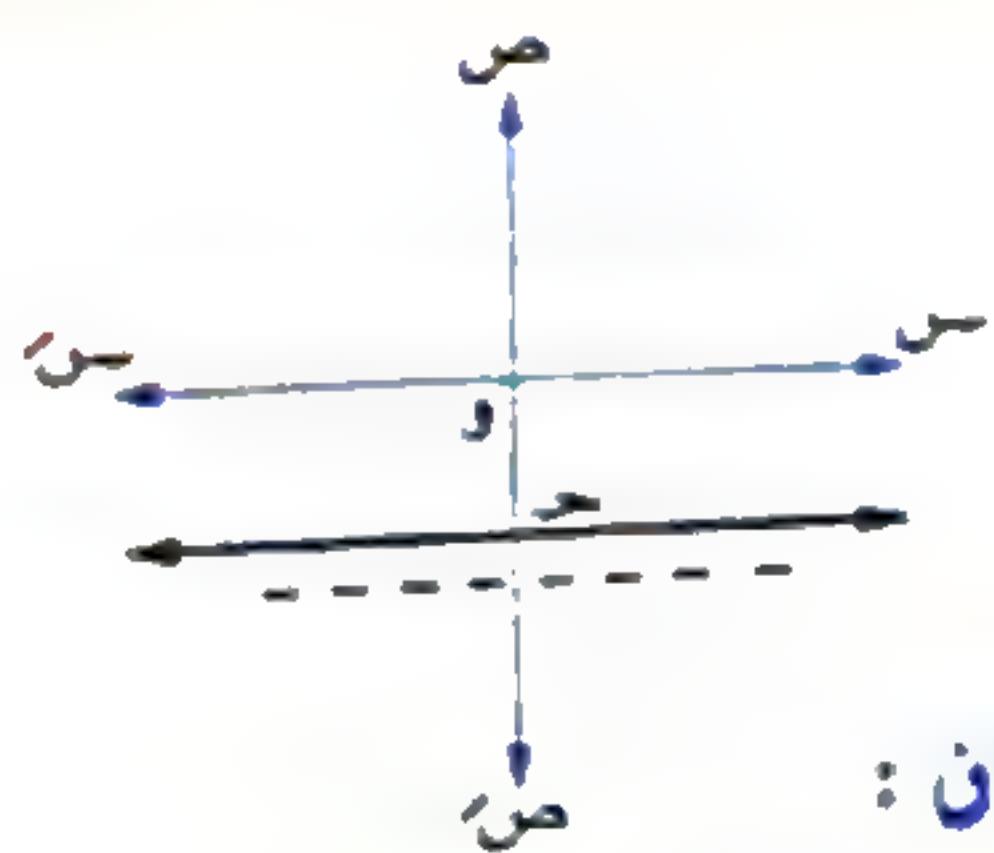
المقصود ببحث إشارة الدالة d في المتغير x هو تحديد قيم x التي تكون عندها قيم الدالة على النحو التالي :

- موجبة أي : $d(x) < 0$.
- سالبة أي : $d(x) > 0$.
- مساوية للصفر أي : $d(x) = 0$.

أولاً إشارة الدالة الثابتة

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

$d(x) = c$ (حيث c سالبة)



إشارة الدالة سالبة لجميع قيم $x \in E$

$d(x) = c$ (حيث c موجبة)



إشارة الدالة موجبة لجميع قيم $x \in E$

• مما سبق نستنتج أن :

• إشارة الدالة الثابتة $d(x) = c$ هي نفس إشارة c لجميع قيم $x \in E$

فمثلاً

- إذا كانت $d(x) = 5$ فإن إشارة الدالة d تكون موجبة لجميع قيم $x \in E$
- وإذا كانت $d(x) = -3$ فإن إشارة الدالة d تكون سالبة لجميع قيم $x \in E$

حاول بنفسك

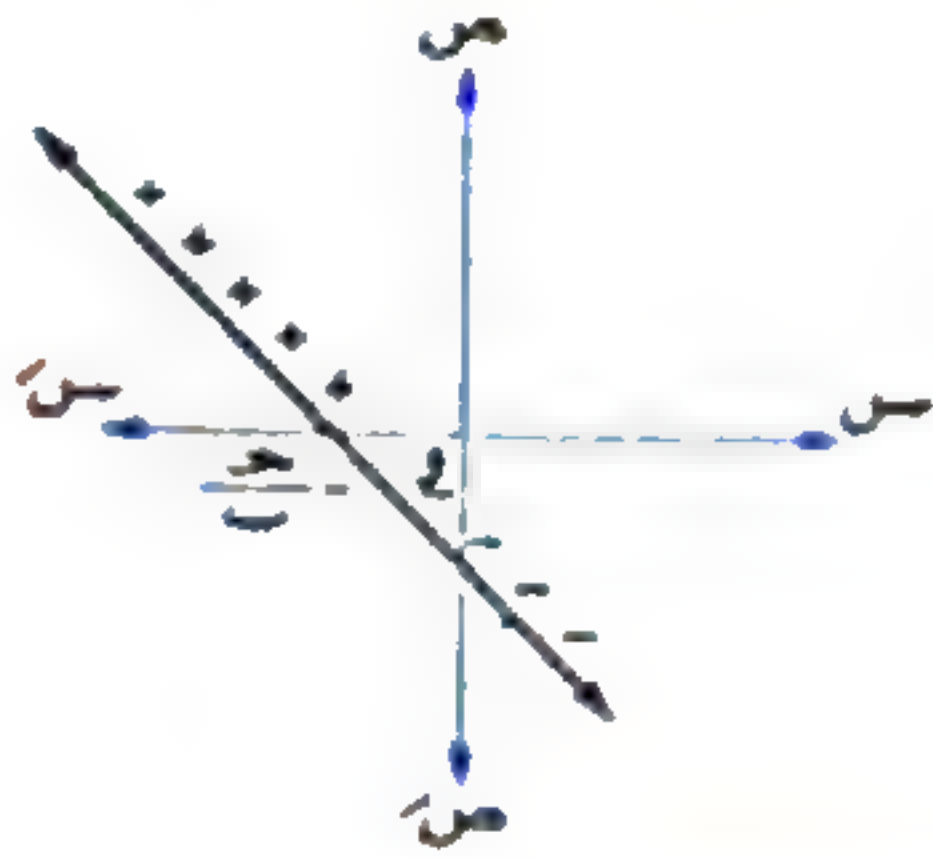
$$2 : 5 = (س) \quad 2 : 5 = -$$

عَبْرَ إشارة كل من الدالتين الآتيتين : $1 : 10 = (س)$ $1 : 10 = -$

ثانياً : إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

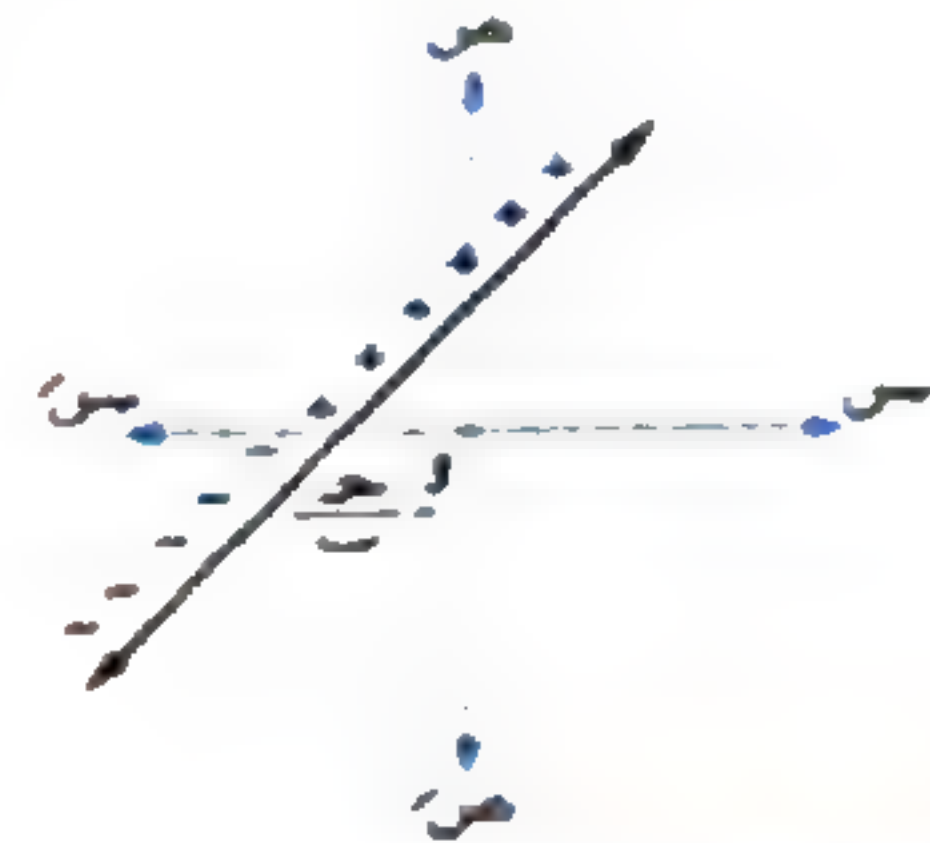
د : د (س) = س + ح (حيث س سالبة)



فلاحظ أن إشارة الدالة :

- مثل إشارة س (سالبة) عندما $س < -$
- مخالفة لإشارة س (موجبة) عندما $س > -$
- مساوية للصفر عندما $س = -$

د : د (س) = س + ح (حيث س موجبة)



فلاحظ أن إشارة الدالة :

- مثل إشارة س (موجبة) عندما $س < -$
- مخالفة لإشارة س (سالبة) عندما $س > -$
- مساوية للصفر عندما $س = -$

• مما سبق نستنتج أنه :

لإيجاد إشارة الدالة الخطية د : د (س) = س + ح ، $س \neq 0$.

$$\frac{س}{س} = 1 \quad \therefore س = س$$

$$\therefore س + ح = 0$$

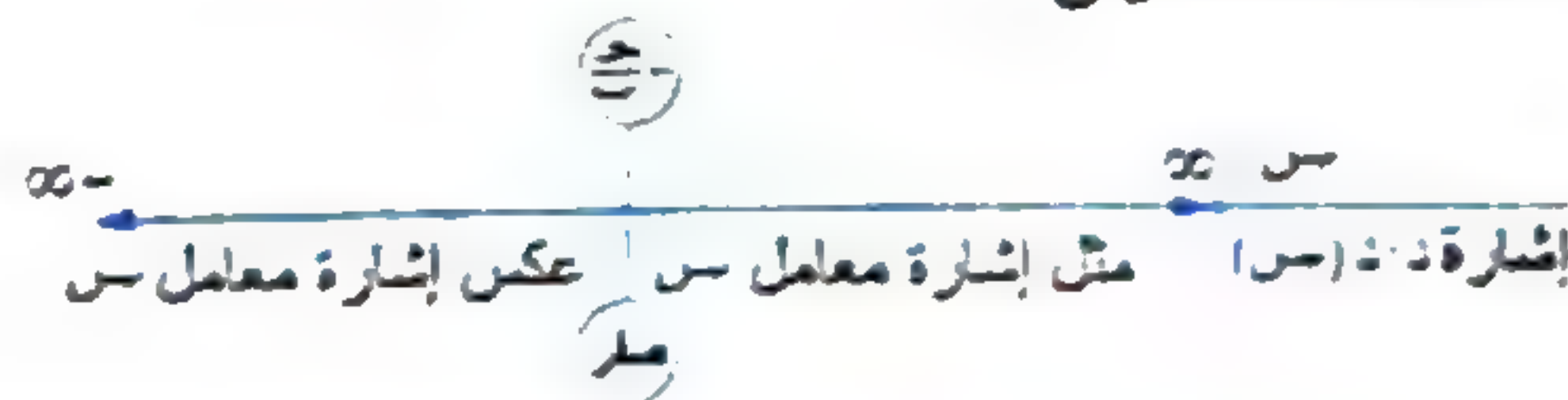
فتكون إشارة الدالة د :

$$2 \quad \text{عكس إشارة س عندما } س > -$$

$$1 \quad \text{مثل إشارة س عندما } س < -$$

$$3 \quad د (س) = 0 \quad \text{عندما } س = -$$

• ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :



مثال ١

عَبْرَ إشارة كل من الدالتين الآتيتين مع التوضيح على خط الأعداد :

$$2 \quad د : د (س) = 1 - \frac{1}{4} س$$

$$1 \quad د : د (س) = 3 س + 6$$

الحل

وبوضع د (س) = 0
 \therefore س = -2

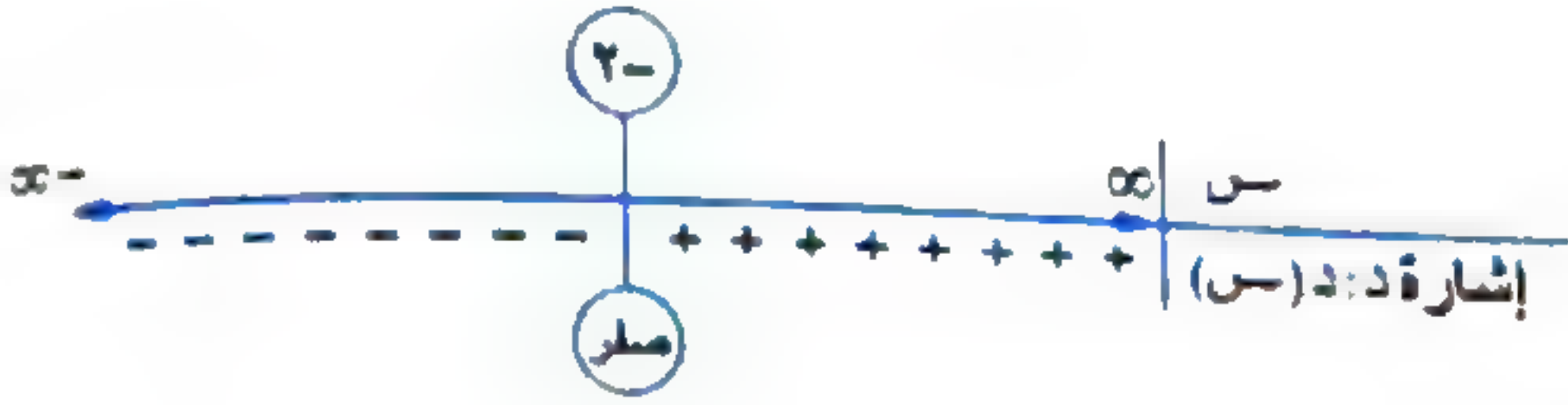
1 \therefore د (س) = 2س + 6
 \therefore 0 = 2س + 6

\therefore إشارة الدالة د تكون :

• سالبة عندما س > -2

• موجبة عندما س < -2

• د (س) = 0 عندما س = -2



يمكن توضيح الحل على خط الأعداد في الشكل المقابل :

2 \therefore د (س) = $\frac{1}{4}$ س + 1

وبوضع د (س) = 0

\therefore س = 2

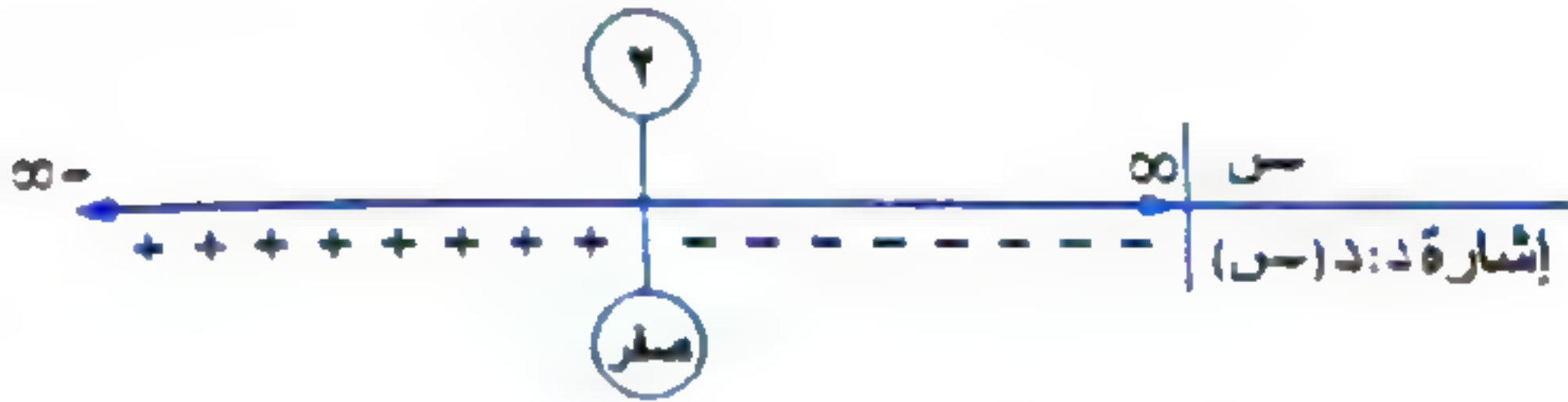
\therefore $\frac{1}{4}$ س = -1

\therefore إشارة الدالة د تكون :

• موجبة عندما س > 2

• سالبة عندما س < 2

• د (س) = 0 عندما س = 2



يمكن توضيح الحل على خط الأعداد في الشكل المقابل :

حاول بنفسك

عَيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

1 د : د (س) = 2س - 6

2 د : د (س) = $\frac{1}{4}$ س + 2

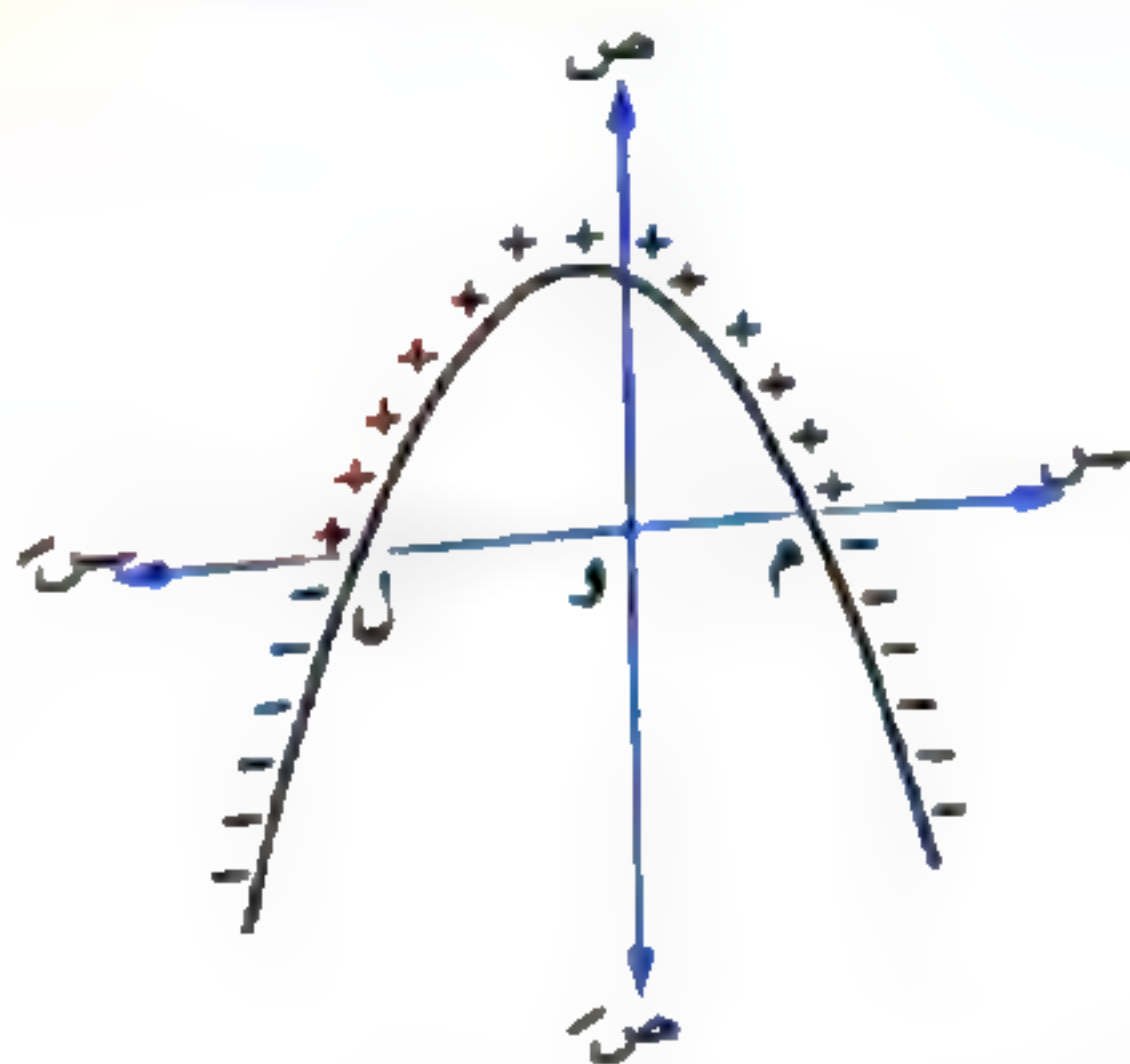
ثالثاً إشارة دالة الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د : د (س) = a س² + b س + c ، $a \neq 0$

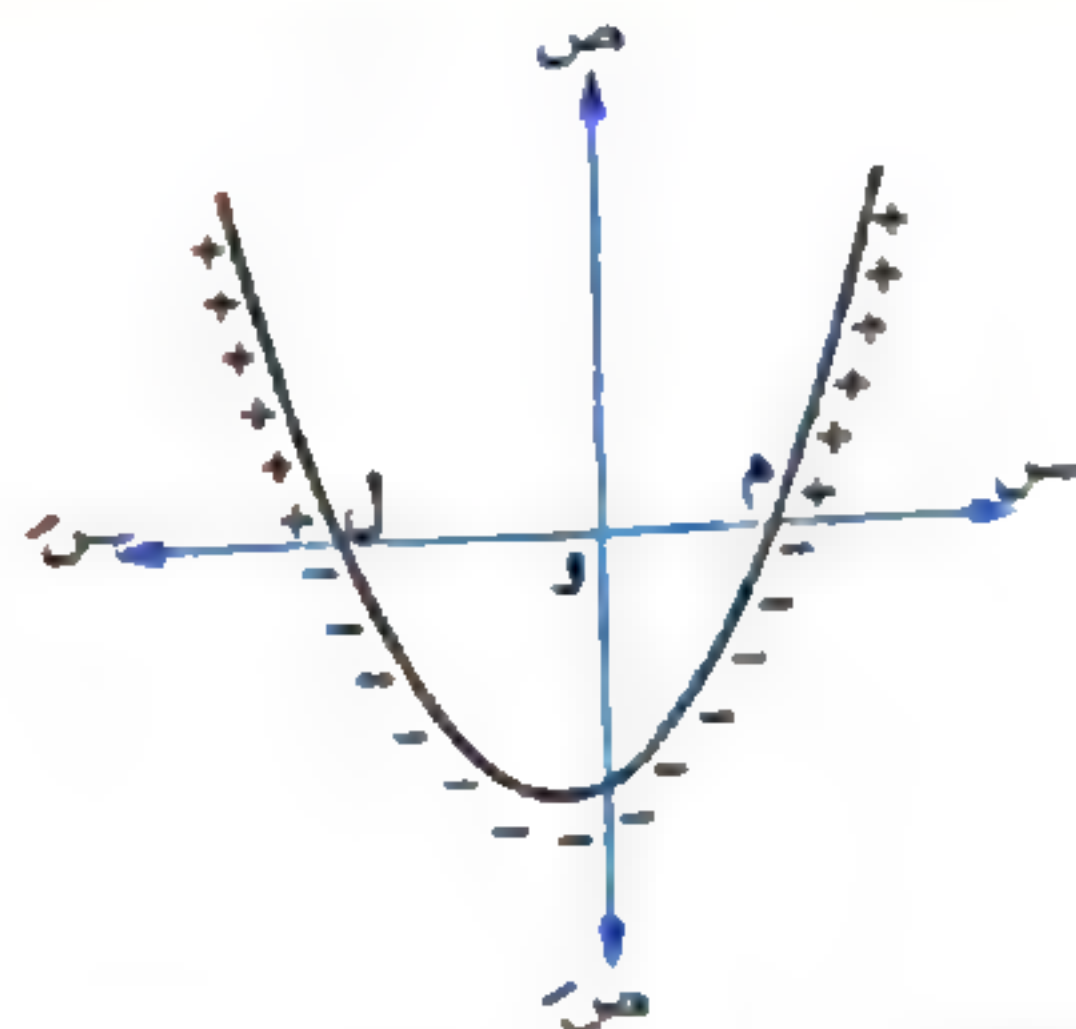
فإننا نوجد مميز المعادلة : a س² + b س + c = 0 وتوجد ثلاث حالات :

1 المميز $b^2 - 4ac < 0$ فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيان نغرض أنهما ل ، م حيث ل > م :

إذا كانت : a سالبة



إذا كانت : a موجبة



وتكون إشارة الدالة كما يلي :

• مخالفة لإشارة Δ عندما $\Delta < 0$ ، $\Delta < 0$

• مثل إشارة Δ عندما $\Delta > 0$ ، $\Delta > 0$

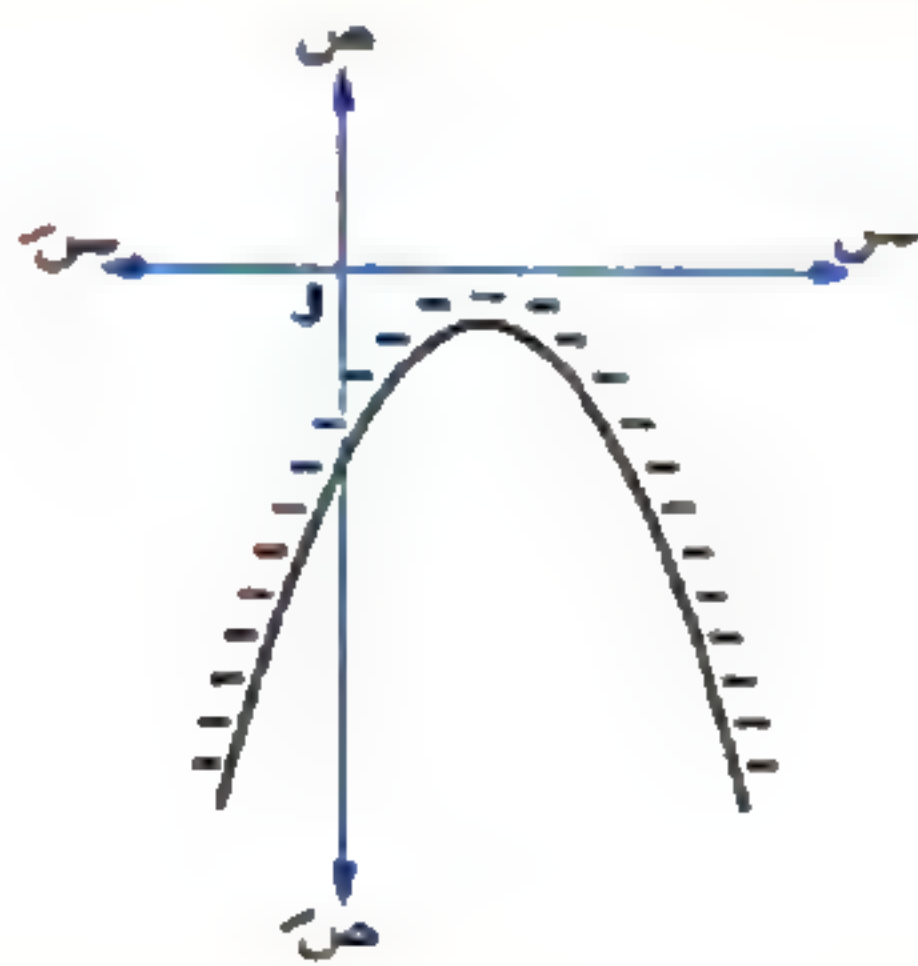
• مساوية للصفر عندما $\Delta = 0$ ، $\Delta = 0$

ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :

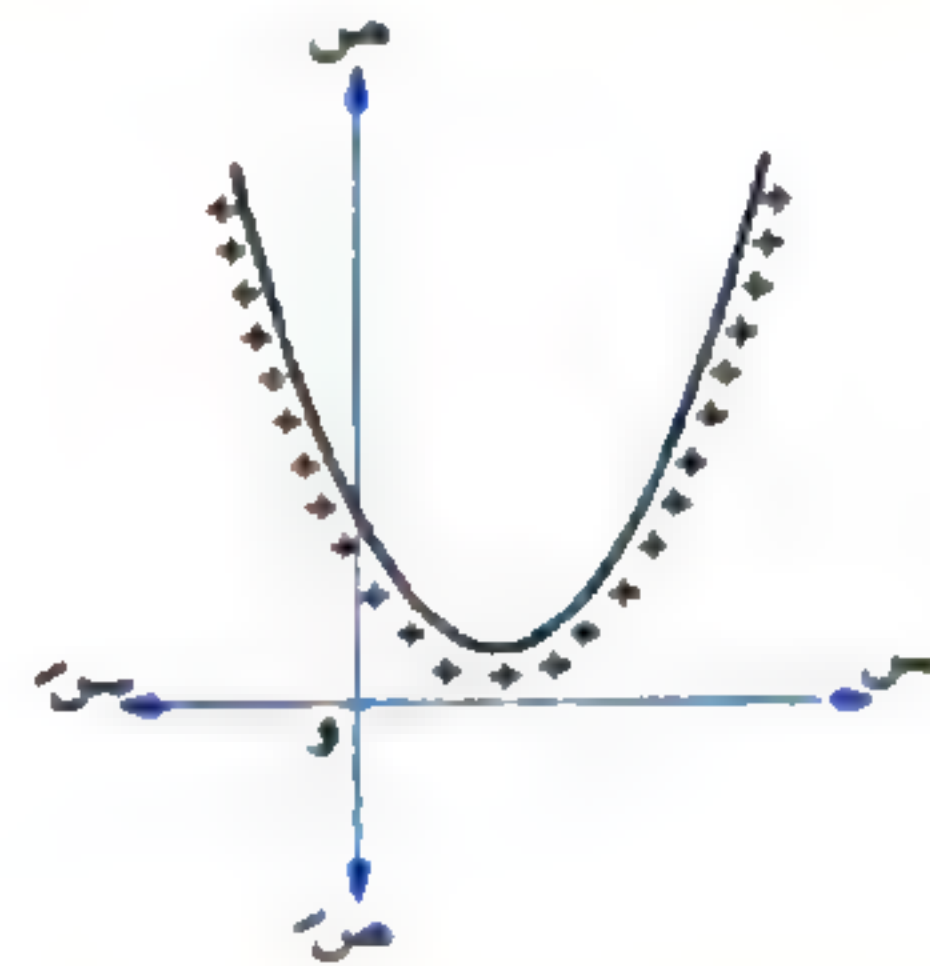


٢ المميز $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإنه لا توجد للمعادلة جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة كما يلي :

إذا كانت Δ سالبة



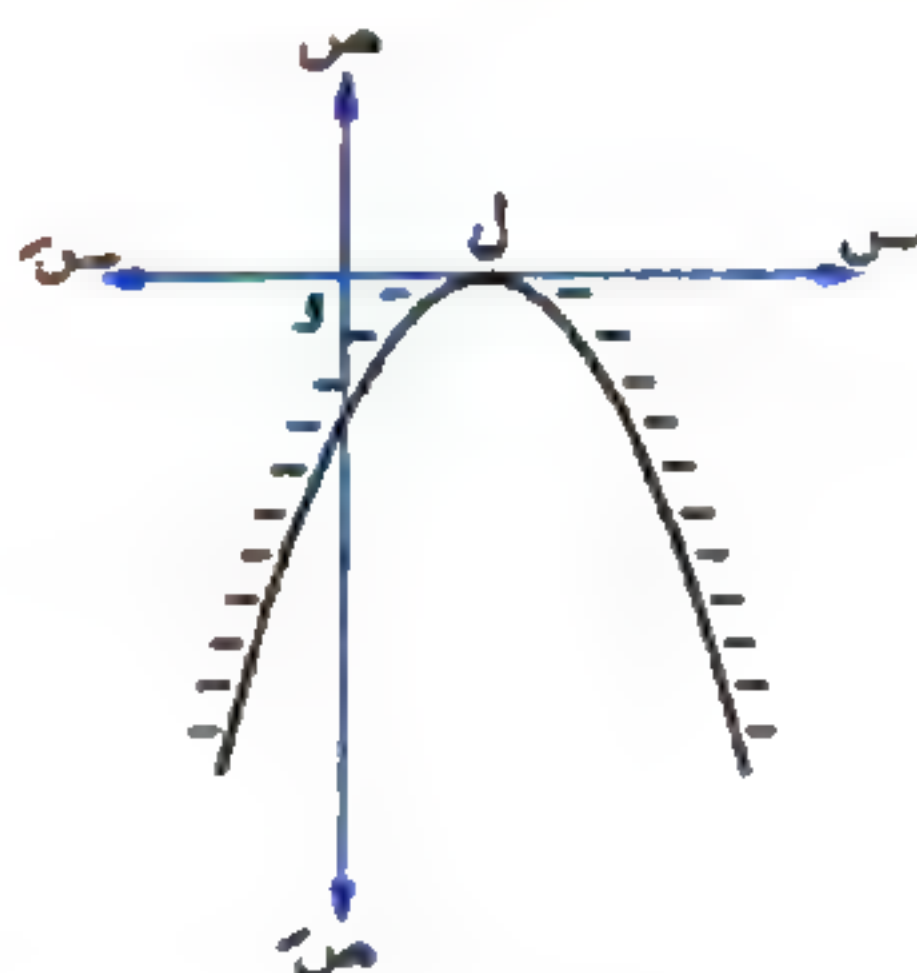
إذا كانت Δ موجبة



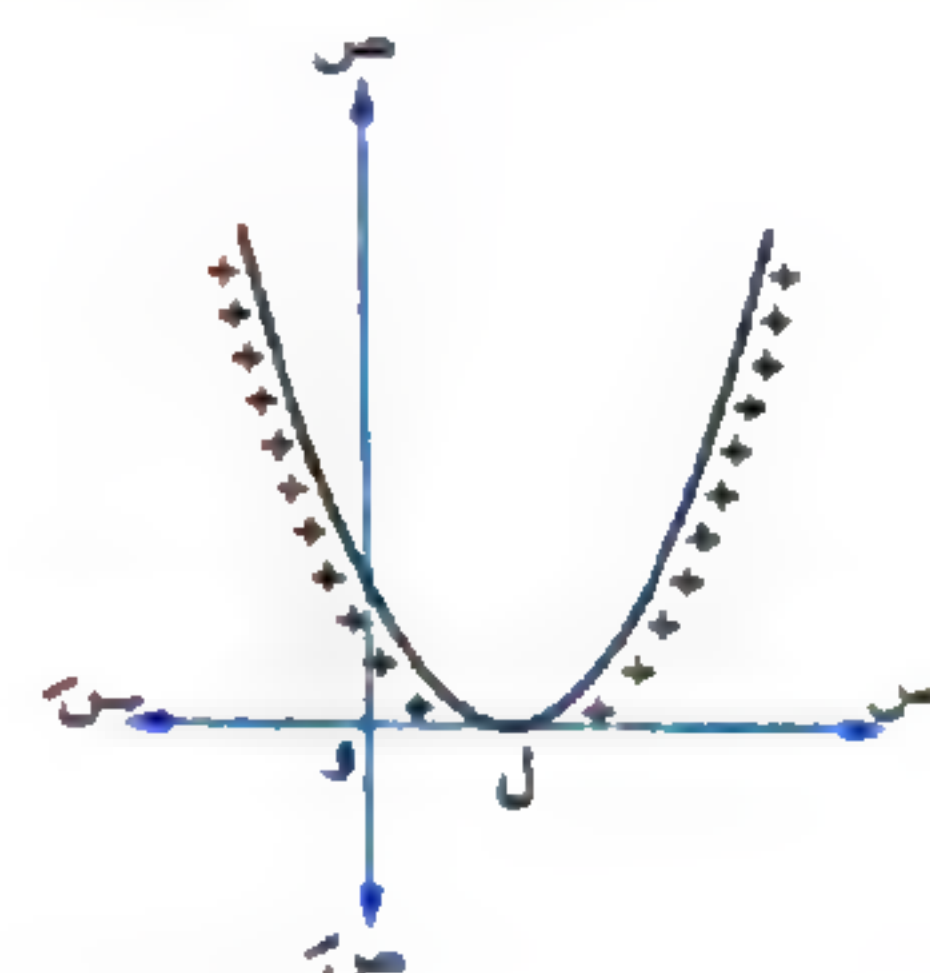
إشارة الدالة مثل إشارة Δ لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$

٢ المميز $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ، وليكن كل منهما يساوي L :

إذا كانت Δ سالبة



إذا كانت Δ موجبة



وتكون إشارة الدالة كما يلي :

• مساوية للصفر عندما $\Delta = 0$ ، $\Delta = 0$

• مثل إشارة Δ عندما $\Delta > 0$ ، $\Delta > 0$

ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :



مثال 2

ارسم منحنى الدالة d : $d(s) = s^2 - 5s + 6$ في الفترة $[0, 5]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة d في \mathbb{R} .

الحل

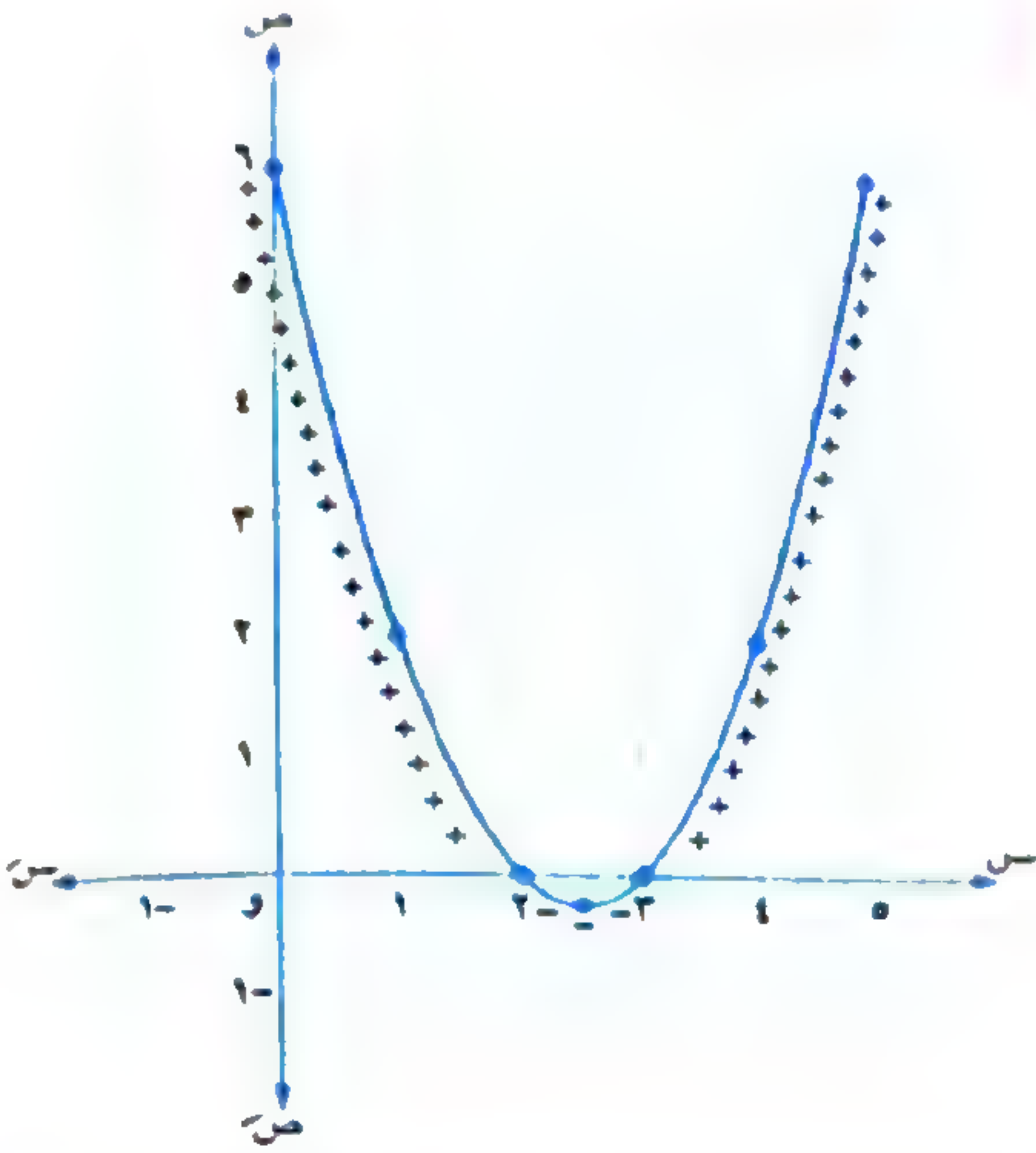
s	0	1	2	2.5	3	4	5
$d(s)$	6	2	0	-0.25	0	2	6

ومن الرسم نلاحظ أن إشارة d تكون :

• موجبة عندما $s \in]2, 3[$

• سالبة عندما $s \in]3, 2[$

• $d(s) = 0$ عندما $s \in \{2, 3\}$



ملاحظة

إذا طلب بحث إشارة الدالة في الفترة المعطاة فإن إشارة d تكون :

• موجبة عندما $s \in [0, 2] \cup]3, 5]$ ، $d(s) \geq 0$

• سالبة عندما $s \in]2, 3[$

• $d(s) = 0$ عندما $s \in \{2, 3\}$

تذكر أن :

• في المثال السابق :

• مجال الدالة d هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R}

• مدى الدالة d هو $[-0.25, \infty)$

• نقطة رأس المنحنى هي $(2.5, -0.25)$ وتكون للدالة عندها قيمة صغرى وهي -0.25 .

• معادلة محور تماثل المنحنى هي : $s = 2.5$

مثال 3

ارسم منحنى الدالة d : $d(s) = s^2 - 4s + 4$ في الفترة $[0, 4]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة d في \mathbb{R} .

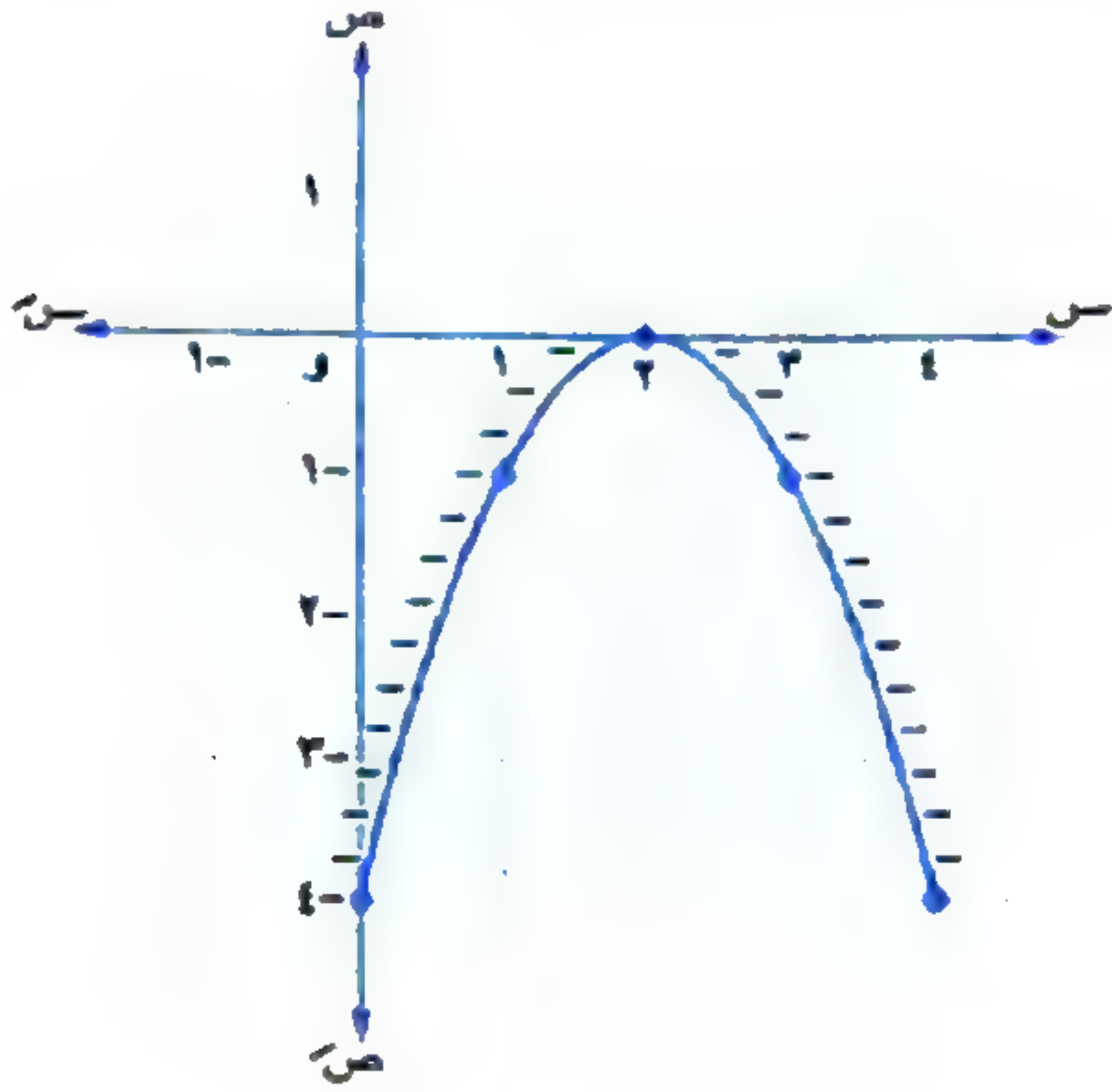
الحل

s	0	1	2	3	4
$d(s)$	4	1	0	1	4

ومن الرسم نلاحظ أن :

• د (س) = 0 عندما س = 2

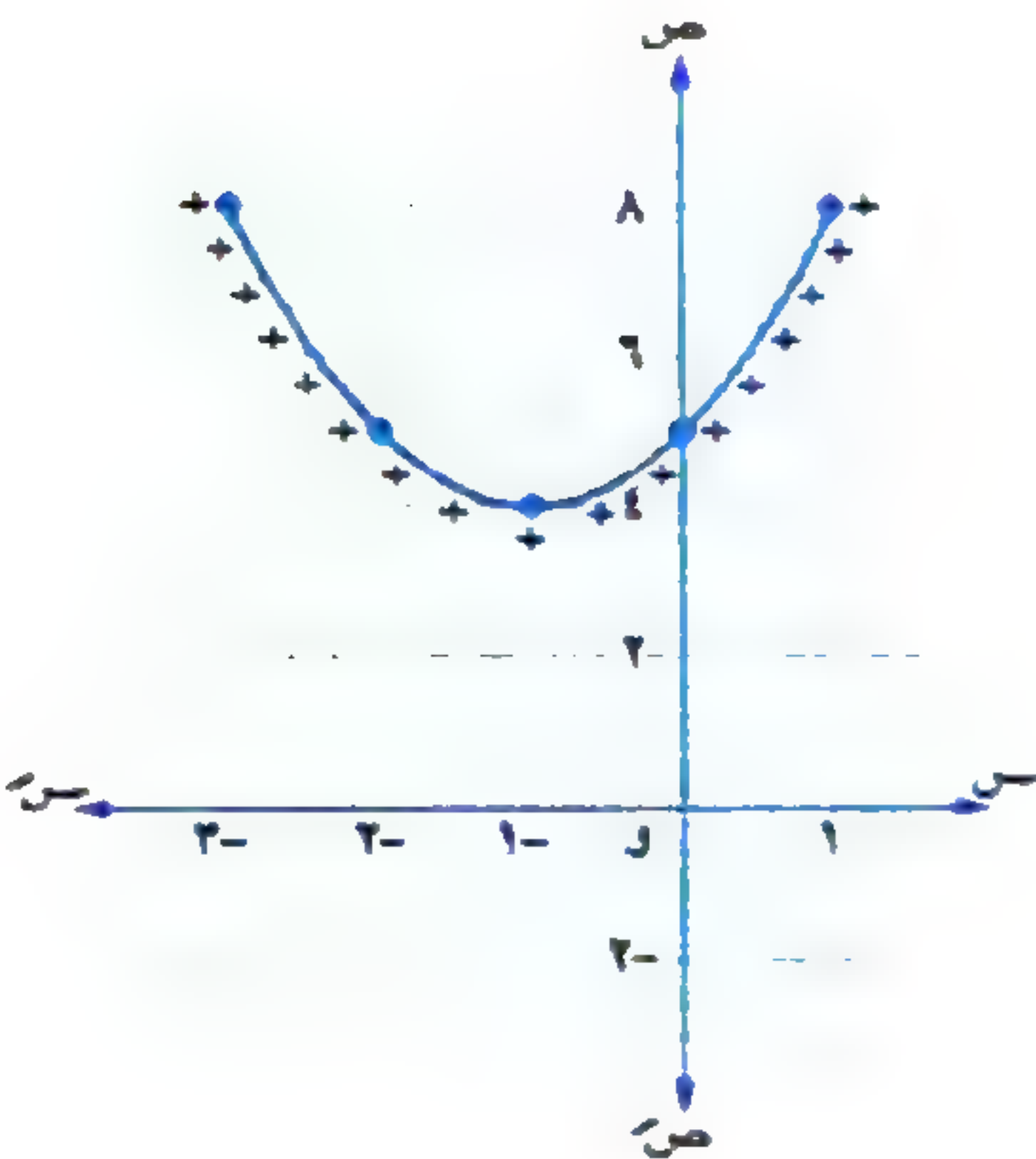
• إشارة الدالة د سالبة عندما س \in ح - {2}



مثال 4

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س² + 2س + 5 في الفترة [-3 ، 1] ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د في ح

الحل



س	-3	-2	-1	0	1
د (س)	8	5	4	5	8

ومن الرسم نلاحظ أن :

إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم س \in ح

حاول بنفسك

رسم منحنى الدالة د : د (س) = س² - 2س - 2 في الفترة [-2 ، 4]

ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د في ح

مثال 5

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

2 : د : د (س) = س² - 2س + 5

4 : د : د (س) = 9 + 2س - س²

1 : د : د (س) = س² + 2س - 3

3 : د : د (س) = 4س² - 12س + 9

الفصل

المميز = ٢ - ١٤ ح - ٤ - ٤ × ١ × (٣٠) + ٤ + ١٢ + ١٦ (٥ صفر)

∴ المعادلة : $x^2 + 2x - 2 = 0$. لها جذران .

۱۲۰۰ س. ۱۲۰۰ س.

وبالتحليل $\therefore (s + 2)(s - 1)$.

∴ ۱ (معامل سے 2) = ۱ < .

∴ إشارة الدالة تكون :



• موجبة عندما $\exists \epsilon - |1, 2|$

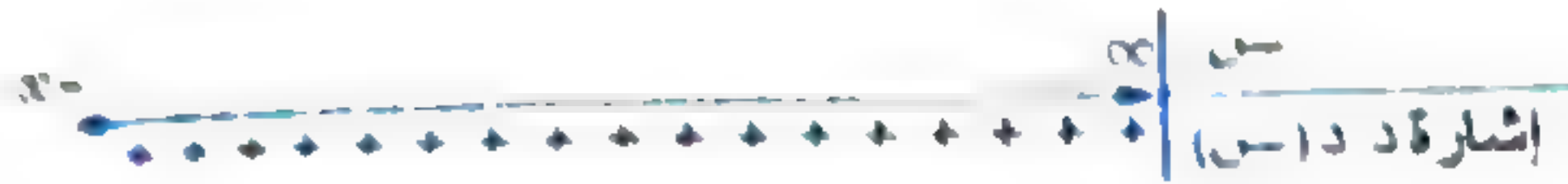
• سالبه عندما $\in [-2, 1)$

• د (س) = ۰ عندما $s \in \{-2, -1\}$

٢: ∴ المميز = $4^2 - 4 \times 1 \times 0 = 16 - 0 = 16 > 0$ (صفر)

∴ المعادلة: $x^2 - 3x + 5 = 0$ ليس لها جذور حقيقية

$\therefore \angle 1 = 90^\circ$



∴ إشارة الدالة د موجبة لكل $s \in \mathbb{C}$

٢. ∴ المميز = $4^2 - 4 \times 4 \times 4 = 16 - 64 = -48$.

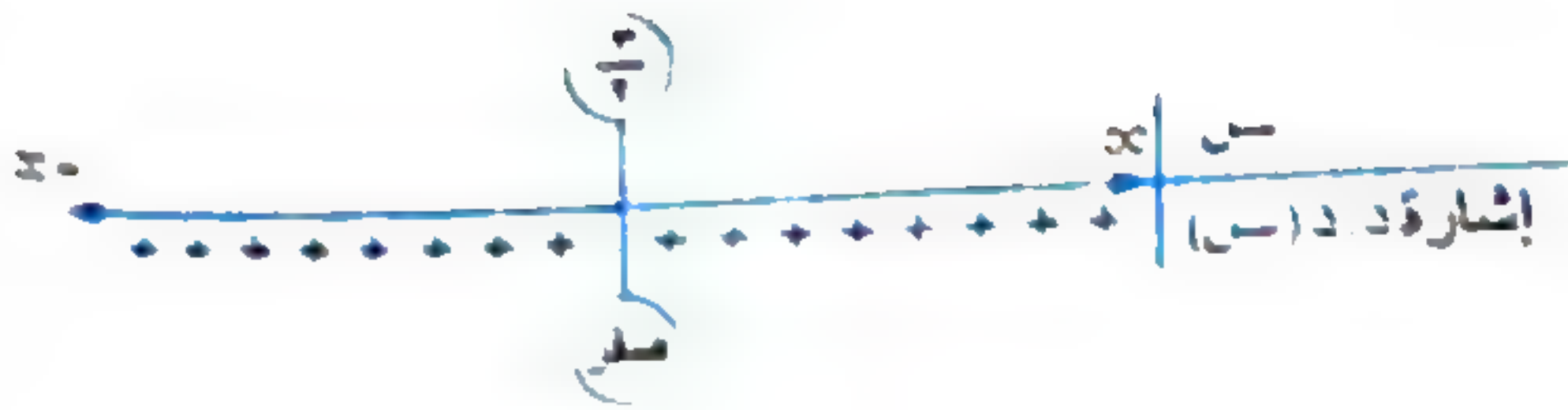
∴ المعادلة : $4x^2 - 12x + 9 = 0$ لها جذران متساويان.

وبالتحليل $\therefore (2 - 3) = 2$.

$$\frac{1}{2} = 5 \therefore$$

$\therefore \angle E = 90^\circ$

∴ إشارة الدالة د تكون :



• موجبة عندما $s \in \mathcal{C} - \{\frac{1}{2}\}$

• د (س) = ۰ عندما $s = \frac{2}{2}$

٤: ∴ المميز = $2 - 4 - 4 = -6$ \Rightarrow $\Delta = 9 \times (-1) \times 4 = -36$ (< 0 صفر)

∴ المعادلة : $9 + 2s - s^2 = 0$ لها جذران وباستخدام القانون العام :

$$\sqrt{1 \pm 1} = \frac{\sqrt{1 \pm 2 - 1}}{1 - 1} = \frac{\sqrt{1 \pm 2 - 1}}{1 - 1} = \text{س} \therefore$$

$$\therefore 1 - \rho = (\text{معامل سر})^2$$



∴ إشارة الدالة د تكون :

- سالبة عندما $s \in]-\infty, -1[\cup]1, \sqrt{2} + 1[$ موجبة عندما $s \in]\sqrt{2} + 1, \infty[$
- د (س) = 0 عندما $s \in \{-1, \sqrt{2} + 1\}$

حاول بنفسك

عَيِّن إشارة كل من الدوال الآتية :

- د : د (س) = $s^2 - s - 6$
- د : د (س) = $s^2 - 4s + 4$

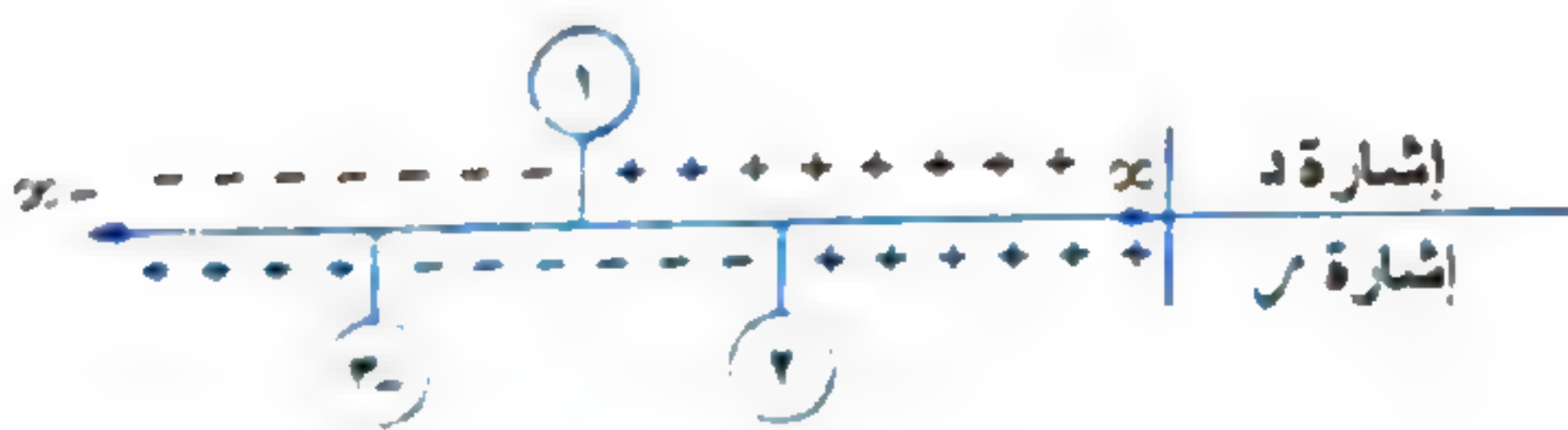
مثال 6

إذا كانت د : د (س) = $s - 1$ ، م : م (س) = $s^2 + s - 6$ ،
فأوجد الفترة التي تكون فيها د ، م موجبتين معاً ، وكذلك الفترة التي تكون فيها د ، م سالبتين معاً.

الحل

- ∴ د (س) = $s - 1$ ، ∴ د (س) = 0 عندما $s = 1$
- د تكون موجبة عندما $s < 1$ أي في الفترة $]-\infty, 1[$ ،
د تكون سالبة عندما $s > 1$ أي في الفترة $]1, \infty[$ ،
- ∴ م (س) = $s^2 + s - 6$ نوجد جذري المعادلة : $s^2 + s - 6 = 0$ كما يلي :
- ∴ $s = 2$ ، $s = -3$ ، ∴ م (س) = 0 عندما $s \in \{-3, 2\}$
- م تكون موجبة عندما $s \in]-\infty, -3[\cup]2, \infty[$ ، م تكون سالبة عندما $s \in]-3, 2[$

بملاحظة الشكل المقابل نجد أن :



- د ، م موجبتان معاً في الفترة $]2, \infty[$ وهي الفترة التي تعبر عن : $]2, \infty[\cap]-\infty, 1[$
- د ، م سالبتان معاً في الفترة $]1, -3[$ وهي الفترة التي تعبر عن : $]1, -3[\cap]-3, 2[$

حاول بنفسك

عَيِّن إشارة كل من الدالتين د₁ : د₁ (س) = $s - 2$ ، د₂ : د₂ (س) = $s^2 - 9s + 18$ ومتى تكون إشارتهما سالبتين معاً ؟

مثال 7

أثبت أنه لجميع قيم $s \in]-\infty, \infty[$ يكون جذرا المعادلة : $s^2 + 2s + k = 0$ حقيقيين مختلفين.

$$\therefore 1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 3$$

$$\therefore 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4$$

$$\therefore \text{المميز} = 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0 = (2 - 2) \times 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبا

ولذلك سنبحث إشارة الدالة $d(x) = 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$ كما يلي :

$$\therefore \text{المميز} = 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0 = (2 - 2) \times 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

\therefore المعادلة : $4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية.

\therefore إشارة الدالة d موجبة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ ، $\therefore 1 < 2$ ،

وبالتالى فإن مميز المعادلة : $2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4$ موجب لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$

\therefore جذرا المعادلة : $2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4$ حقيقيان مختلفان لكل $x \in \mathbb{R}$

حل آخر:

\therefore مميز المعادلة : $2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4$ هو : $4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

$$\therefore 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0 = (2 - 2) \times 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

$$= (2 - 2) \times 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

\therefore جذرا المعادلة : $2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 2 = 4$ حقيقيان مختلفان لكل $x \in \mathbb{R}$

استخدام التكنولوجيا

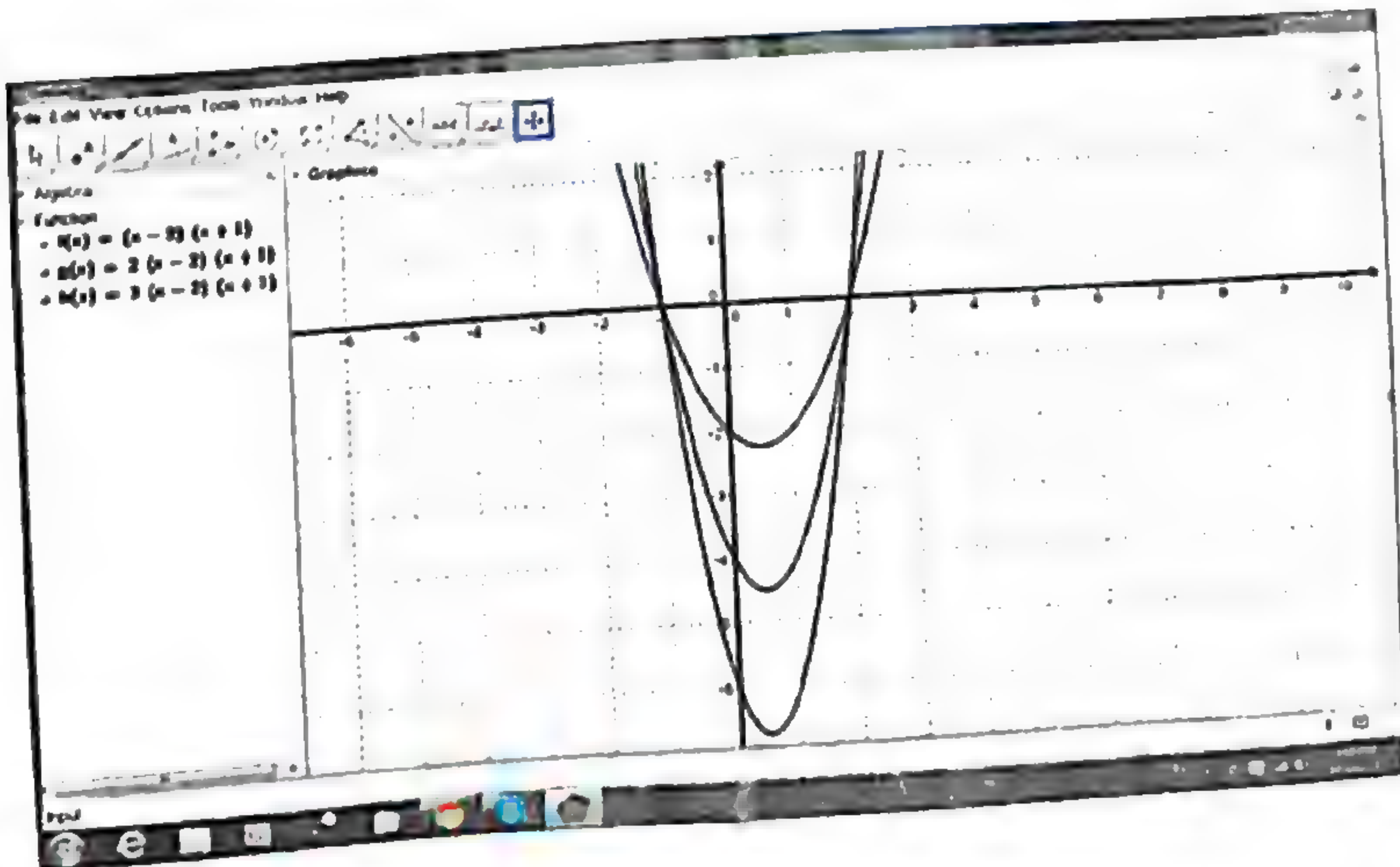
باستخدام برنامج Geogebra ارسم فى شكل واحد الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

$$1 \quad d(x) = (x - 2)(x + 1)$$

$$2 \quad f(x) = 2(x - 2)(x + 1)$$

$$3 \quad g(x) = 3(x - 2)(x + 1)$$

سوف تحصل على الشكل التالى :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأعلى ويقطع كل منها محور السينات في النقطتين $(0, 2)$ ، $(-1, 0)$ ، وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هي $\{2, -1\}$ ، حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

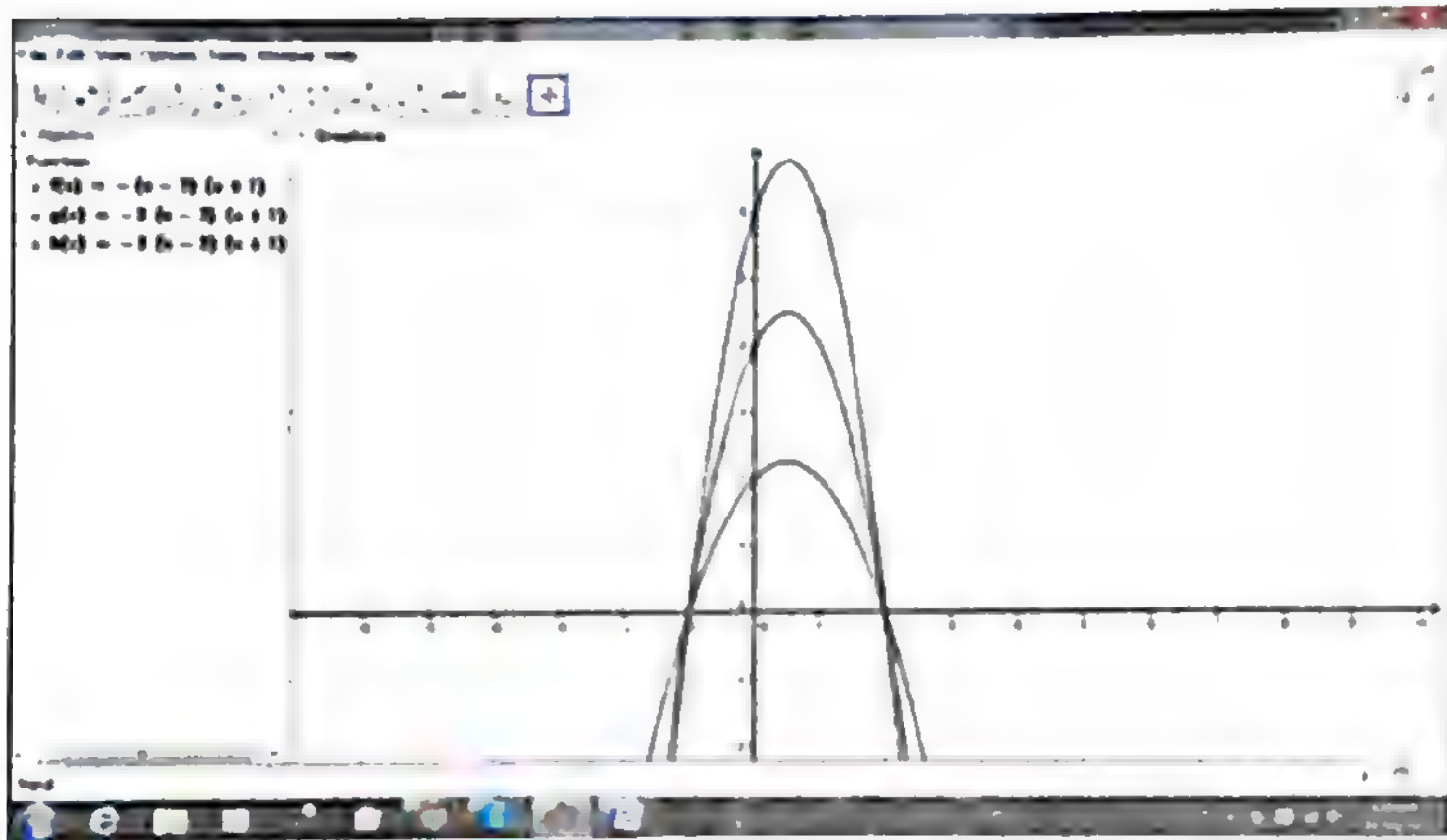
أيضا باستخدام نفس البرنامج ارسم في شكل واحد الدوال المعروفة بالقواعد الآتية :

$$١ \text{ د } (س) = - (س - ٢) (س + ١)$$

$$٢ \text{ م } (س) = ٢ - (س - ٢) (س + ١)$$

$$٣ \text{ ل } (س) = ٣ - (س - ٢) (س + ١)$$

سوف تحصل على الشكل التالي :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأسفل ويقطع كل منها محور السينات في نفس النقطتين السابقتين $(0, 2)$ ، $(-1, 0)$ ، وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هي نفس مجموعة الحل السابقة $\{2, -1\}$ ، حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

• حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

• استنتاج :

• إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية فإنه يمكن كتابة قاعدة الدالة المرتبطة بالمعادلة التربيعية على الصورة :

$$\text{د } (س) = ١ - (س - ل) (س - م) \text{ حيث } ١ \in \mathbb{C} - \{0\}$$

• ويكون : • المنحنى مفتوحاً لأعلى إذا كانت : $١ < ٠$.

• المنحنى مفتوحاً لأسفل إذا كانت : $١ > ٠$.

١ ابحث إشارة كل من الدوال التي تتعين بالقواعد الآتية :

(١) د (س) $1 - =$	(٢) د (س) $2 =$
(٣) د (س) $2 =$	(٤) د (س) $3 - =$
(٥) د (س) $7 - 5 =$	(٦) د (س) $3 - \frac{1}{4} =$

٢ عيّن إشارة كل من الدوال المعروفة بالقواعد الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) $(2 - س) (2 + س) =$	(٢) د (س) $2(3 - س) =$
(٣) د (س) $7 - 5 + 2 =$	(٤) د (س) $3 + 4 - 2 =$
(٥) د (س) $16 + 8 - 2 =$	(٦) د (س) $5 + 3 - 2 =$
(٧) د (س) $4 - 7 - 2 =$	(٨) د (س) $9 - 4 =$
(٩) د (س) $2 =$	

٣ ارسم منحنى الدالة د : د (س) $2 - 8 =$ في الفترة $[-2, 2]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة في ح

٤ ارسم منحنى الدالة د : د (س) $2 - 3 + 4 =$ في الفترة $[-1, \frac{1}{4}]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة في ح

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) $15 - 8 + 2 =$ متخذًا الفترة $[1, 7]$ ومن الرسم بيّن إشارة الدالة د في ح وكذلك مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ .

٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) $9 - 2 =$ في الفترة $[-2, 4]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة في هذه الفترة.

٧ ارسم منحنى الدالة د : د (س) $4 + 2 + 2 =$ في الفترة $[-3, 5]$ ومن الرسم عيّن إشارة الدالة في هذه الفترة.

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة $d : d = (s)$ تكون سالبة في الفترة

- (أ) $]-4, \infty[$ (ب) $]-4, 4[$ (ج) $]-\infty, \infty[$ (د) $]-2, 2[$

(٢) الدالة $d : d = (s)$ تكون موجبة عندما

- (أ) $s < \frac{2}{5}$ (ب) $s > \frac{2}{5}$ (ج) $s < \frac{5}{4}$ (د) $s > \frac{5}{4}$

(٣) إذا كانت $d : d = (s)$ حيث $2 + s = 0$ فإن d تكون موجبة عندما $s \in \dots\dots\dots$

- (أ) $]-2, \infty[$ (ب) $]-2, \infty[$ (ج) $]-4, 2[$ (د) $]-2, 2[$

(٤) الدالة $d : d = (s)$ لها إشارة دائماً.

- (أ) موجبة (ب) سالبة (ج) s (د) 1

(٥) إذا كانت $d : d = (s)$ فإن إشارة الدالة تكون سالبة في الفترة

- (أ) $]-2, \infty[$ (ب) $]-2, \infty[$ (ج) $]-\infty, 0[$ (د) $]-\infty, 2[$

(٦) الدالة $d : d = (s)$ سالبة لكل $s \in \dots\dots\dots$

- (أ) $]-2, 2[$ (ب) $]-2, 2[$ (ج) $]-\infty, 9[$ (د) $]-2, \infty[$

(٧) الدالة $d : d = (s)$ تكون موجبة لكل $s \in \dots\dots\dots$

- (أ) $]-\infty, 0[$ (ب) $]-\infty, 1[$ (ج) $]-1, \infty[$ (د) $]-\infty, 1[$

(٨) الدالة $d : d = (s)$ تكون موجبة في الفترة

- (أ) $]-\infty, 0[$ (ب) $]-2, \infty[$ (ج) $]-2, \infty[$ (د) $]-\infty, 0[$

(٩) الدالة $d : d = (s)$ يكون لها إشارة واحدة في s عندما

- (أ) $s < -4$ (ب) $s < -4$ (ج) $s < -4$ (د) $s < -4$

(١٠) إذا كانت الدالة $d : d = (s)$ حيث $2 + s = 0$ وكانت $0 > 1$ وجزراً $d = (s)$ هما $2, -5$ فإن الدالة d تكون موجبة في الفترة

- (أ) $]-5, 2[$ (ب) $]-5, 2[$ (ج) $]-5, 2[$ (د) $]-5, \infty[$

(١١) لبحث إشارة الدالة d يكون كافياً إذا علم أن

(أ) منحنى الدالة d يوازي محور السينات فقط.

(ب) منحنى الدالة d يقع بأكمله تحت محور السينات فقط.

(ج) (أ)، (ب) معاً.

(د) لا شيء مما سبق.

(١٢) إذا كانت : د (س) = ٢س + ١ وكان : س = ل جذرًا للمعادلة د (س) = ٠

فإن : د (ل + ١) × د (ل - ١) ∃

(د) [٥ ، ٥-]

(ج) [١ ، ١-]

(ب) ع

(أ) ع

(١٣) أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∃ ع ؟

(ب) د : د (س) = ٣

(أ) د : د (س) = ٤ + ٢س

(د) كل ما سبق.

(ج) د : د (س) = ٩ + ٢(١ - س)

(١٤) الدالة د : د (س) = ١٢ + س - ٢س تكون غير سالبة فى الفترة

(د)]∞ ، ∞ -[

(ج) ع - [٢ ، ٦]

(ب) [٢ ، ٦]

(أ) [٢ ، ٦]

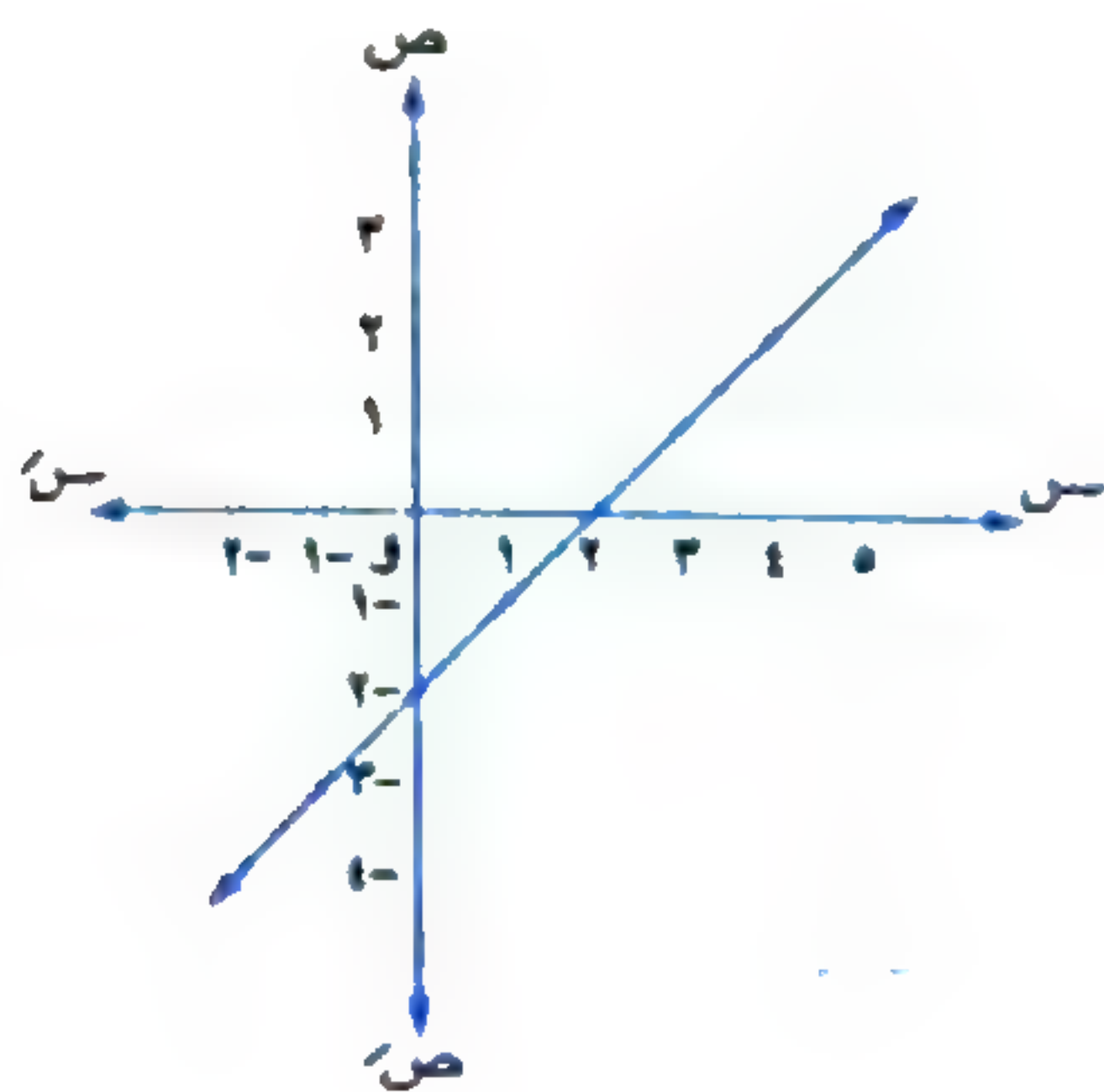
(١٥) الدالة د حيث د (س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة

(د)]∞ ، ∞ -[

(ج) [٢ ، ١]

(ب) [١ ، ٢]

(أ) [١ ، ٢]



(١٦) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الأولى فى س :

أولاً : د موجبة فى الفترة

(ب) [١ ، ∞]

(أ) [٢ ، ∞]

(د) [٢ ، ∞]

(ج) [٢ ، ∞ -[

ثانياً : د سالبة فى الفترة

(د) [٢ ، ∞]

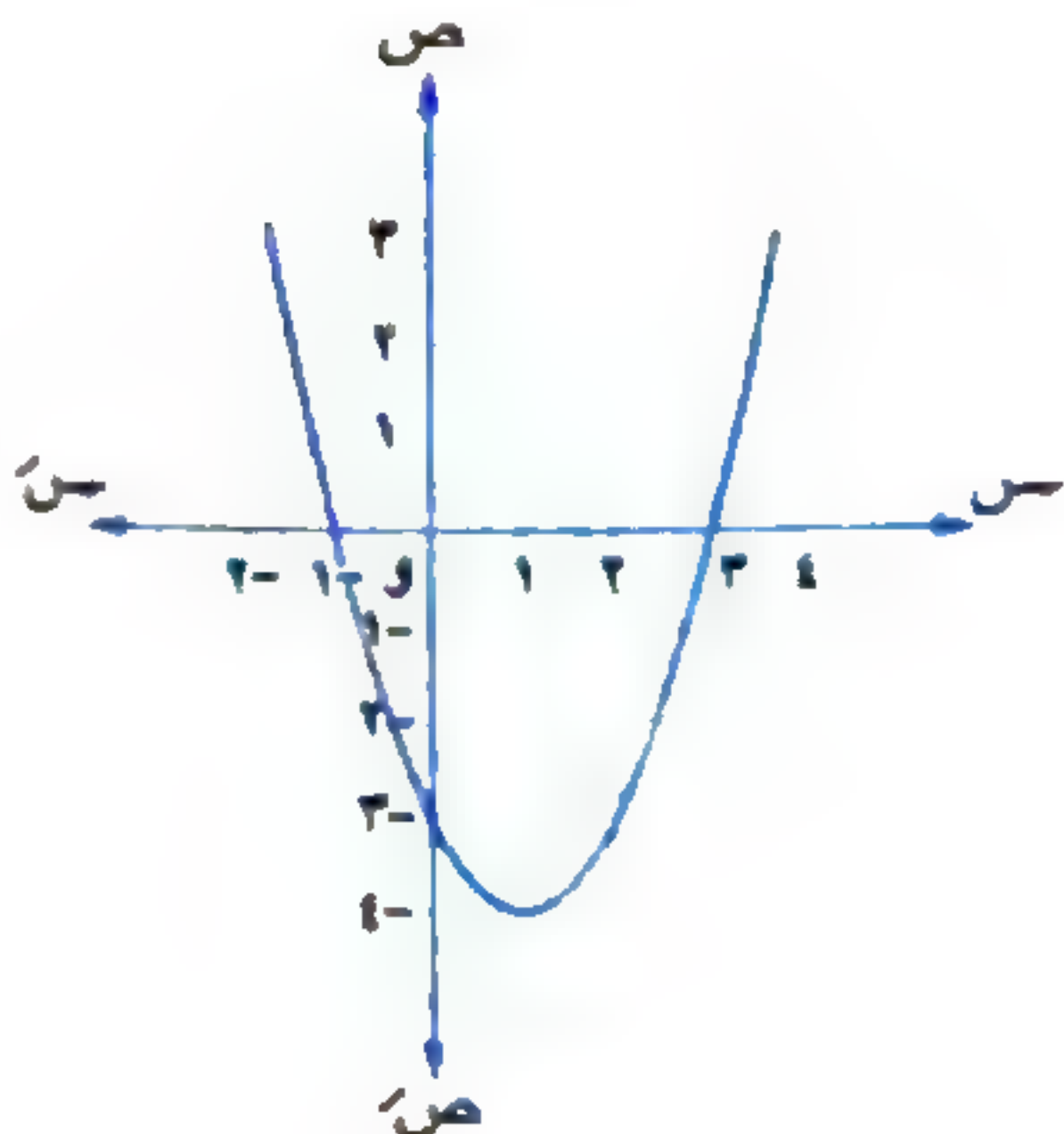
(ج) [٢ ، ∞ -[

(ب) [٢ ، ٢-]

(أ) [٢ ، ∞ -[

(١٧) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الثانية فى س :

أولاً : د (س) = ٠ عندما س ∃



(ب) ط

(أ) ع

(د) {١- ، ٢}

(ج) [٢ ، ١-]

ثانياً : د (س) < ٠ عندما س ∃

(د) ع

(ج) ع - [٢ ، ١-]

(ب) [٢ ، ١-]

(أ) [٢ ، ١-]

ثالثاً : د (س) > ٠ عندما س ∃

(د) ع

(ج) ع - [٢ ، ١-]

(ب) [٢ ، ١-]

(أ) [٢ ، ١-]

٩ ابحث إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د : $[-1, 6]$ ← ح حيث د (س) = $3 - س$

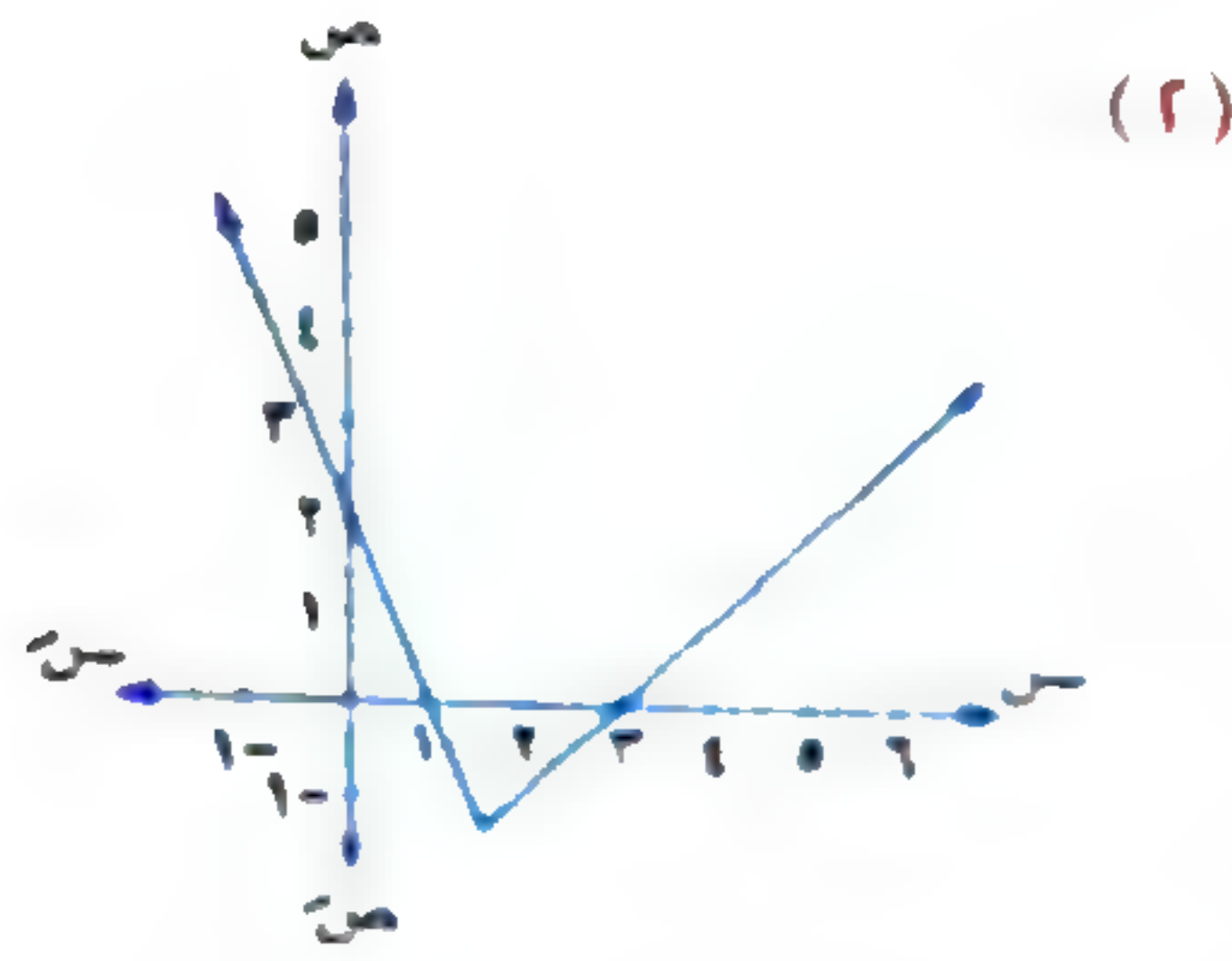
(٢) د : $[-2, 8]$ ← ح حيث د (س) = $5 - س^2 - 6$

١٠ ابحث إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

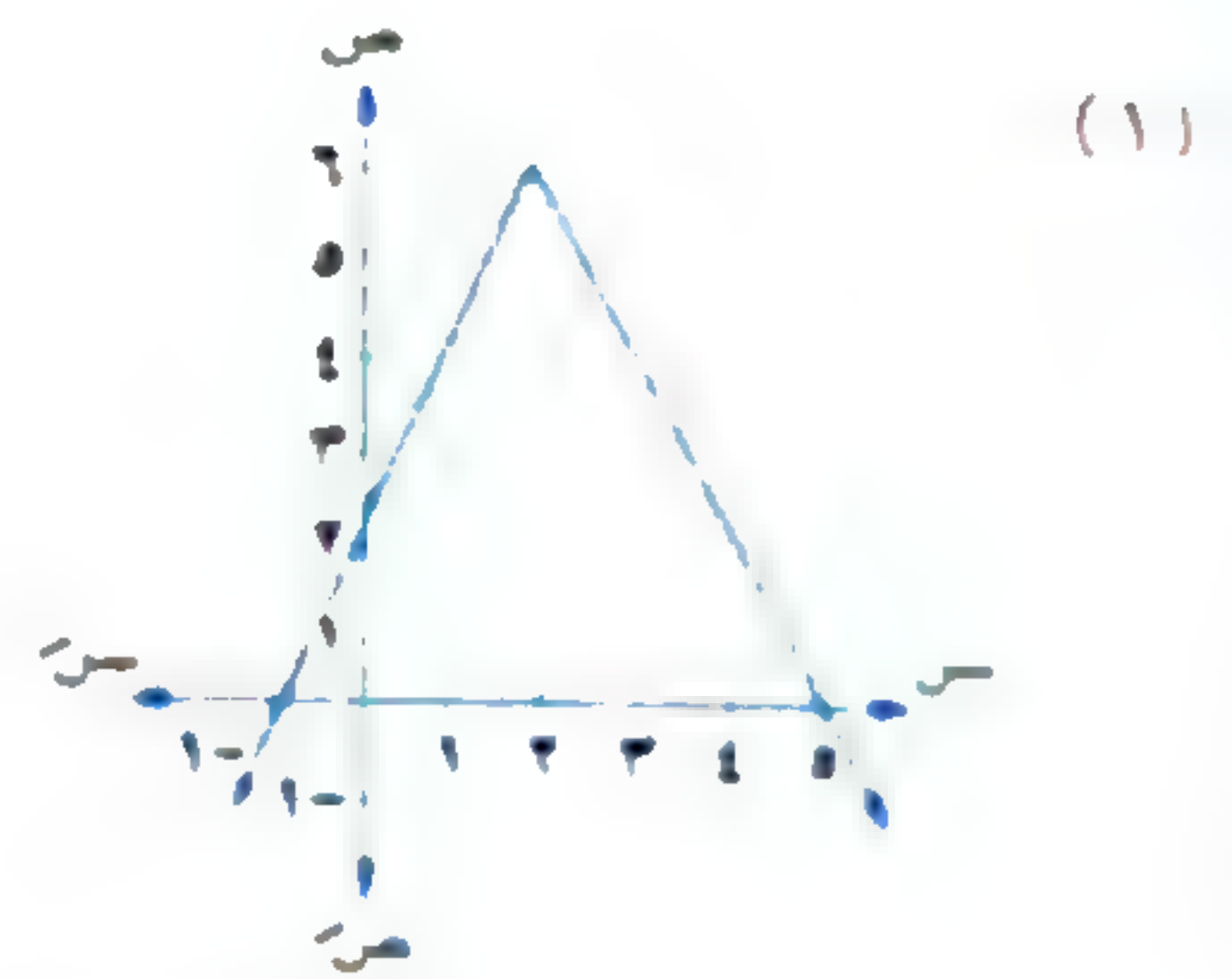
(١) د (س) = $\left. \begin{array}{l} س + 1 \text{ عندما } س \leq 1 \\ -س - 1 \text{ عندما } س > 1 \end{array} \right\}$

(٢) د (س) = $\left. \begin{array}{l} 2س + 6 \text{ عندما } س \leq 2 \\ 2 - س - 6 \text{ عندما } س > 2 \end{array} \right\}$

١١ ابحث إشارة كل من الدالتين الممثلتين في الشكلين التاليين :



(٢)



(١)

١٢ عيّن إشارة كل من الدالتين د : د (س) = $3 - س$ ، د (س) = $5 - س^2 - 6$

ومتى تكون إشارتهما موجبتين معاً ؟

١٣ إذا كانت : د (س) = $3 - س$ ، د (س) = $5 + س - س^2$ ابحث إشارة كل من :

د ، د على خط الأعداد وعيّن الفترة التي تكون فيها الدالتان سالبتين معاً.

١٤ إذا كانت : د (س) = $5 - س + 6$ ، د (س) = $2س^2 - 5س - 18$

فبيّن متى تكون الدالتان د ، د موجبتين معاً أو سالبتين معاً.

١٥ أثبت أنه لجميع قيم لـ $ل$ $ل \in \mathbb{R}$ يكون جذرا المعادلة :

$2س^2 - ل - س + ل = 3 = \text{صفر حقيقيين مختلفين.}$

أكتشف الخطأ

١٦ إذا كانت : د (س) = س + ١ ، م (س) = س - ١ - س^٢

فعرين الفترة التي تكون فيها الدالتان موجبتين معاً.

إجابة يوسف

$$س = ١ - \text{تجعل د (س) = ٠}$$

$$د (س) \text{ موجبة في الفترة }]١ - \infty , \infty[$$

$$س = ١ \pm \text{تجعل م (س) = ٠}$$

$$م (س) \text{ موجبة في الفترة }]١ - ١ , ١[$$

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معاً في الفترة

$$]١ - \infty , \infty[\cup]١ - ١ , ١[=]١ - \infty , ١[$$

إجابة أميرة

$$س = ١ - \text{تجعل د (س) = ٠}$$

$$د (س) \text{ موجبة في الفترة }]١ - \infty , \infty[$$

$$س = ١ \pm \text{تجعل م (س) = ٠}$$

$$م (س) \text{ موجبة في الفترة }]١ - ١ , ١[$$

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معاً في الفترة

$$]١ - \infty , \infty[\cap]١ - ١ , ١[=]١ - ١ , ١[$$

أي الإجابتين تكون صحيحة ؟ مثل كلاً من الدالتين بياناً وتأكد من صحة الإجابة.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٧ ادرس إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

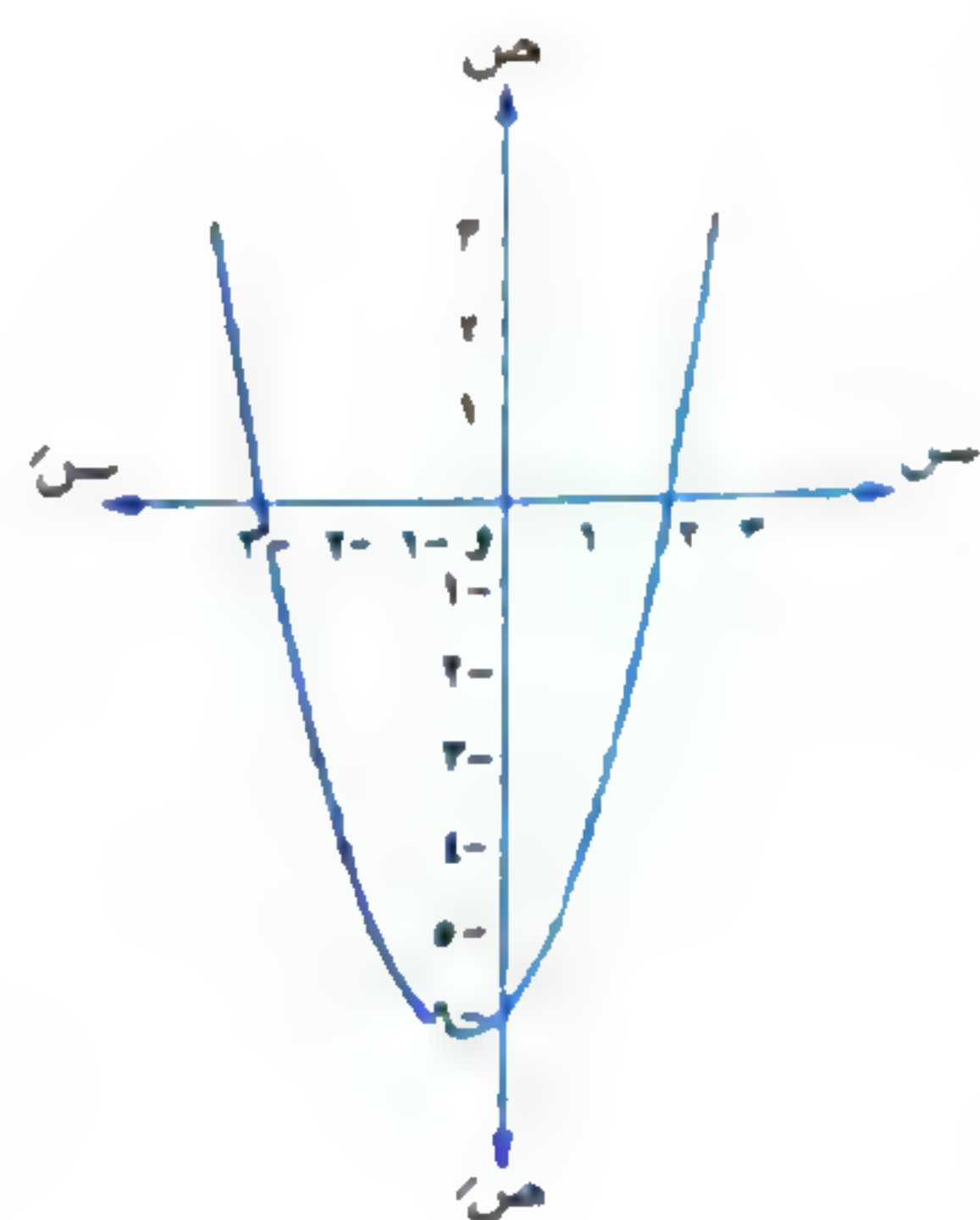
$$(١) د : د (س) = ٢ - س - ٢\sqrt{٢} - س - ١$$

$$(٢) د : د (س) = س + (س + ١) (٢ + س - ٣) - ٤ (س + ١) + ١$$

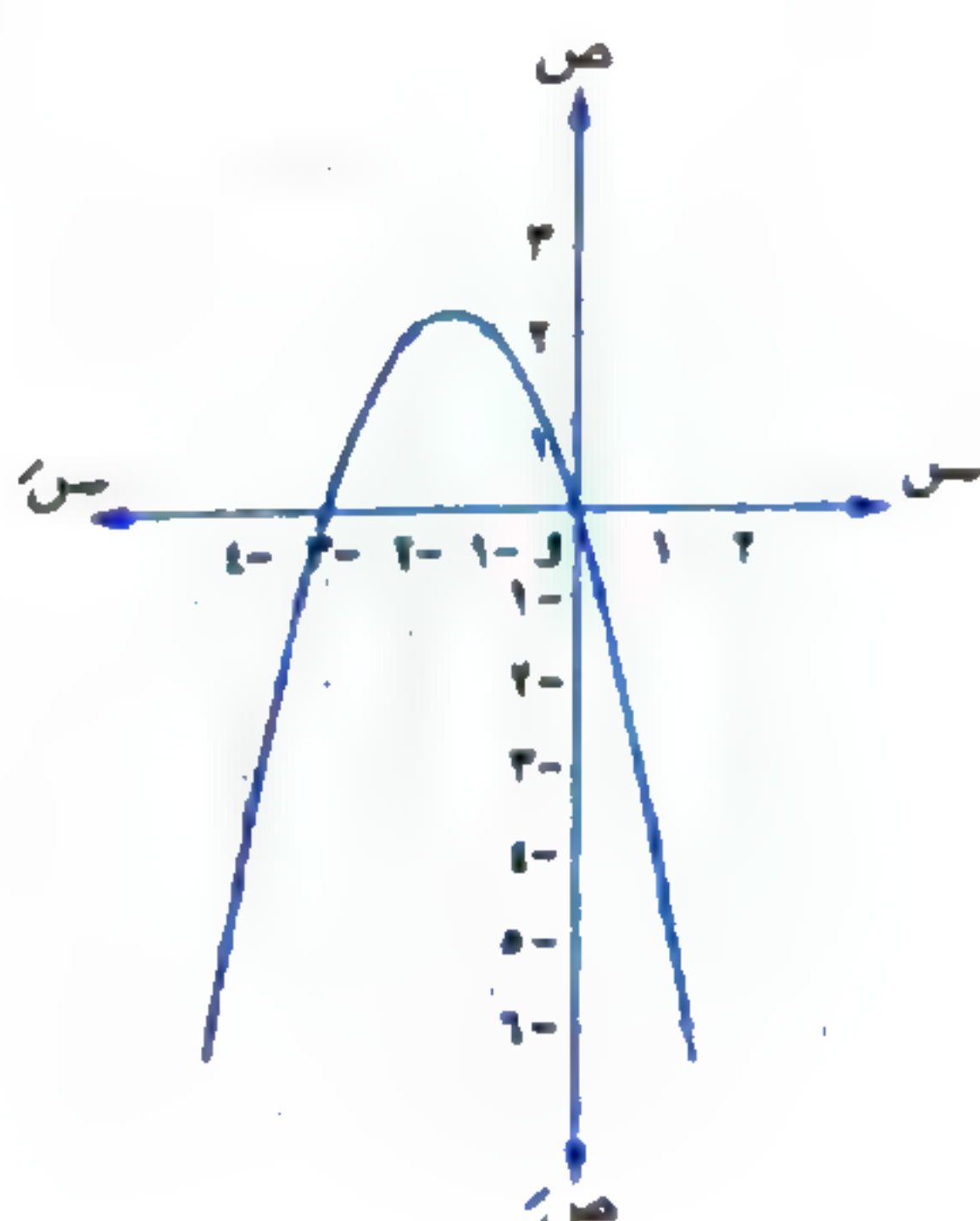
١٨ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

ادرس إشارة كل دالة في ح ، ثم أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال :

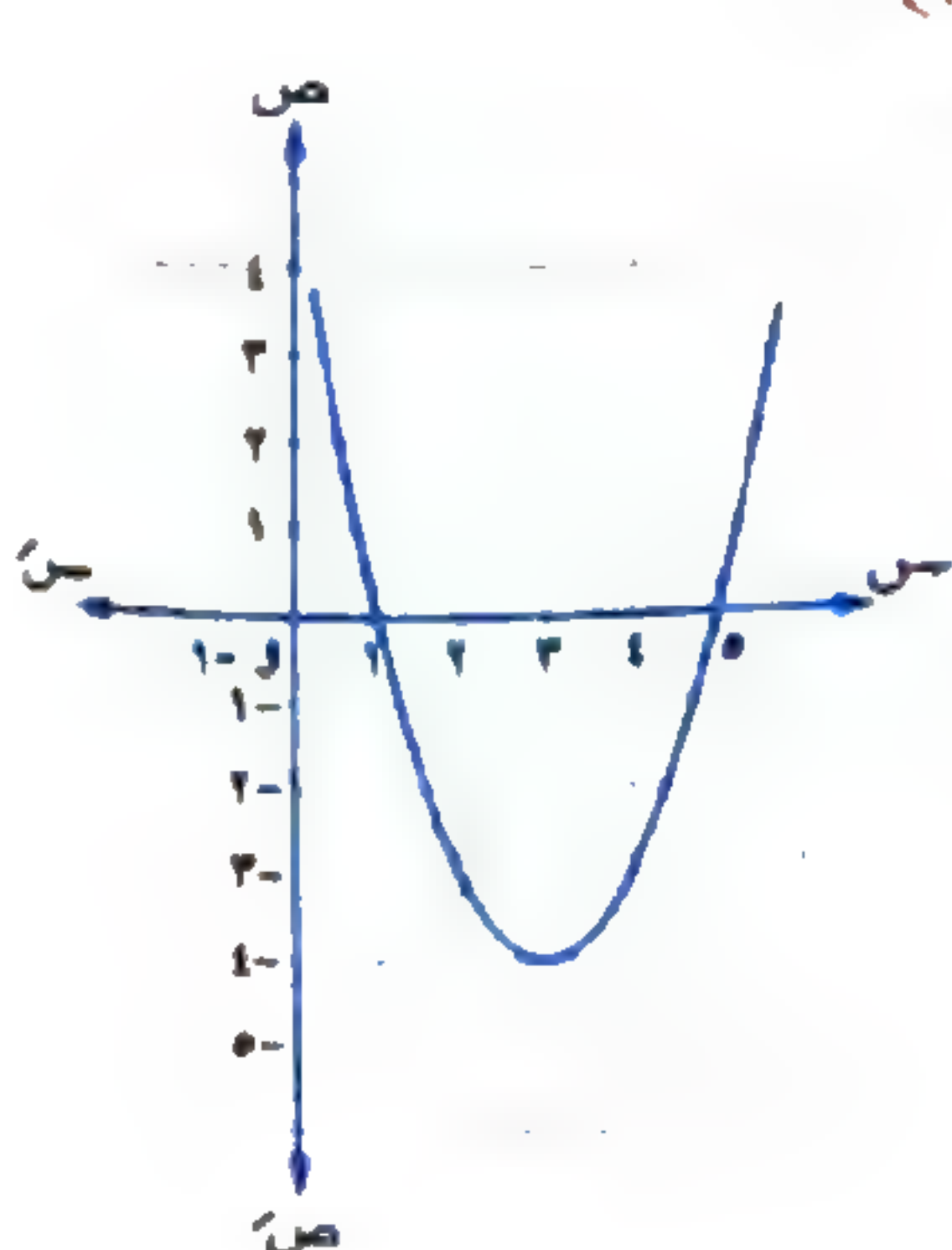
(١)



(٢)



(٣)





6

متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمهيد ..

سبق أن درسنا في المرحلة الإعدادية متباينات الدرجة الأولى في مجهول واحد مثل :

$$س + ٣ < ٥ ، ٤ - ٢ \leq س ، ٧ (س - ١) \leq ٩ - س - ٦$$

وعلمنا أن حل المتباينة يعنى إيجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة وعند حل هذه المتباينات في ح وجدنا أن مجموعة الحل تُكتب على صورة فترة

فمثلاً عند حل المتباينة $٢ - س + ٦ < ١٠$ في ح نجد أن :

$٢ - س < ٤$ ومنها $س > ٢ -$ «لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب»

وتكون مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية التي كل منها أقل من $٢ -$



أي أن مجموعة الحل = $[-٢ ، \infty)$

وفي هذا الدرس سوف نتعلم كيفية حل متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد (المتباينات التربيعية) في ح مثل المتباينات :

$$س^٢ - ٥س + ٦ < ٠ ، س^٢ + س - ٢ \leq ٠ ، س (س - ٦) > ٥ -$$

حل المتباينات التربيعية في ح

لحل المتباينة التربيعية في ح نتبع الخطوات التالية :

١. نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة.

٢. ندرس إشارة الدالة التربيعية التي كتبناها.

٣. نحدد الفترات التي تحقق المتباينة.

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المتباينة التربيعية.

مثال ١

أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 5x + 6 < 0$.

الحل

أولاً : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ، كما يلي : $x^2 - 5x + 6 = 0$
ثانياً : ندرس إشارة الدالة $x^2 - 5x + 6$ كما يلي :

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \quad (\Delta > 0)$$

\therefore المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ لها جذران مختلفان

$$\text{وبالتحليل : } \therefore (x - 2)(x - 3) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ ، } x = 3$$



ثالثاً : نحدد الفترات التي تحقق أن : $x^2 - 5x + 6 < 0$ (موجبة) فنجد أن :

$$\text{مجموعة حل المتباينة } =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\text{ ، } x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$$



لاحظ أنه

من الأمثلة السابق مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 5x + 6 > 0$ هي $]2, 3[$

حاول بنفسك

أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

$$1. \quad x^2 - 2x - 8 < 0 \quad 2. \quad x^2 - 2x - 8 > 0$$

مثال ٢

أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل المتباينة : $(x + 5)(1 - x) \leq 0$

الحل

$$\therefore x^2 + 5x \leq 0$$

$$\therefore (x + 5)(1 - x) \leq 0$$

$$\therefore x^2 + 5x - 5 \leq 0$$

أولاً : مكتبت الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة د (س) = س² + ٢س - ١٠

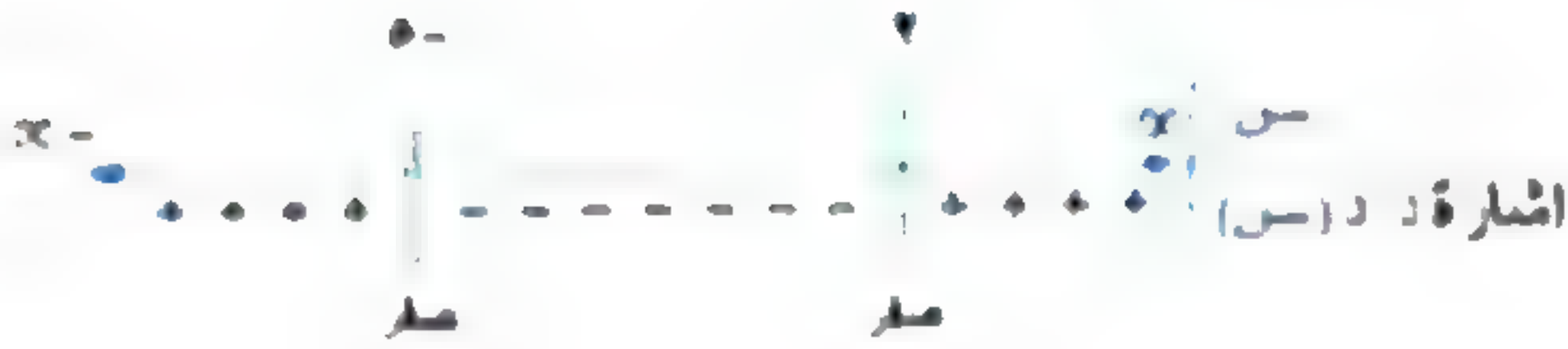
(انها : ندرس إشارة الدالة د كما على

∴ المميز = ٤ - ٤ × ١ × (-١٠) = ٤٠ (> صفر)

∴ المعادلة س² + ٢س - ١٠ = ٠ لها جذران مختلفان وبالتحليل

∴ (س - ٢) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٢ ، س = -٥



ثانياً : نحدد الفترات التي تحقق أن : س² + ٢س - ١٠ ≤ ٠ فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة = [-٥ ، ٢] ∪]٢ ، ٥-]



لاحظ ان

مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س - ٢) ≥ ٠ في س = ٥ هي]٢ ، ٥-]

حاول نفسك

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

$$٢ - س (س + ٦) > ٤س + ١٥$$

$$٢ - س + ٥س ≤ ٢$$

مثال ٣ .

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

$$٢ - س + ٢س + ٤ < ٠$$

$$١ - س - ٣س + ٥ > ٠$$

$$٤ - س - ٦س + ٩ ≥ ٠$$

$$٤ - س - ٤ > ٠$$

الحل

١ بوضع د (س) = س² - ٣س + ٥ وبحث إشارة الدالة د نجد أن

المميز = ٩ - ٤ × ١ × ٥ = -١١ (< صفر)

∴ المعادلة : س² - ٣س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∃ ح

$$١ = ١ < ٠$$

∴ مجموعة حل المتباينة : س² - ٣س + ٥ > ٠ هي ∅

٢ بوضع د (س) = س² + ٢س + ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

$$\Delta = ٤ - ٤ = ٠ = ٤ \times ١ \times ٤ - ٤ = ١٢ - ٤ = ٨ > ٠ \text{ (صفر)}$$

∴ المعادلة : س² + ٢س + ٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

$$\therefore ١ = ٠ < ٠$$

∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة : س² + ٢س + ٤ < ٠ هي ح

٣ بوضع د (س) = ٤س - س² - ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

$$\Delta = ١٦ - ١٦ = ٠ = (٤ - ٤) \times (١ - ٤) = ٠$$

∴ المعادلة : ٤س - س² - ٤ = ٠ لها جذران متساويان.

$$\text{وبالتحليل : } \therefore (٢ - س)^2 = ٠ \therefore س = ٢$$

$$\therefore ١ - ٠ > ٠$$

∴ الدالة سالبة عندما س ∈ ح - {٢}

$$\text{د (س) = ٠ عندما س = ٢}$$

∴ مجموعة حل المتباينة : ٤س - س² - ٤ > ٠ هي ح - {٢}

٤ بوضع د (س) = س² - ٦س + ٩ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

$$\Delta = ٣٦ - ٣٦ = ٠ = ٩ \times ١ \times ٤ - ٣٦ = ٠$$

∴ المعادلة : س² - ٦س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

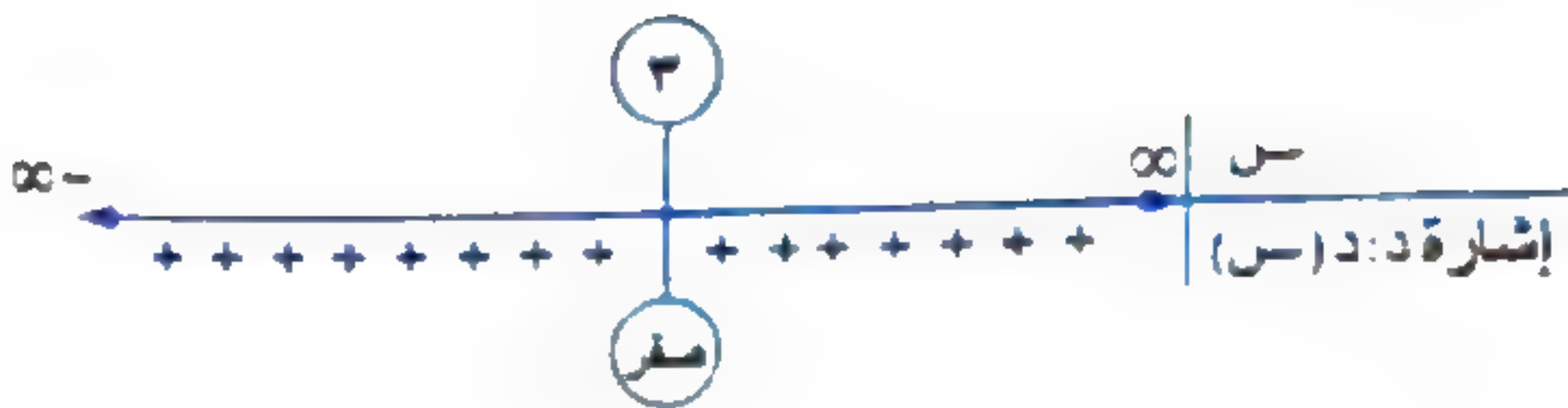
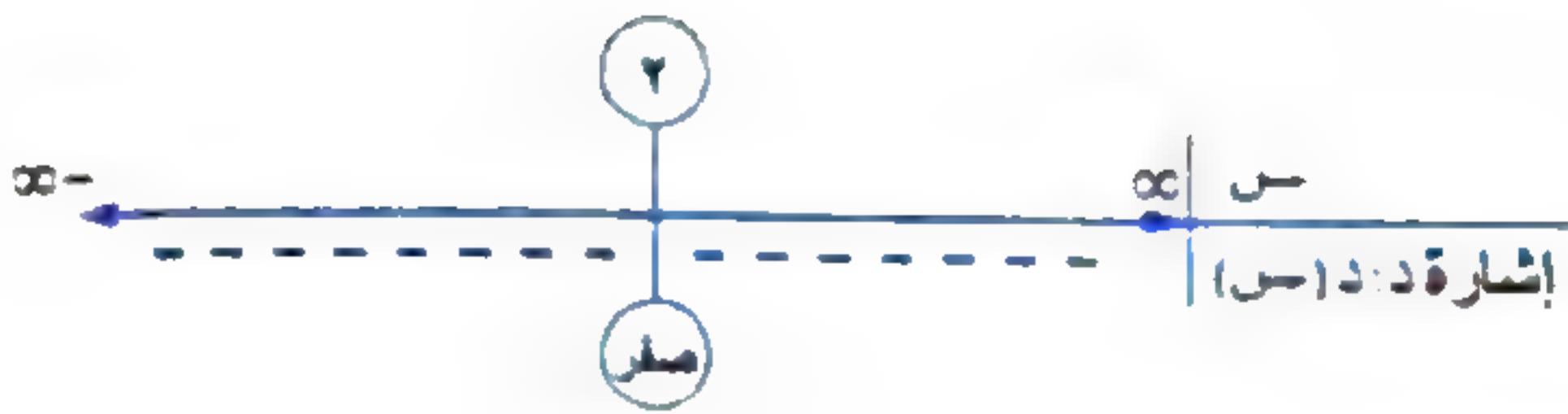
$$\text{وبالتحليل : } \therefore (٣ - س)^2 = ٠ \therefore س = ٣$$

$$\therefore ٢ = ٠ < ١$$

∴ الدالة موجبة عندما س ∈ ح - {٣}

$$\text{د (س) = ٠ عندما س = ٣}$$

∴ مجموعة حل المتباينة : س² - ٦س + ٩ ≥ ٠ هي {٣}



حاول بنفسك

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

$$\boxed{٢} \quad -س + س^2 - ١ < ٠$$

$$\boxed{٤} \quad ١٠ - س - س^2 \geq ٢٥$$

$$\boxed{١} \quad س + س^2 + ١٢ < ٠$$

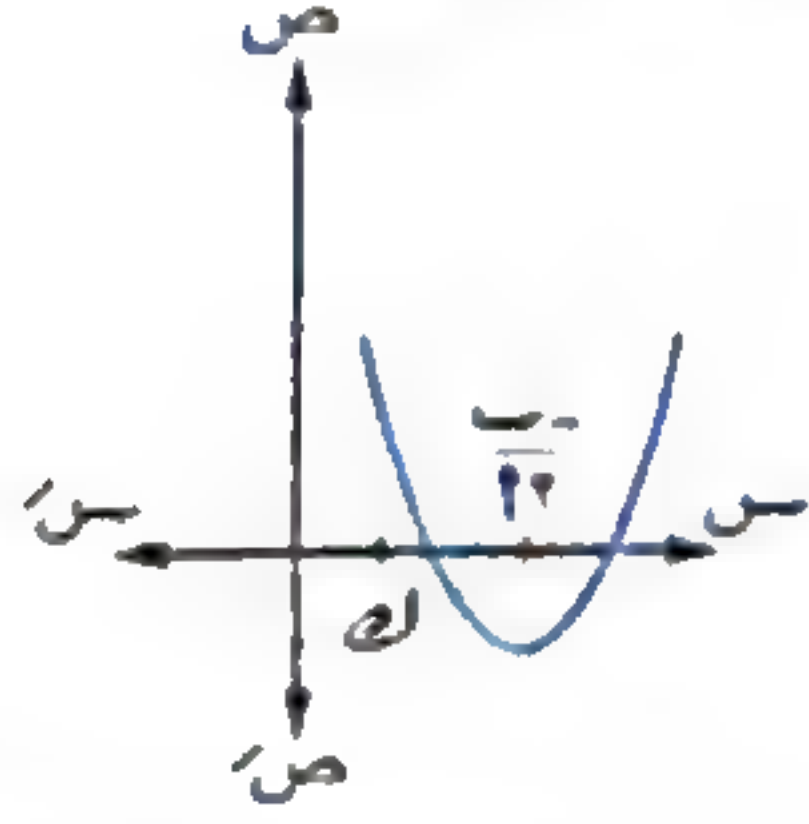
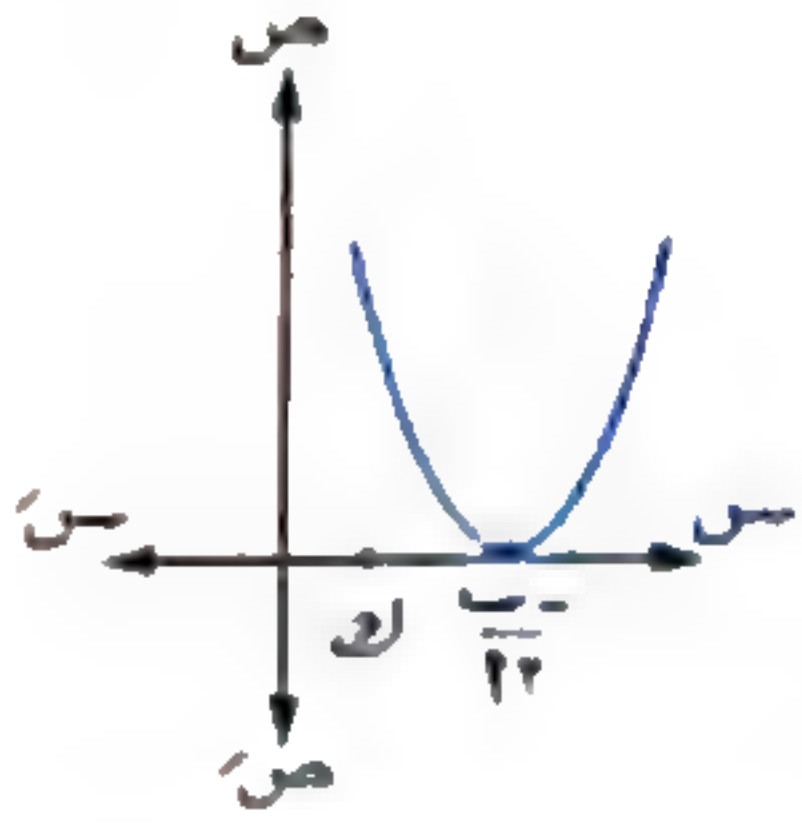
$$\boxed{٣} \quad س^2 - ٢س + ١ < ٠$$

ملاحظات

إذا كانت المعادلة التربيعية $س^2 + ب س + ج = ٠$

حيث $د$ هي الدالة التربيعية المرتبطة بها فإن :

١ شروط أن يكون كل من جذري المعادلة أكبر من عدد حقيقي $ك$ هي :



$$\bullet س^2 - ٤ س + ٤ \leq ٠$$

$$\bullet ٢ د (ك) < ٠$$

$$\bullet ك < \frac{ب-٢}{٢}$$

فمثلاً

إذا كان كل من جذري المعادلة $س^2 - ٥ س + م = ٠$ أكبر من ٢

$$\bullet \text{ فإن : } (٢٥) س^2 - ٤ م \leq ٠$$

$$\bullet ٤ - ٥(٢) + م < ٠$$

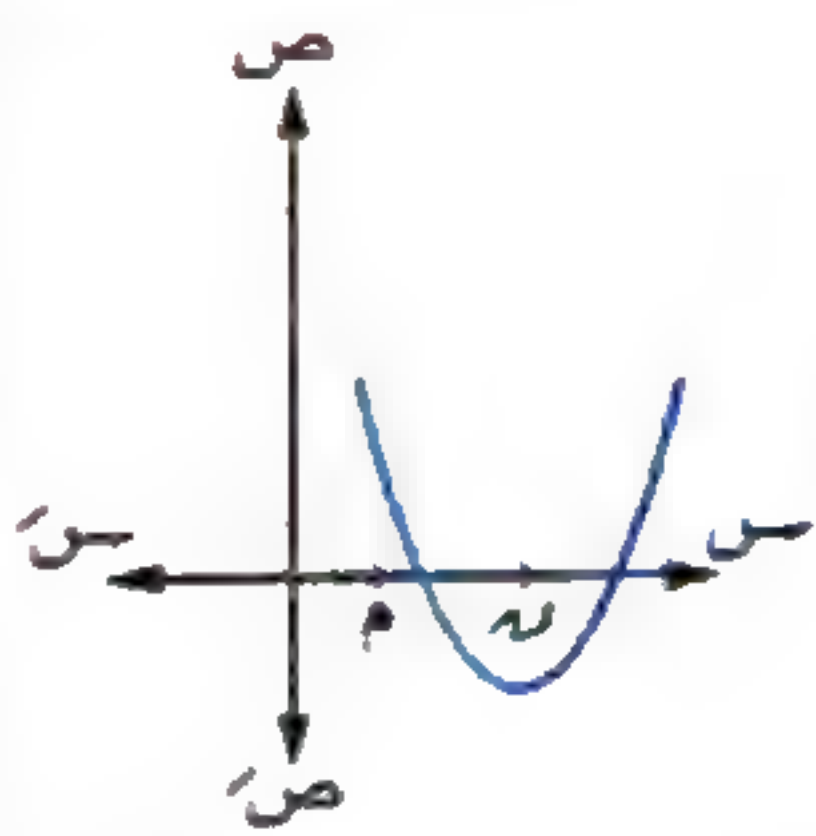
$$\bullet ٢ < \frac{٥}{٢}$$

متحققة لكل قيم $م$

وحتى تتحقق الشروط الثلاثة فإن : $٦ \frac{١}{٤} \geq م > ٦$

$$\bullet \therefore م \geq ٦ \frac{١}{٤}$$

$$\bullet \therefore م < ٦$$



٢ شرط وجود أحد الجذرين فقط بين العددين الحقيقيين $م$ ، $ن$ هو :

$$د (م) \times د (ن) > \text{صفر}$$

فمثلاً

إذا كان أحد جذري المعادلة $س^2 - ب س + ١٢ = ٠$

ينتمي للفترة $[١, ٤]$

$$\bullet \text{ فإن : } د (١) \times د (٤) > ٠$$

$$\bullet \therefore (١٢ + ب - ١٦) (١٢ + ب - ٤) > ٠$$

$$\bullet \therefore (ب - ٤ - ٢٨) (ب - ١٢) > ٠$$

$$\bullet \therefore (ب - ٧) (ب - ١٢) > ٠$$

$$\bullet \therefore ب \in [٧, ١٢]$$





٣ شروط أن يكون جذرا المعادلة بين العددين الحقيقيين م ، ن حيث $ن > م$ هي :

• $٤ - ٤ ≤$ • $١ < (م) < ١$ •

• $١ < (ن) < ١$ •

• $ن > \frac{١}{٢} > م$ •

فمثلا

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية $س^٢ - ٢س + م = ٠$

ينتميان للفترة $[-١, ١]$ ،

فإن : • $٤ - ٤ × م × م ≤$ •

(١) $١ ≥ م ≥ \frac{١}{٤}$ ∴

(٢) • $٤ × (١ - م) < ٠$ ∴ • $٤ × (م + ٢ + ٤) < ٠$ ∴ • $٦ - م < ٠$ ∴

(٣) • $٤ × (١) < ٠$ ∴ • $٤ × (م + ٢ - ٤) < ٠$ ∴ • $٢ - م < ٠$ ∴

(٤) • $١ - م > \frac{٢}{٢ × ٤} > ١$ متحققة لجميع قيم م

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : ∴ $١ ≥ م > ٢ -$ ∴ $\frac{١}{٤} ≥ م$



على متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

() من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| (١) $x^2 + 2x - 8 < 0$ | (٢) $x^2 + 2x - 4 \leq 0$ |
| (٣) $x^2 - 5x - 6 > 0$ | (٤) $x^2 - x - 2 \geq 0$ |
| (٥) $4 - x^2 - 3x - x^2 \leq 0$ | (٦) $5x - x^2 - 6 > 0$ |
| (٧) $x^2 - 1 \geq 0$ | (٨) $4 - x^2 > 0$ |
| (٩) $7 + x^2 - 4x > 0$ | (١٠) $2x + x^2 + 5 < 0$ |
| (١١) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ | (١٢) $6x - x^2 - 9 > 0$ |
| (١٣) $x^2 - 8x + 16 > 0$ | (١٤) $x^2 - 10x - 25 \leq 0$ |
| (١٥) $2x - x^2 > 0$ | |

٢ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| (١) $x^2 \geq 9$ | (٢) $x^2 < 16$ |
| (٣) $x^2 + 5x - 4 > 0$ | (٤) $5x^2 + 12x - 44 \leq 0$ |
| (٥) $3x^2 \geq 11x + 4$ | (٦) $x^2 \leq 6x - 9$ |
| (٧) $2 - 3x \leq x^2$ | (٨) $7x + 15 \geq 2x^2$ |
| (٩) $1 \geq 5 + x^2$ | (١٠) $2 > 7 - x^2$ |
| (١١) $9 \leq (2 - x)^2$ | (١٢) $5 - (2 - x)^2 \geq 0$ |
| (١٣) $2 - (2 + x) \geq x^2$ | (١٤) $(2 + x)^2 + (1 + x)(4 - x) > 0$ |
| (١٥) $2 - 10 > (3 + x)^2$ | (١٦) $5 - 2x \geq x^2$ |

٣ عيّن إشارة الدالة د حيث د (س) = $x^2 - 5x + 6$ ومن ذلك عيّن في ح مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

٤ ابحث إشارة الدالة د حيث د (س) = $2x^2 + 7x - 15$ ومن ذلك أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$$2x^2 + 7x - 15 \geq 0$$

5 عين إشارة الدالة د حيث د (س) = س² + ٤ ثم أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ صفر

6 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = - س² + ٢ - س في الفترة [-٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد في ح :

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠

(٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) < ٠

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : (س - ٢) (س - ٥) > ٠ في ح هي

(أ) {٥ ، ٢} (ب)]٥ ، ٢[(ج) [٥ ، ٢] (د)]٥ ، ٢[- ح

(٢) مجموعة حل المتباينة : س (س - ١) < ٠ في ح هي

(أ) {١ ، ٠} (ب)]١ ، ٠[(ج) [١ ، ٠] (د)]١ ، ٠[- ح

(٣) مجموعة حل المتباينة : - س (س + ٢) ≤ ٠ في ح هي

(أ) {٢- ، ٠} (ب) [٠ ، ٢-] (ج)]٠ ، ٢-[(د) [٢ ، ٢-] (د)

(٤) مجموعة حل المتباينة : س² + ٩ < ٠ في ح هي

(أ) ∅ (ب) ح (ج)]٢ ، ٣-[(د)]٢ ، ٣-[- ح

(٥) مجموعة حل المتباينة : س² + ١ ≥ ٠ في ح هي

(أ) ∅ (ب) ح (ج) [١ ، ١-] (د)]١ ، ١-[- ح

(٦) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

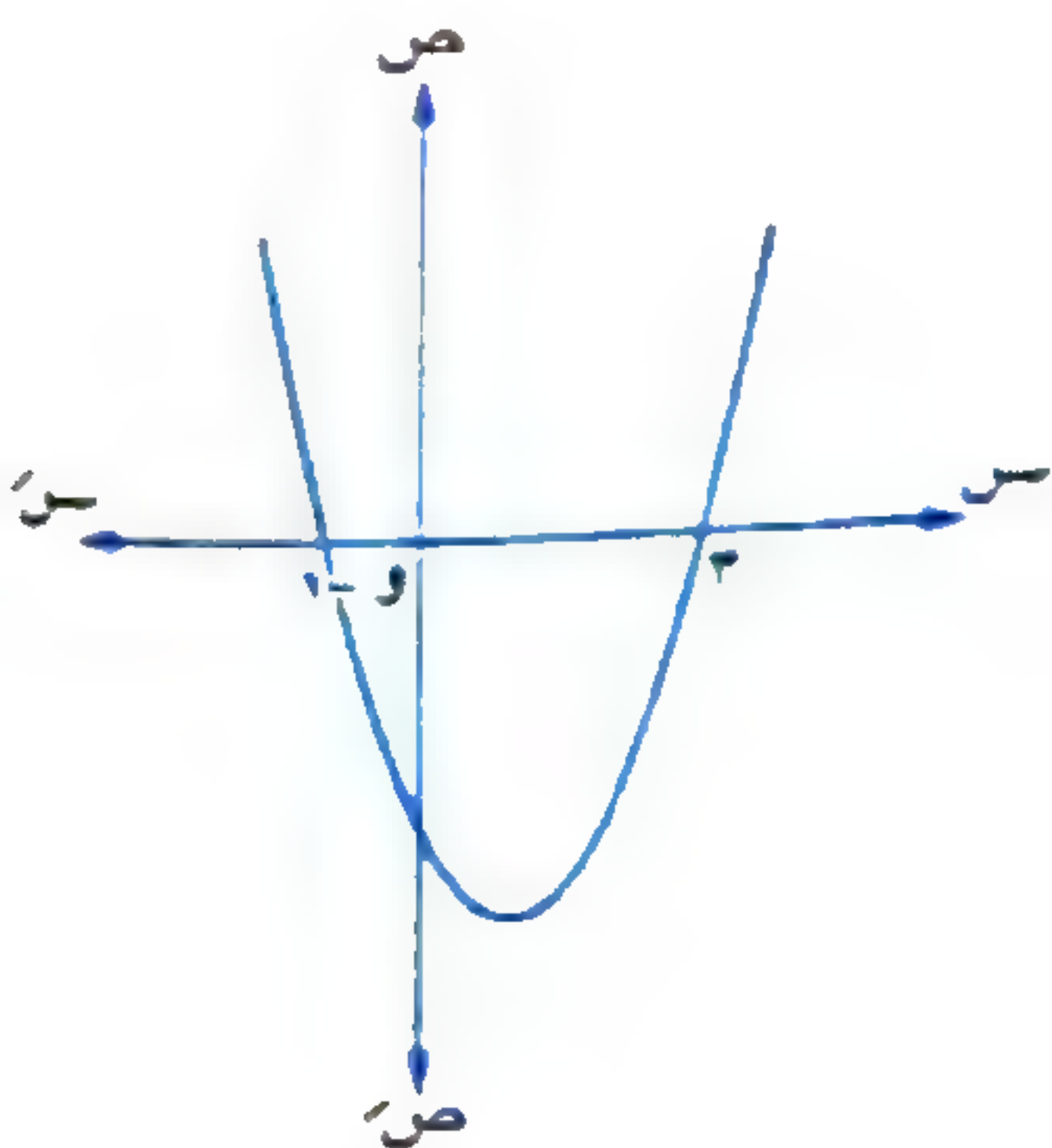
الدالة د : د (س) = س² - ٢ - س

فإن مجموعة حل المتباينة :

س² - ٢ - س ≤ ٠ في ح هي

(أ) [٣ ، ١-] (ب)]٢ ، ∞ -[

(ج)]∞ ، ٢[(د)]∞ ، ٢[∪ [١- ، ∞ -[





٨ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : $(1 + s)^2 > 4(2 - s)(1 - s)$

حل يوسف

$$\therefore (1 + s)^2 > 4(2 - s)(1 - s)$$

$$\therefore 1 + s + 2s + s^2 > 8 - 4s - 4 + 4s^2$$

وذلك بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

$$\therefore 1 + s + 2s + s^2 > 4 - 4s + 4s^2$$

$$\therefore 3 - 2s + s^2 > 0$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي : $3 - 2s + s^2 = 0$

مجموعة الحل هي $\{1\}$

* يبحث إشارة الدالة د حيث $3 - 2s + s^2 = 0$



نجد أن : مجموعة حل المتباينة هي $[1, 3]$

أى الحلين صحيح ؟

٩ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : $s^2 - 2s + 1 \leq 0$

حل باسم

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي :

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$\therefore (s - 1)^2 = 0$$

مجموعة الحل = $\{1\}$

* يبحث إشارة الدالة د حيث

$$d(s) = s^2 - 2s + 1$$



نجد أن : مجموعة الحل = $\mathbb{R} - \{1\}$

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

حل نور

$$\therefore (1 + s)^2 > 4(2 - s)(1 - s)$$

$$\therefore 1 + s + 2s + s^2 > 8 - 4s - 4 + 4s^2$$

$$\therefore 15 - 2s + s^2 < 0$$

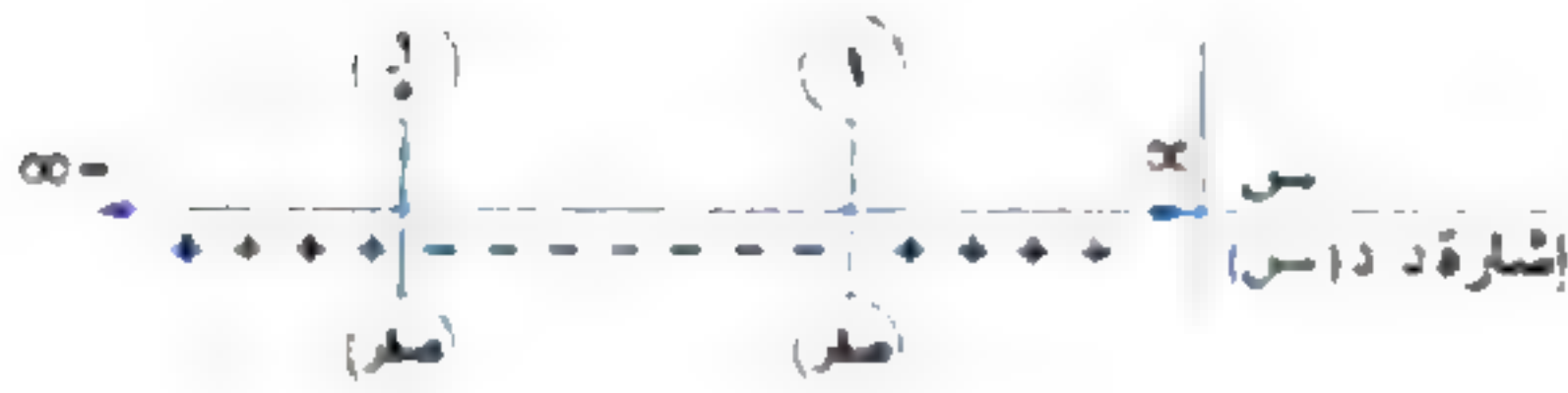
المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي :

$$\therefore 15 - 2s + s^2 = 0$$

مجموعة الحل هي $\{1, \frac{1}{5}\}$

* يبحث إشارة الدالة د حيث

$$d(s) = 15 - 2s + s^2$$



نجد أن : مجموعة حل المتباينة هي $[\frac{1}{5}, 1]$

حل إسلام

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي :

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$\therefore (s - 1)^2 = 0$$

مجموعة الحل = $\{1\}$

* يبحث إشارة الدالة د حيث

$$d(s) = s^2 - 2s + 1$$



نجد أن : مجموعة الحل = \mathbb{R}

مسائل تقبص مستويات عليا عن التفكير

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = $س^2 - ٧س + ١٢$ ، س \in ح فإن جميع ما يلي صحيح ما عدا

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هي {٢ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هي ح - [٢ ، ٤]

(ج) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هي [٢ ، ٤]

(د) د موجبة في الفترة ح - [٢ ، ٤]

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة : (س - ٢) (٢ - س) \geq ٠ يساوي

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٢

(٣) مجموعة حل المتباينة : (س + ٣) $^2 >$ ٤ (س + ١) في ح هي(أ) $[-\frac{5}{3}, 1]$ (ب) ح - $[-\frac{5}{3}, 1]$ (ج) $[-\frac{5}{3}, 1]$ (د) ح - $[-\frac{5}{3}, 1]$ (٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 + ب س + ح = ٠$ حيث $١ < ٠$ ، ل > مفإن مجموعة حل المتباينة : $س^2 + ب س + ح > ٠$ في ح هي(أ) $[-\infty, \infty]$ (ب) [ل ، م] (ج) [م ، ∞] (د) ح - [ل ، م](٥) إذا كان مميز المعادلة : $س^2 + ب س + ح = ٠$ سالبافإن مجموعة حل المتباينة : $س^2 + ب س + ح > ٠$ حيث $١ > ٠$ في ح هي(أ) ح (ب) \emptyset (ج) ح⁺ (د) ح⁻(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 + (٢ - ك) س - ٥ = ٠$ وكان : $١ - ل > ل > م$ فإن(أ) $١ - ك > ك > ٦$ (ب) $٦ < ك < ١ -$ (ج) $١ - > ك$ (د) $١ - (د) > ك > ٦$ (٧) إذا كان كل من جذري المعادلة التربيعية : $س^2 - ٢ ك س + ك^2 + ك - ٥ = ٠$ أقل من ٥فإن : ك \in (أ) [٥ ، ٤] (ب) [٤ ، ∞] (ج) $[-\infty, ٤]$ (د) ح - [٥ ، ٤](٨) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^2 - ك س + ١ = ٠$ غير حقيقيين فإن :(أ) ك \in ص⁻ (ب) $٢ - ك > ك > ٢$ (ج) $٢ < ك$ (د) $٢ - > ك$

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $s^2 - 4 \geq s + k$ هي $[-2, 2]$ فإن : $k =$

- (١) -6 (ب) 1 (ج) 2 (د) 10

(١٠) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $s^2 - 10 > s + h$ هي $[-2, 5]$ فإن : $h =$

- (١) -10 (ب) -2 (ج) 2 (د) 5

(١١) إذا كان أحد جذري المعادلة : $s^2 - s + 2 = 0$ ينتمي للفترة $[1, 2]$ فإن : \exists

- (١) $[1, 2]$ (ب) $[-\infty, 2]$ (ج) $[2, \frac{1}{2}]$ (د) $[-\frac{1}{2}, 2]$

(١٢) إذا كانت M هي مجموعة حل المتباينة : $s^2 - s - 2 \geq 0$ وكانت N

هي مجموعة حل المتباينة : $s^2 + s - 2 \geq 0$ فإن : $M \cap N =$

- (١) \emptyset (ب) $[-2, 2]$ (ج) $[-1, 1]$ (د) $[-1, 1] \cup [-2, -1]$

(١٣) إذا كان L, M هما جذرا المعادلة : $s^2 + 4s + 4 = 0$ وكان $\exists 2 \in [M, L]$

فإن : $2 \in$

- (١) $[1, 2]$ (ب) \mathbb{R}^+ (ج) $[\frac{2}{3}, 0]$ (د) $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

أوجد مجموعة حل المتباينة : $s^2 + 2s - 5 \leq 2$ في \mathbb{R}



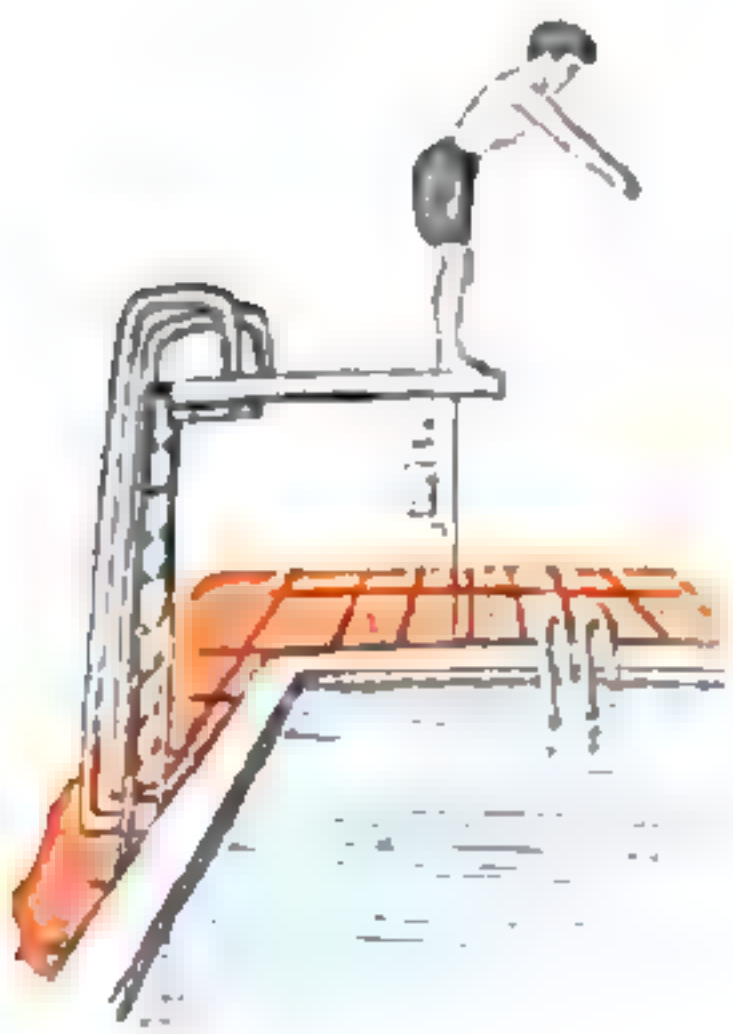
تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

١. من أسئلة الكتاب المدرسي



«٢، ٣»

١ أطلقت قذيفة رأسياً إلى أعلى بسرعة ع تساوى ٢٤,٥ متر/ث احسب الفترة الزمنية ن بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر ، علماً بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) والزمن (ن) هي كالتى : $ف = ع ن - ٤,٩ ن^٢$



«٥/٧ ثانية»

٢ يبدأ غواص بالقفز من على منصة بارتفاع ١٠ أمتار فوق سطح الماء فإذا كان ارتفاع الغواص عن سطح الماء ف متراً تعبر عنه العلاقة : $ف = ٤,٩ ن^٢ + ٣,٥ ن + ١٠$ حيث ن الزمن بالثوانى. بعد كم ثانية يصل الغواص إلى سطح الماء ؟

٣ ١ قطعة أرض على شكل مستطيل بعاده ٦ ، ٩ من الأمتار ، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار. أوجد المقدار المضاف.

«٣ أمتار»

٤ يضرب لاعب كرة جولف لتصل إلى مكان معين والعلاقة التالية تعبر عن الارتفاع الذى تصل إليه الكرة بالقدم : $ص = ١٦ ن^٢ + ٨٠ ن + ٢٠$ حيث ن الزمن بالثانية.



(١) بعد كم ثانية ستصل الكرة إلى سطح الأرض ؟
(٢) هل ستصل الكرة إلى ارتفاع ١٣٠ قدماً ؟

«٥,٢٤ ثانية»

٥ ١ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٢ بالعلاقة :

$ع = ١,٢ ن + ٩١$ حيث (ع) عدد السكان بالمليون ، (ن) عدد السنوات.

(١) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٢ ؟
(٢) قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣
(٣) قدر عدد السنوات التى يبلغ عدد السكان فيها ٢٠٣ ملايين.

«٩١ مليوناً ، ٥١٥ مليوناً ، ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٢٣»

تطبيقات حياتية

٦ أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى (٤ - ٢ ت) أمبير وفى المقاومة الثانية $\frac{٢ + ٦}{٢ + ٢}$ ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين) «(٧ - ٢ ت) أمبير»

٧ إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى (٦ + ٤ ت) أمبير ، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٢ - ٤}$ ت أمبير ، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى. «(٢ + ٢ ت) أمبير»

٨ فى الفترة من عام ١٩٩٠م إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدارًا بالآلاف أوقية يتحدد بالدالة $د : د (ن) = ١٢ ن^٢ - ٩٦ ن + ٤٨٠$ حيث $ن$ عدد السنوات ، $د (ن)$ إنتاج الذهب. (١) ابحث إشارة دالة الإنتاج $د$

(٢) أوجد إنتاج منجم الذهب مقدارًا بالآلاف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠ ، ٢٠٠٥

(٣) فى أى عام كان إنتاج المنجم مساويًا ٢٠١٦ ألف أوقية ؟ «٤٨٠ ألف أوقية ، ١٧٤٠ ألف أوقية ، ٢٠٠٦»

حساب المثلثات

2

الوحدة



فى نهاية الوحدة

• تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية.

◀ دروس الوحدة

- 1 الدرس الزاوية الموجهة.
- 2 الدرس القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- 3 الدرس الدوال المثلثية.
- 4 الدرس الزوايا المنتسبة.
- 5 الدرس التمثيل البياني للدوال المثلثية.
- 6 الدرس إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

نواتج التعلم

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

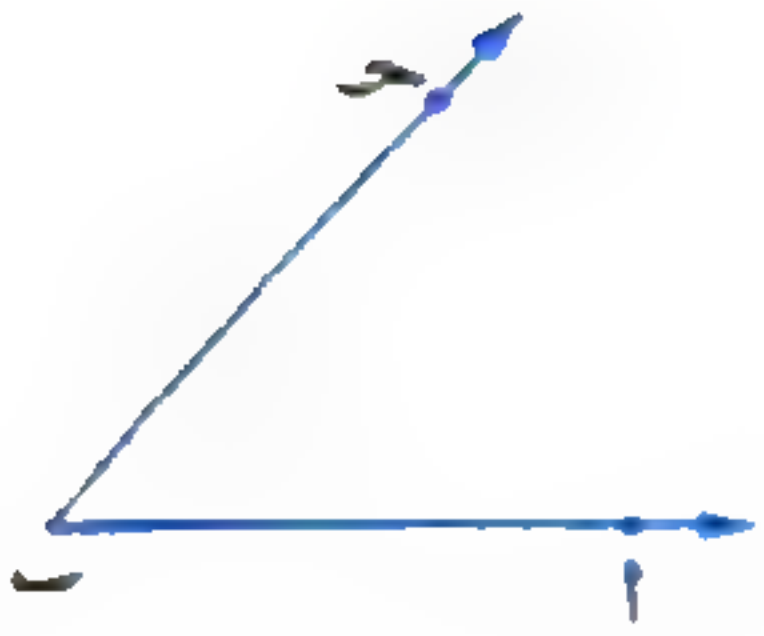
- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- يتعرف مفهوم الزوايا المتكافئة.
- يحدد الربع الذي تقع فيه زاوية في وضعها القياسي.
- يتعرف القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة.
- يحوّل من القياس الستيني للزاوية إلى القياس الدائري لها والعكس.
- يتعرف إشارات الدوال المثلثية في كل ربع.
- يوجد الدوال المثلثية لبعض الزوايا المنتسبة لزاوية خاصة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية.
- يستخدم الآلة الحاسبة في إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الستيني للدائري والعكس.
- يرسم الدوال المثلثية (دالة الجيب - دالة جيب التمام).
- يستخدم الحاسب الآلي في تمثيل الدوال المثلثية.
- يحل بعض التطبيقات الحياتية باستخدام الدوال المثلثية.
- يوجد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

www.egyptianmath.com

www.egyptianmath.com

الزاوية الموجهة

1



• سبق أن تعلمنا أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة.

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة A

فإن : $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \angle BAC$ ويسمى الشعاعان \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} ضلعي الزاوية ، والنقطة A رأس الزاوية.

• كما علمنا أن ترتيب ضلعي الزاوية غير هام.

فيمكن أن نكتب : $\angle BAC$ أو $\angle CAB$ لتعبر عن نفس الزاوية.

• وفي هذا الدرس سوف نتناول مفهوماً جديداً وهو مفهوم «الزاوية الموجهة» وبعض الموضوعات الأخرى المتعلقة بها.

الزاوية الموجهة

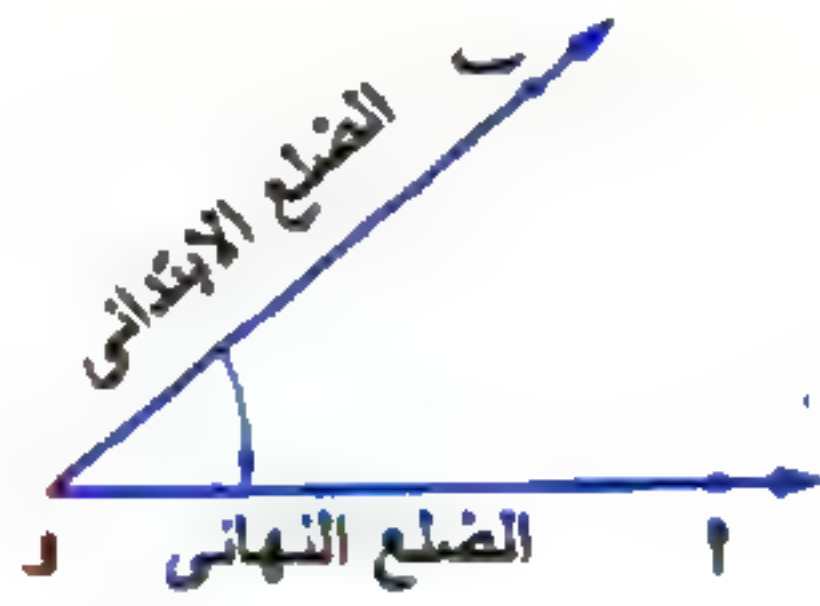
إذا أخذنا في الاعتبار ترتيب ضلعي الزاوية بحيث يكون أحدهما ضلعاً ابتدائياً والآخر ضلعاً نهائياً ، ففي هذه الحالة تكتب الزاوية على شكل «زوج مرتب» مسقطه الأول هو الضلع الابتدائي ومسقطه الثاني هو الضلع النهائي وتسمى الزاوية بـ «الزاوية الموجهة» ، وعند رسمها اصطلاح على رسم سهم بين ضلعيها يخرج من الضلع الابتدائي متجهاً نحو الضلع النهائي.

تعريف الزاوية الموجهة

هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.

فإذا كان : \vec{OA} ، \vec{OB} ضلعي زاوية رأسها نقطة O فإن :

الزوج المرتب (\vec{OA} , \vec{OB}) يعبر عن الزاوية الموجهة $\angle BOA$ ضلعها الابتدائي \vec{OA} ، ضلعها النهائي \vec{OB}



الزوج المرتب (\vec{OB} , \vec{OA}) يعبر عن الزاوية الموجهة $\angle AOB$ ضلعها الابتدائي \vec{OB} ، ضلعها النهائي \vec{OA}

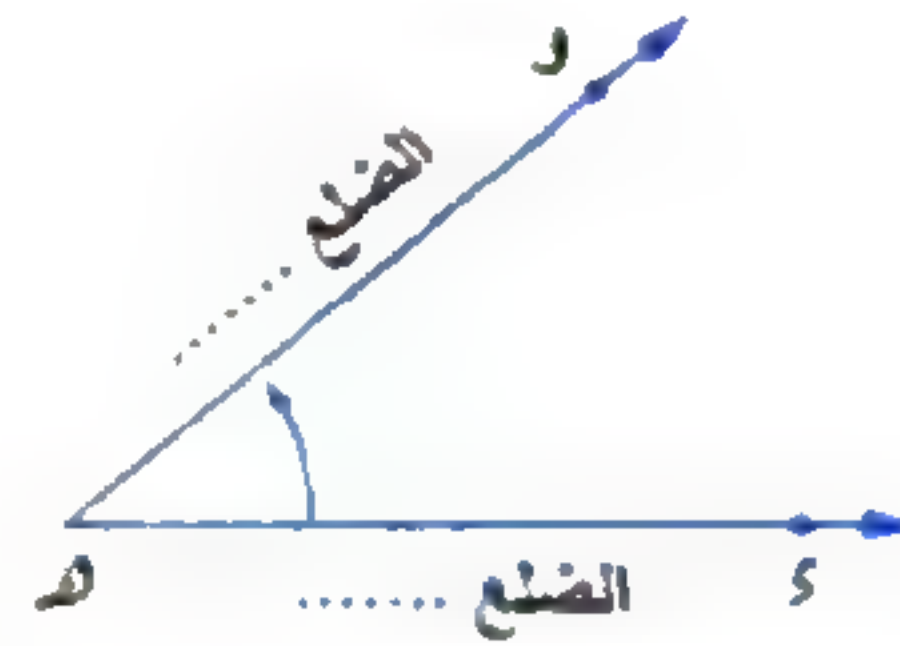


لستنتج مما سبق ان

$\angle BOA \neq \angle AOB$ لأن : $(\vec{OA} , \vec{OB}) \neq (\vec{OB} , \vec{OA})$

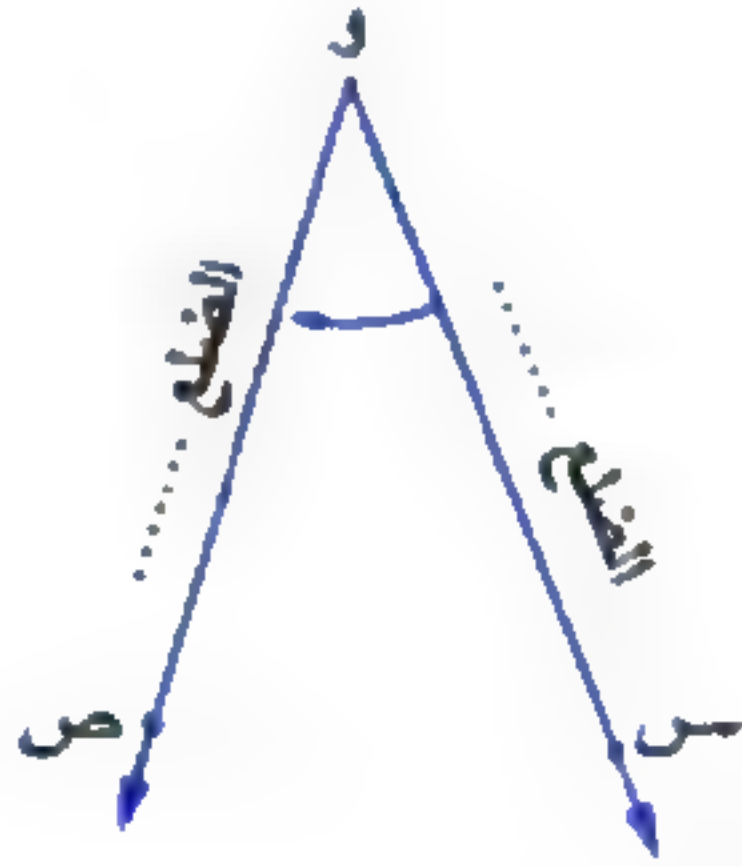
تحقق من فهمك

أكمل : ١



(\vec{OS} , \vec{OD}) يعبر عن الموجهة.

٢



(..... ،) يعبر عن $\angle DOS$ الموجهة.

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يكون قياس الزاوية الموجهة $\angle BOA$

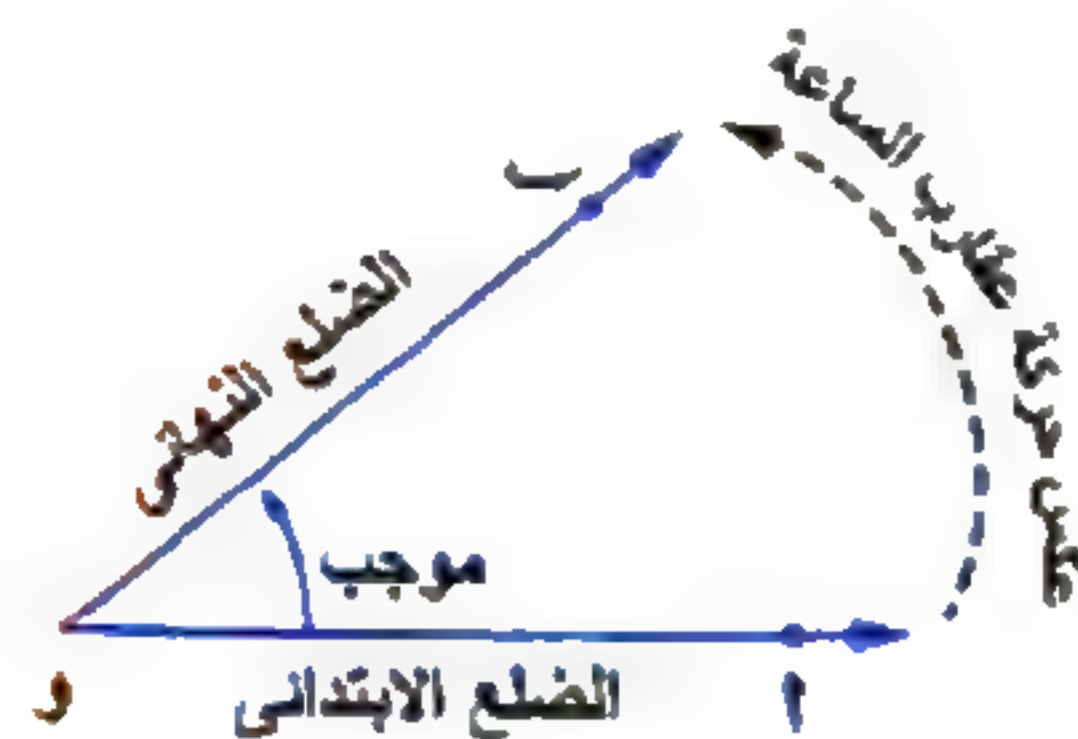
سالباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



موجباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.



ملاحظة

لكل زاوية موجهة غير صفيرية قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين يساوي 360°

أي أن $|\text{القياس الموجب للزاوية الموجهة}| + |\text{القياس السالب للزاوية الموجهة}| = 360^\circ$



وعلى هذا فإنه

١ إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة θ

فإن القياس السالب لنفس الزاوية $360^\circ - \theta$

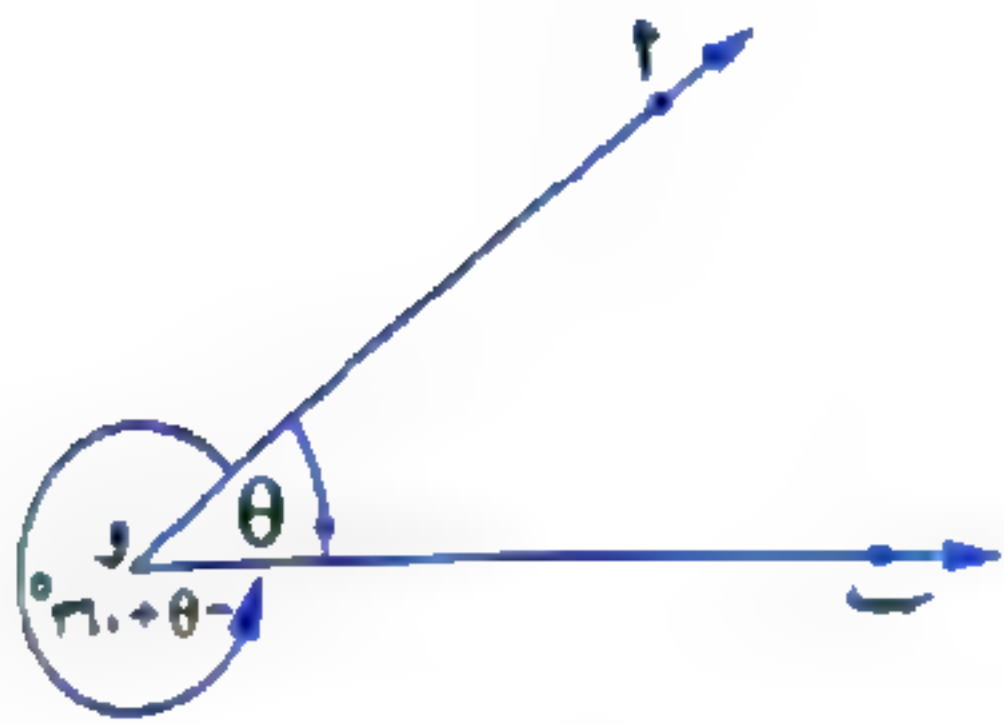
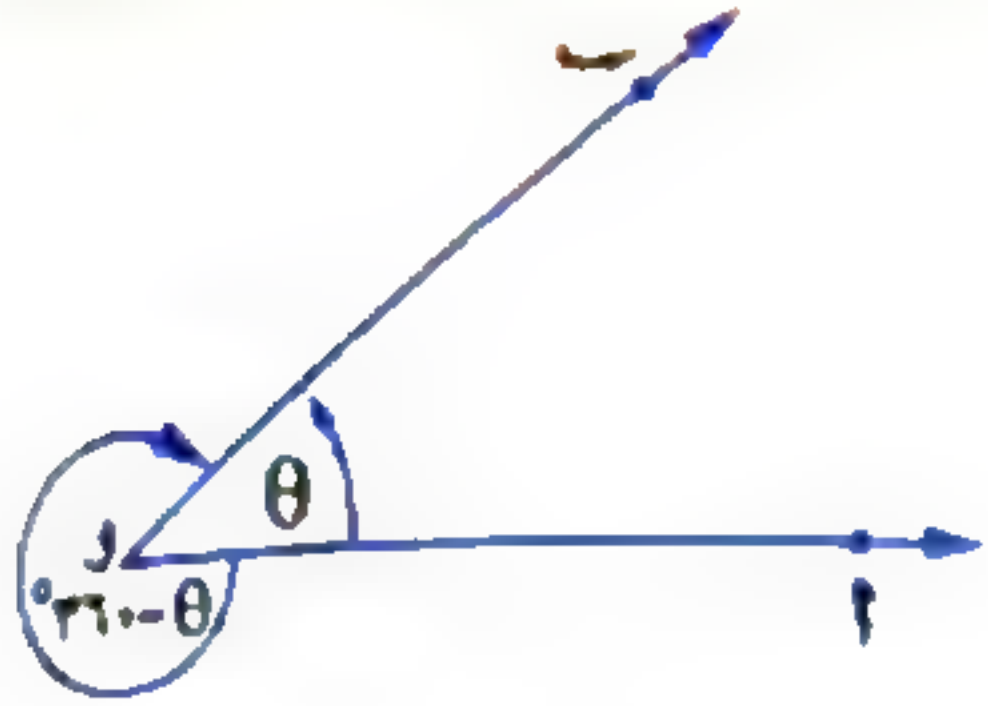
فمثلاً القياس السالب للزاوية الموجهة التي قياسها $210^\circ = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

٢ إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة θ

فإن القياس الموجب لنفس الزاوية $360^\circ + \theta$

فمثلاً القياس الموجب للزاوية الموجهة التي قياسها (-120°)

$$= 360^\circ + 120^\circ = 240^\circ$$



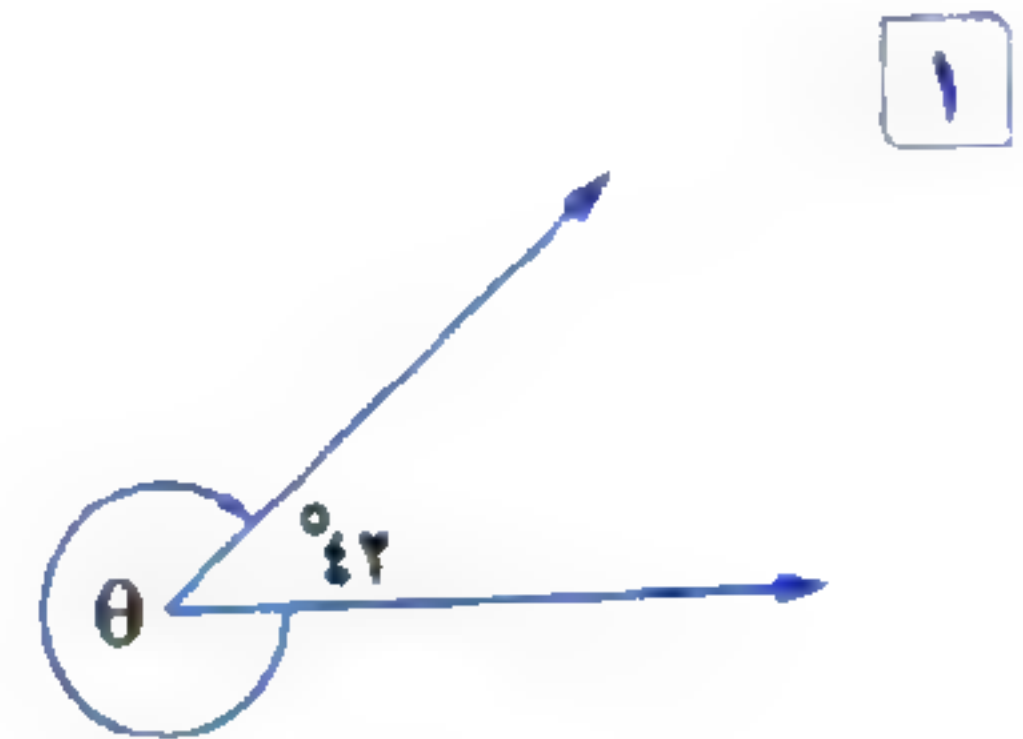
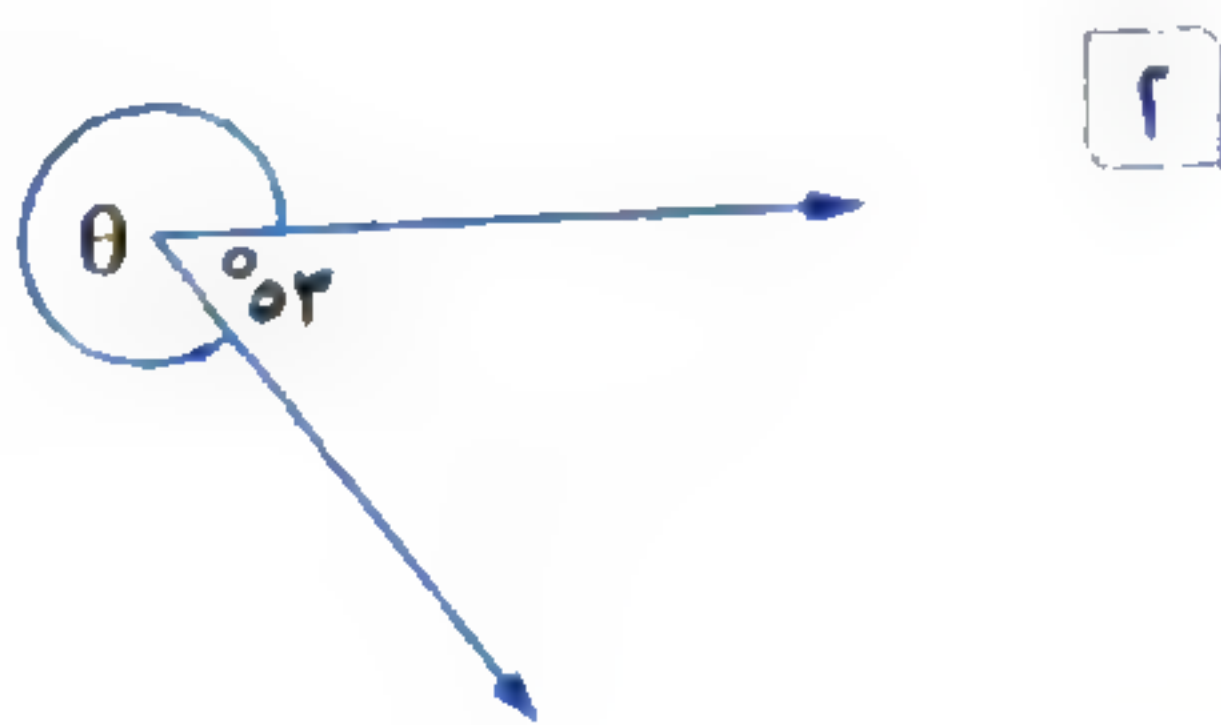
حاول بنفسك

أوجد : ١ القياس الموجب للزاوية الموجهة التي قياسها (-170°)

٢ القياس السالب للزاوية الموجهة التي قياسها 320°

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ في كل من الشكلين الآتيين :



الحل

١ : اتجاه السهم في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

: قياس الزاوية سالب.

$$\therefore \theta = 360^\circ - 42^\circ = 318^\circ$$

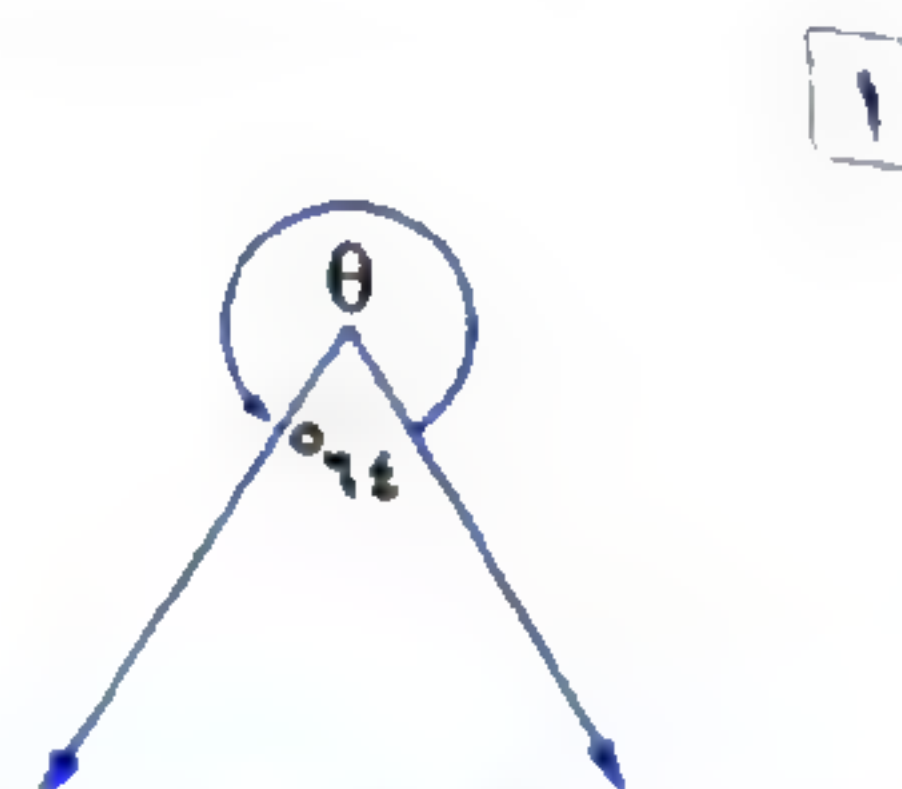
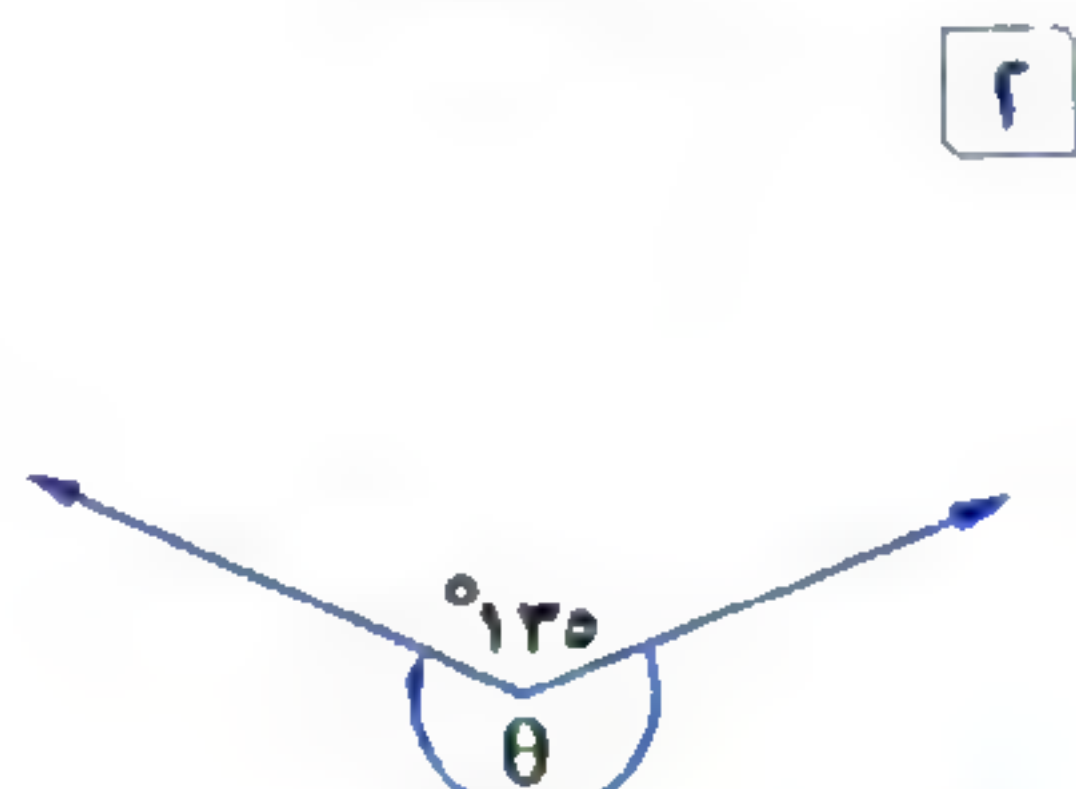
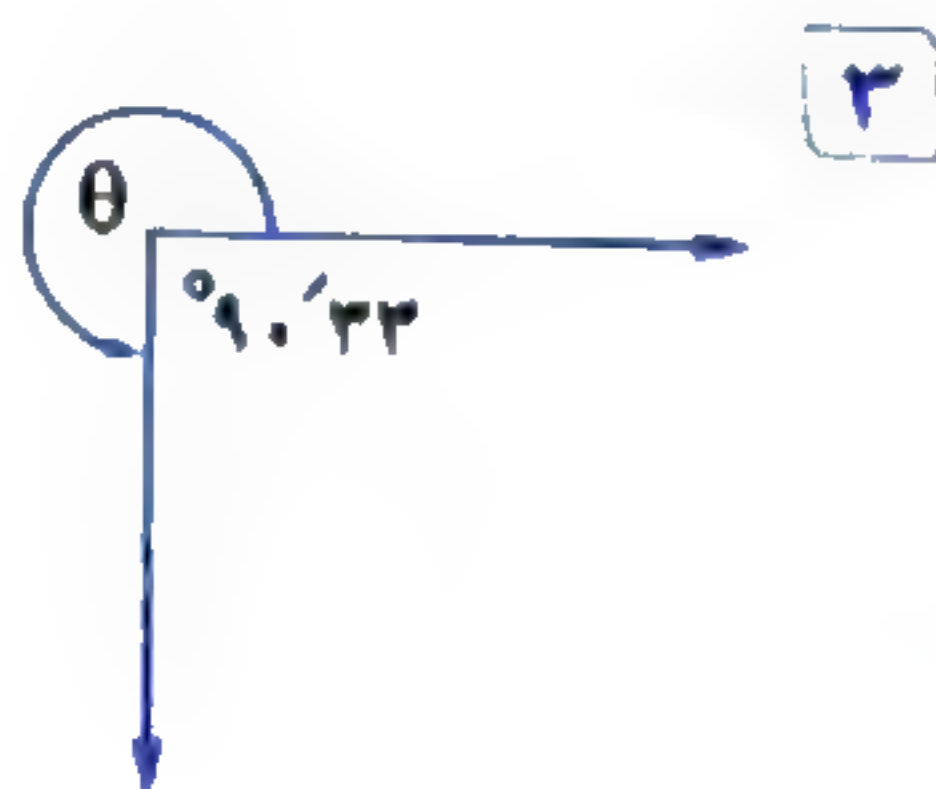
٢ : اتجاه السهم ضد اتجاه حركة عقارب الساعة.

: قياس الزاوية موجب.

$$\therefore \theta = 360^\circ + 53^\circ = 30^\circ$$

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ في كل من الأشكال الآتية :



الوضع القياسي للزاوية الموجهة

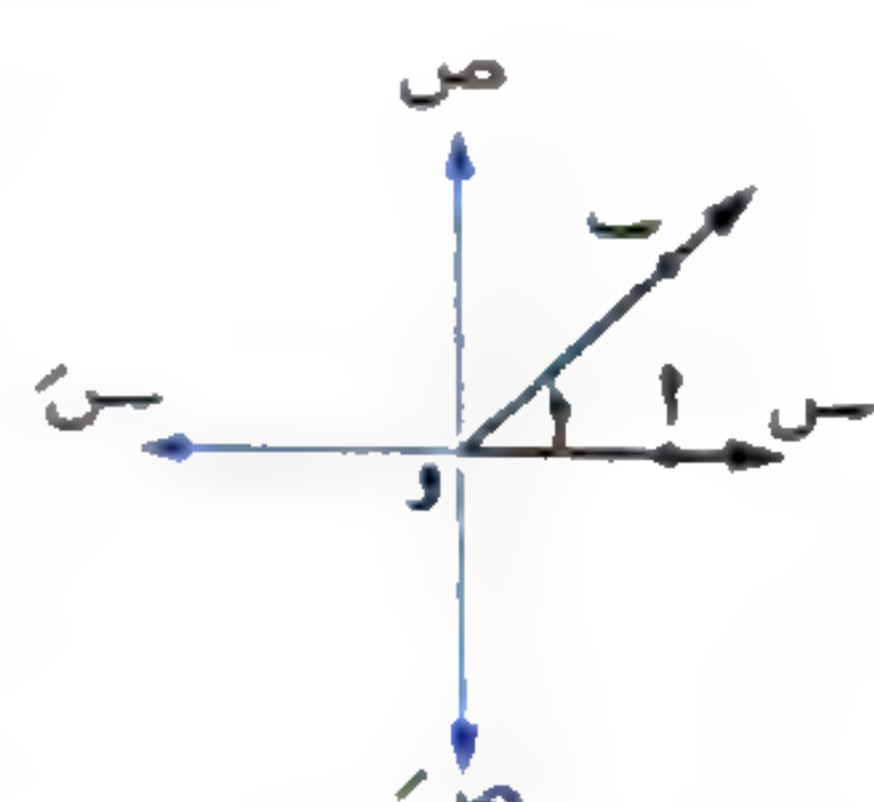
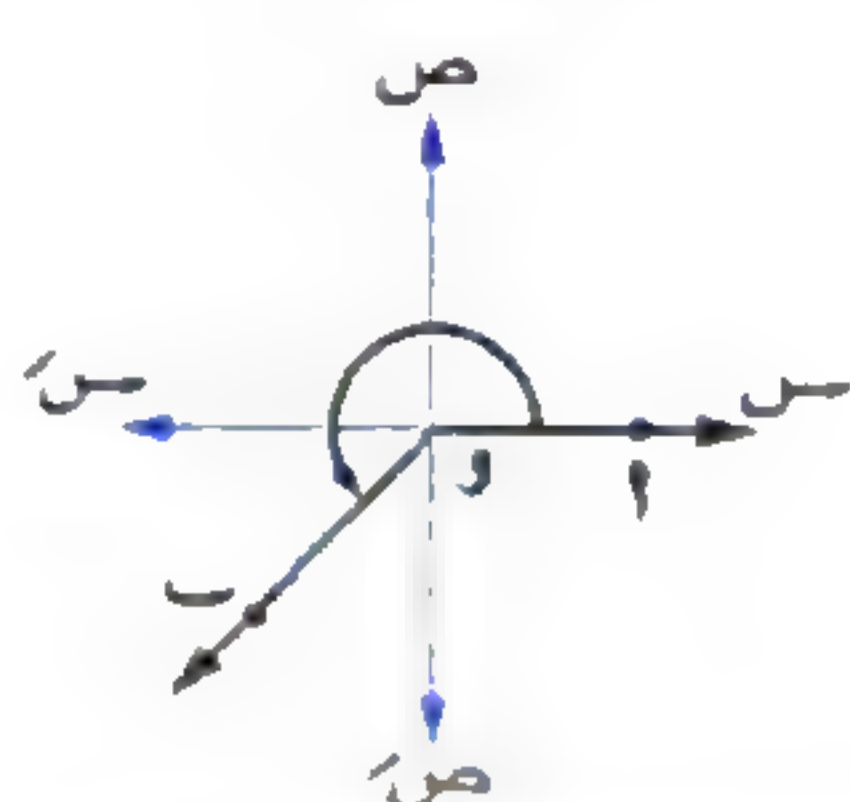
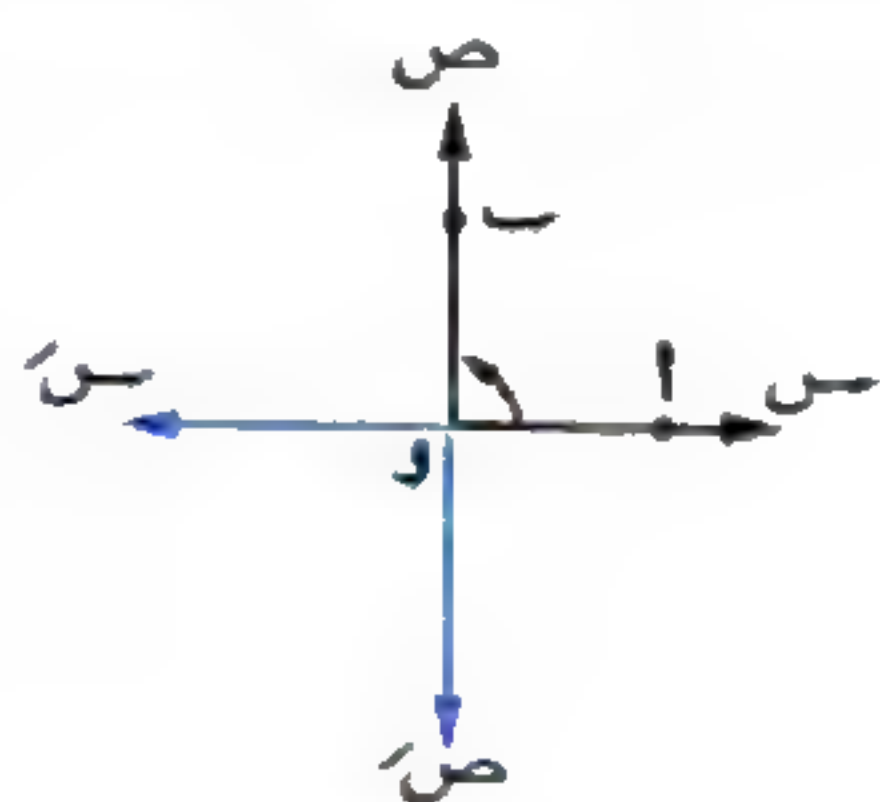
تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا تحقق الشرطان الآتيان

١ ضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

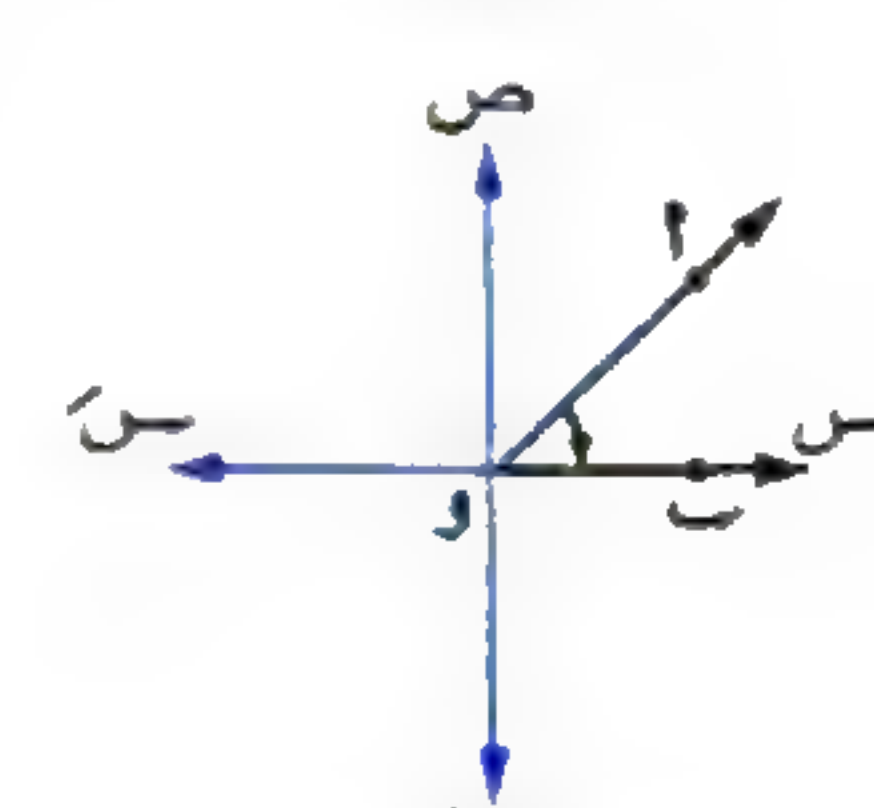
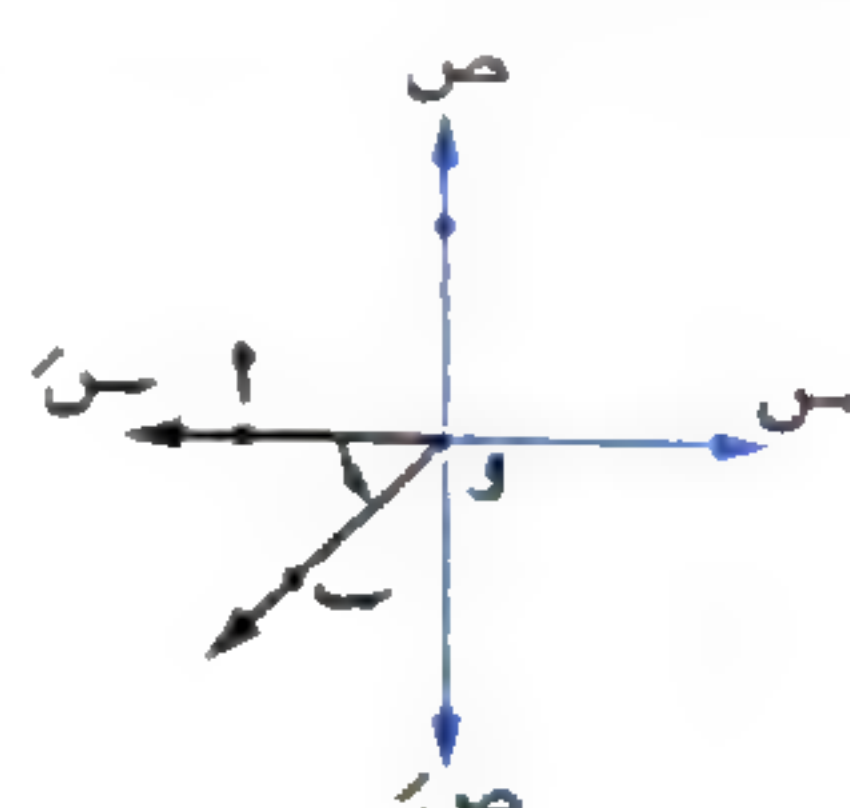
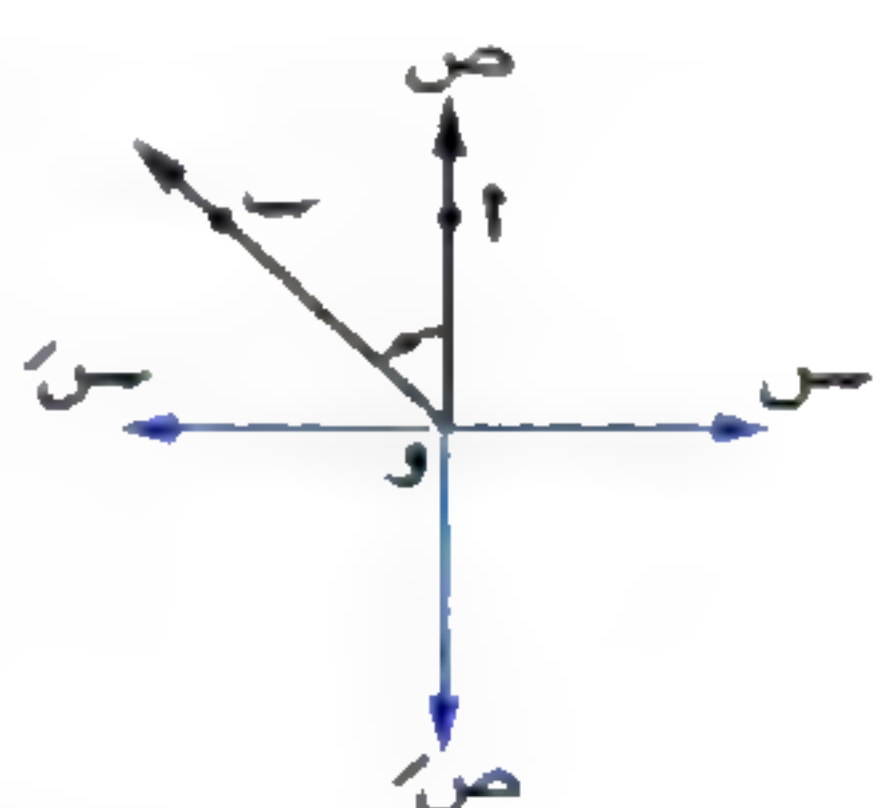
٢ رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد.

وعلى هذا فإن :

• كل من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي لتحقق الشرطين السابقين :

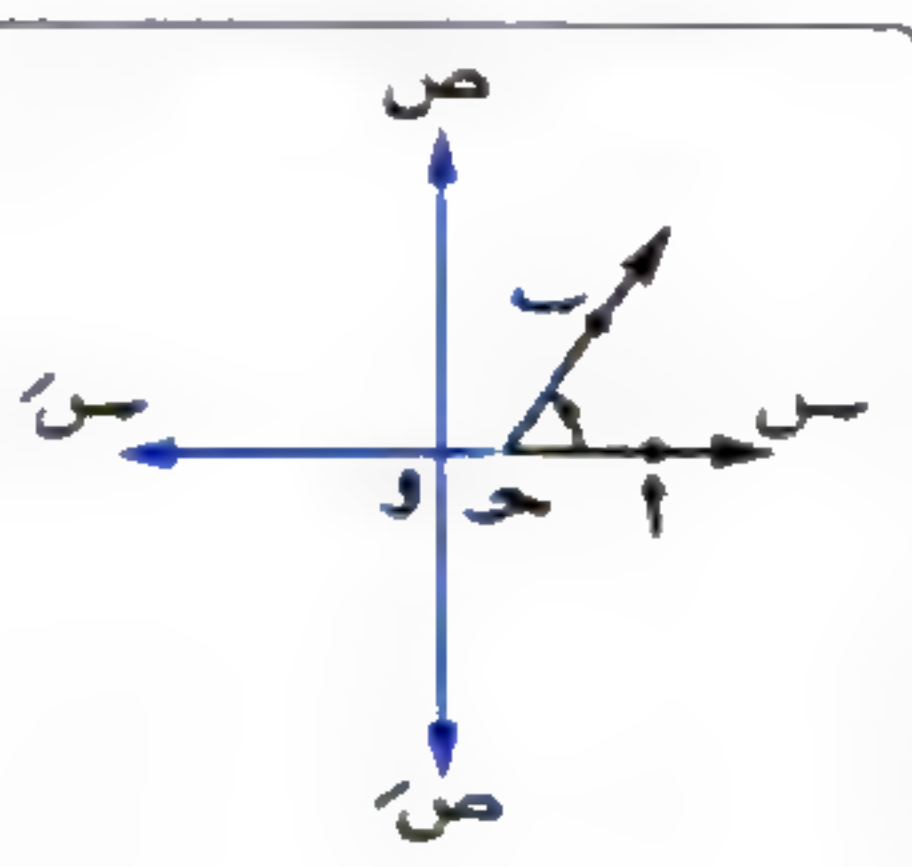


• كل من الزوايا الموجهة التالية ليست في الوضع القياسي لأن الضلع الابتدائي لا يقع على OS :



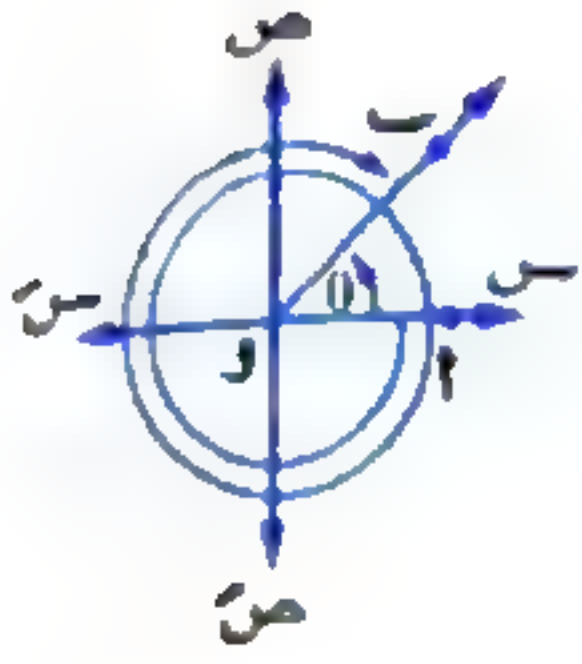
• الزاوية الموجهة في الشكل المقابل ليست في الوضع القياسي

لأن رأسها ليس نقطة الأصل و

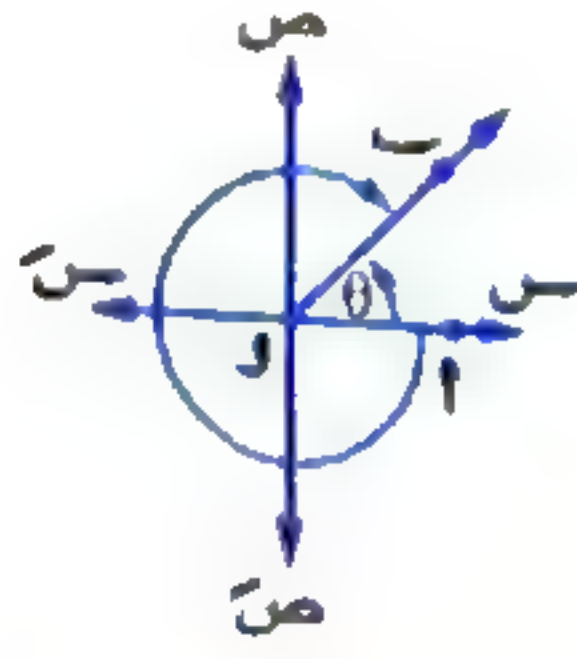


الزوايا المتكافئة

• إذا تأملنا الزوايا الموجهة في الوضع القياسي في الأشكال الآتية :



شكل (٥)



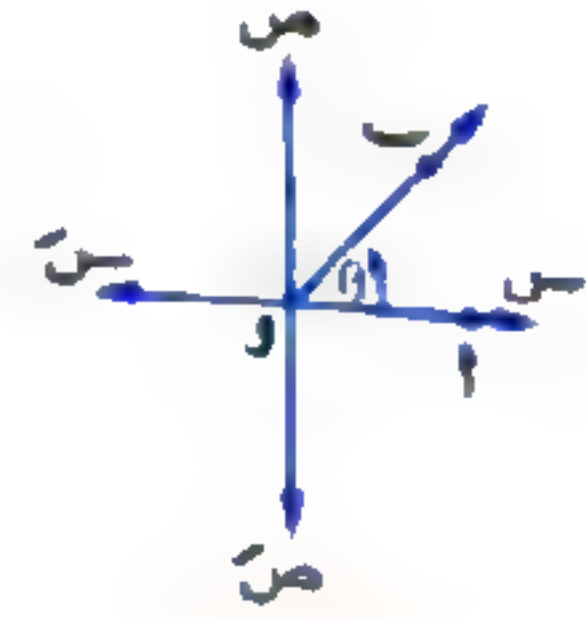
شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

فإننا نلاحظ ما يلي

١ الزوايا في الأشكال الخمسة لها نفس الضلع النهائي و ←

٢ الزاوية في شكل (١) قياسها θ

، الزاوية في شكل (٢) قياسها $\theta + 90^\circ$

، الزاوية في شكل (٣) قياسها $\theta + 180^\circ$

، الزاوية في شكل (٤) قياسها $\theta - 90^\circ = (\theta - 90^\circ)$

، الزاوية في شكل (٥) قياسها $\theta - 180^\circ = (\theta - 180^\circ)$

ومن ذلك نستنتج أنه

إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي فإن الزوايا التي قياساتها :

$(\theta \pm 90^\circ)$ ، $(\theta \pm 180^\circ)$ ، $(\theta \pm 270^\circ)$ ، ، $(\theta \pm 360^\circ)$

حيث n عدد صحيح موجب يكون لها جميعاً نفس الضلع النهائي.

مثل هذه الزوايا التي تشترك في الضلع النهائي توصف بأنها زوايا متكافئة.

تعريف الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسي إنها متكافئة إذا كان لها جميعاً نفس الضلع النهائي.

مثال ٢

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من :

١ 100°

٢ -250°

الحل

لاحظ أنه

يوجد عدد لا نهائي من الزوايا
الأخرى بقياس موجب وبقياس
سالب تشترك في الضلع النهائي.

١ زاوية بقياس موجب : $^{\circ}46. = ^{\circ}36. + ^{\circ}10.$

زاوية بقياس سالب : $^{\circ}26.- = ^{\circ}36. - ^{\circ}10.$

٢ زاوية بقياس موجب : $^{\circ}11. = ^{\circ}36. + ^{\circ}250.-$

زاوية بقياس سالب : $^{\circ}61.- = ^{\circ}36. - ^{\circ}250.-$

مثال ٣

عَيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التي قياساتها كالاتي :

٤ $^{\circ}79.-$

٣ $^{\circ}53.$

٢ $^{\circ}225.-$

١ $^{\circ}62.-$

الحل

١ أصغر قياس موجب $= ^{\circ}62.- + ^{\circ}36. = ^{\circ}298.$

٢ أصغر قياس موجب $= ^{\circ}225.- + ^{\circ}36. = ^{\circ}135.$

٣ أصغر قياس موجب $= ^{\circ}36. - ^{\circ}53. = ^{\circ}17.$

٤ أصغر قياس موجب $= ^{\circ}79.- + ^{\circ}36. \times 2 = ^{\circ}29.$

حاول بنفسك

١ عَيِّن أحد القياسات السالبة لكل من :

٢ $^{\circ}115.$

١ $^{\circ}72$

٢ عَيِّن أصغر قياس موجب لكل من :

٢ $^{\circ}405$

١ $^{\circ}115.-$

موقع الزاوية الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد

نعلم أن المستوى الإحداثي المتعامد ينقسم إلى أربعة أرباع كما في الشكل التالي.

يتحدد موقع الزاوية الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد بموقع ضلعها النهائي عندما تكون في وضعها القياسي.



فإذا رسمنا د و ب الموجهة التي قياسها الموجب θ في وضعها القياسي فإن :

الضلع النهائي و ب قد يقع في أحد الأرباع كما يلي

الربع الرابع	الربع الثالث	الربع الثاني	الربع الأول
د و ب تقع في الربع الرابع $^{\circ}360 > \theta > ^{\circ}270$	د و ب تقع في الربع الثالث $^{\circ}270 > \theta > ^{\circ}180$	د و ب تقع في الربع الثاني $^{\circ}180 > \theta > ^{\circ}90$	د و ب تقع في الربع الأول $^{\circ}90 > \theta > ^{\circ}0$

ملاحظة

إذا وقع الضلع النهائي على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية بالزاوية الربعية.
أي أن الزوايا التي قياساتها $^{\circ}0$ ، $^{\circ}90$ ، $^{\circ}180$ ، $^{\circ}270$ ، $^{\circ}360$ هي زوايا ربعية.

مثال ٤

عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التي قياساتها كالتالي :

١ $^{\circ}213$	٢ $^{\circ}132$	٣ $^{\circ}310$	٤ $^{\circ}12$
٥ $^{\circ}270$	٦ $^{\circ}964$	٧ $^{\circ}1070$	

الحل

١ $^{\circ}213 > ^{\circ}180 > ^{\circ}270$ \therefore الزاوية تقع في الربع الثالث.

٢ $^{\circ}132 > ^{\circ}90 > ^{\circ}180$ \therefore الزاوية تقع في الربع الثاني.

٣ أصغر قياس موجب $= ^{\circ}310 + ^{\circ}360 = ^{\circ}670$

$^{\circ}90 > ^{\circ}670 > ^{\circ}0$ \therefore ،

\therefore الزاوية التي قياسها $^{\circ}670$ تقع في الربع الأول.

\therefore الزاوية التي قياسها $^{\circ}310$ تقع أيضًا في الربع الأول.

لاحظ أنه

لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب لها أولاً.

٤] أصغر قياس موجب $= -12^\circ + 360^\circ = 348^\circ$

، $\therefore 270^\circ > 348^\circ > 360^\circ$

∴ الزاوية التي قياسها 348° تقع في الربع الرابع.

∴ الزاوية التي قياسها -12° تقع أيضًا في الربع الرابع.

٥] 270° زاوية ربعية.

٦] أصغر قياس موجب $= 964^\circ - 360^\circ \times 2 = 244^\circ$

، $\therefore 180^\circ > 244^\circ > 270^\circ$

∴ الزاوية التي قياسها 244° تقع في الربع الثالث.

∴ الزاوية التي قياسها 964° تقع أيضًا في الربع الثالث.

٧] أصغر قياس موجب $= -10.70^\circ + 360^\circ \times 3 = 10^\circ$

، $\therefore 0^\circ > 10^\circ > 90^\circ$

∴ الزاوية التي قياسها 10° تقع في الربع الأول.

∴ الزاوية التي قياسها -10.70° تقع أيضًا في الربع الأول.

حاول بنفسك

حدد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التي قياساتها كالآتي :

٤] -20.20°

٣] 875°

٢] -220°

١] 67°

على الزاوية الموجهة



من أسئلة الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزوج المرتب (وـ ، حـ) يمثل الزاوية الموجهة

- (أ) د و ب ح (ب) د ب و ح (ج) د ب ح و (د) د و ح ب

(٢) يقال للزاويا الموجهة في الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها نفس

- (أ) الضلع الابتدائى. (ب) الضلع النهائى. (ج) رأس الزاوية. (د) اتجاه الدوران.

(٣) إذا كانت θ هو أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب لها هو

- (أ) $\theta - 360^\circ$ (ب) $180^\circ - \theta$ (ج) $360^\circ - \theta$ (د) $\theta - 360^\circ$

(٤) إذا كانت الزاوية الموجهة في الوضع القياسى فأى مما يأتى صحيح ؟

① رأسها نقطة الأصل.

② ضلعها الابتدائى ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

③ قياسها موجب.

(أ) فقط ① (ب) ① ، ② فقط.

(ج) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(٥) إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في الوضع القياسى ، $\exists \nu$ صـ

فإن الزوايا التى قياساتها $(\theta \pm \nu \times 360^\circ)$ تسمى بالزوايا

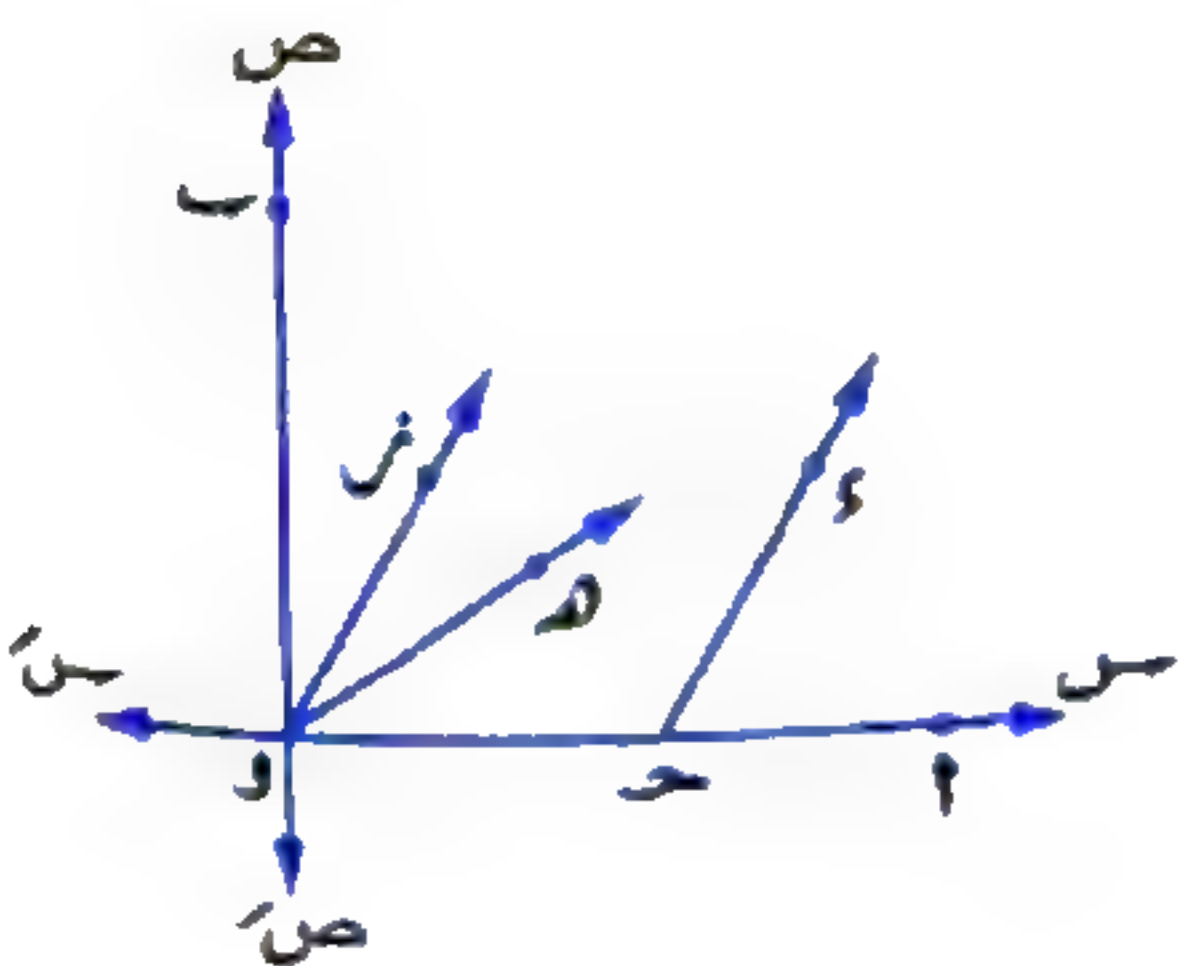
- (أ) المتكافئة. (ب) الربعية. (ج) المتكاملة. (د) المتجاورة.

(٦) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات

- (أ) 360° (ب) 180° (ج) 90° (د) 60°

أى من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسى ؟

فسر إجابتك.



(٢) (أـ ، وـ)

(٤) (أـ ، وـ)

(٦) (أـ ، وـ)

(١) (أـ ، حـ)

(٣) (وـ ، أـ)

(٥) (وـ ، وـ)

٣ أى الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي ؟ فسر إجابتك.

(١)	(٢)	(٣)
(٤)	(٥)	(٦)
(٧)	(٨)	(٩)

٤ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية :

(١)	(٢)	(٣)
(٤)	(٥)	(٦)

٥ ضع كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي ، موضحاً ذلك بالرسم :

(١) ٣٢°	(٢) ١٤٠°	(٣) ٨٠°	(٤) ١١٠°	(٥) ٣١٥°
---------	----------	---------	----------	----------

٦ عيّن الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالاتي :

(١) ٢٤°	(٢) ٢١٥°	(٣) ٥٠°	(٤) ٢١٠°
(٥) ١٥٠°	(٦) ٨٩°	(٧) ١٨٠°	(٨) ٢٦٩°

٧ عيّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي ثم عيّن الربع الذي تقع فيه كل زاوية :

(١) 56°	(٢) 60°	(٣) 215°	(٤) 94°
(٥) 415°	(٦) 870°	(٧) 1120°	(٨) 590°

٨ عيّن أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

(١) 83°	(٢) 136°	(٣) 9°
(٤) 264°	(٥) 964°	(٦) 107°

٩ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

(١) 4°	(٢) 150°	(٣) 125°	(٤) 240°	(٥) 180°
---------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها
 (١) 120° (ب) 240° (ج) 300° (د) 420°
- (٢) الزاوية التي قياسها 585° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها
 (١) 45° (ب) 135° (ج) 225° (د) 315°
- (٣) الزاوية التي قياسها 950° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها
 (١) 130° (ب) $130^\circ -$ (ج) 235° (د) $230^\circ -$
- (٤) جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية التي قياسها 75° في الوضع القياسي ما عدا
 (١) $285^\circ -$ (ب) $645^\circ -$ (ج) 285° (د) 435°
- (٥) الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها 1670° هو
 (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (٦) الزاوية التي قياسها $(135^\circ -)$ تقع في الربع
 (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (٧) الزاوية التي قياسها $(850^\circ -)$ تقع في الربع
 (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (٨) جميع الزوايا التي قياساتها كالآتي تقع في الربع الثاني ما عدا
 (١) $240^\circ -$ (ب) 100° (ج) $120^\circ -$ (د) 860°
- (٩) الزاوية التي قياسها $45^\circ + (4 + 1) \times 90^\circ$ تقع في الربع (حيث $n \in \mathbb{Z}$)
 (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (١٠) إذا كان : a ، b قياسي زاويتين متكافئتين فإن : $a - b$ ، $a + b$ يكونان
 (١) متكاملتين. (ب) متكافئتين. (ج) متتامتين. (د) مجموعهما 360°

اكتشف الخطأ

١١ اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان في الضلع النهائي للزاوية التي قياسها (-135°)

إجابة كريم

أصغر زاوية بقياس موجب $= -135^\circ + 180^\circ = 45^\circ$
زاوية بقياس سالب $= -135^\circ - 180^\circ = -315^\circ$

إجابة زياد

أصغر زاوية بقياس موجب $= -135^\circ + 360^\circ = 225^\circ$
زاوية بقياس سالب $= -135^\circ - 360^\circ = -495^\circ$

أي الإجابتين صحيحة ؟

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان α ، β قياسى زاويتين متكافئتين فأى مما يأتى يمثل قياسى زاويتين متكافئتين أيضاً حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ؟

- (أ) $(\alpha + \beta)$ ، $(\alpha - \beta)$ ، (ب) $(\alpha - \beta)$ ، $(\beta - \alpha)$
(ج) $(\alpha - \beta)$ ، $(\beta - \alpha)$ (د) كل ما سبق صحيح.

(٢) إذا كان α ، β قياسى زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم α هى

- (أ) 150° (ب) 90° (ج) 180° (د) 270°

(٣) إذا كان $(3\pi - \theta)$ أصغر قياس موجب ، $(3\pi - \theta)$ أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن : $\pi - \theta =$

- (أ) 360° (ب) 180° (ج) 120° (د) 90°

(٤) إذا كان $(20^\circ + \theta)$ ، $(20^\circ - \theta)$ هما القياسان الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب فإن أقل قيمة موجبة لـ θ تكون

- (أ) 20° (ب) 10° (ج) 30° (د) 40°

(٥) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها 60° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يمثل الزاوية التى قياسها

- (أ) 60° (ب) 120° (ج) 150° (د) 240°

(٦) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها 30° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يكون فى الربع

- (أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٧) إذا كان الضلع النهائي للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة $(-1, 0)$ فإن الضلع النهائي يقع فى

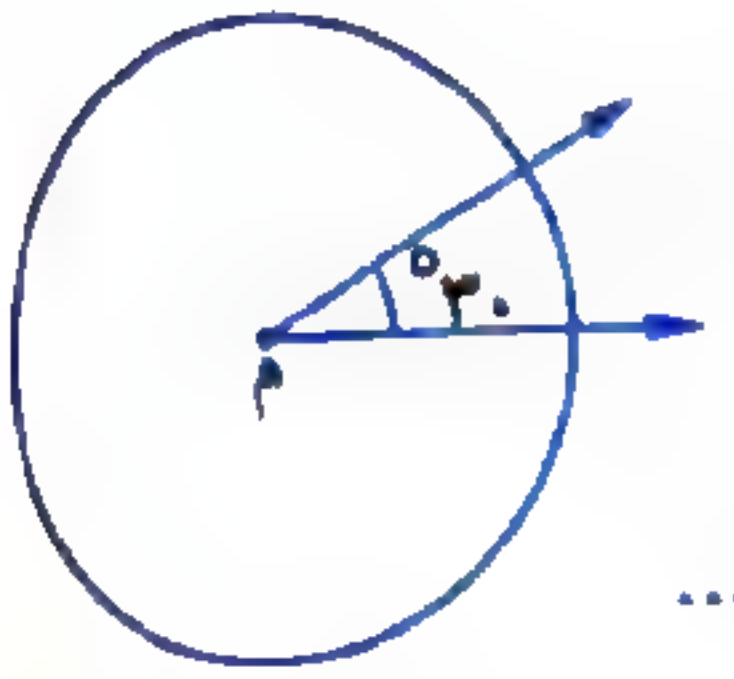
- (أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (ج) الربع الثالث. (د) غير ذلك.



2

القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

القياس الستيني للزاوية



تعتمد فكرته على تقسيم الدائرة إلى 360 قوسًا متساوية في الطول ، وعليه فالزاوية المركزية التي ضلعاها يمران بنهايتي أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة ويرمز لها بالرمز ° 1 والزاوية المركزية التي تحصر بين ضلعيها 30 قوسًا من هذه الأقواس يكون قياسها 30 ° وهكذا ...

وحدة قياس الزاوية في القياس الستيني

الدرجة هي وحدة قياس الزاوية في القياس الستيني ، وتنقسم الدرجة إلى 60 جزءًا متساويًا كل منها يسمى دقيقة ويرمز لها بالرمز ' ، كما تنقسم الدقيقة إلى 60 جزءًا متساويًا كل منها يسمى ثانية ويرمز لها بالرمز ''

أي أن ° 1 = 60 ' ، ° 1 = 60 ''

وفي هذا النوع من القياس تستخدم المنقلة كوسيلة لقياس الزوايا بالدرجات.

تذكر أنه :

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتحويل أجزاء الدرجات والدقائق إلى دقائق وثوانٍ والعكس

فمثلا

$$37 \frac{3}{8} = 37^{\circ} 22' 30''$$

$$70 \frac{5}{8} = 70^{\circ} 37' 30''$$

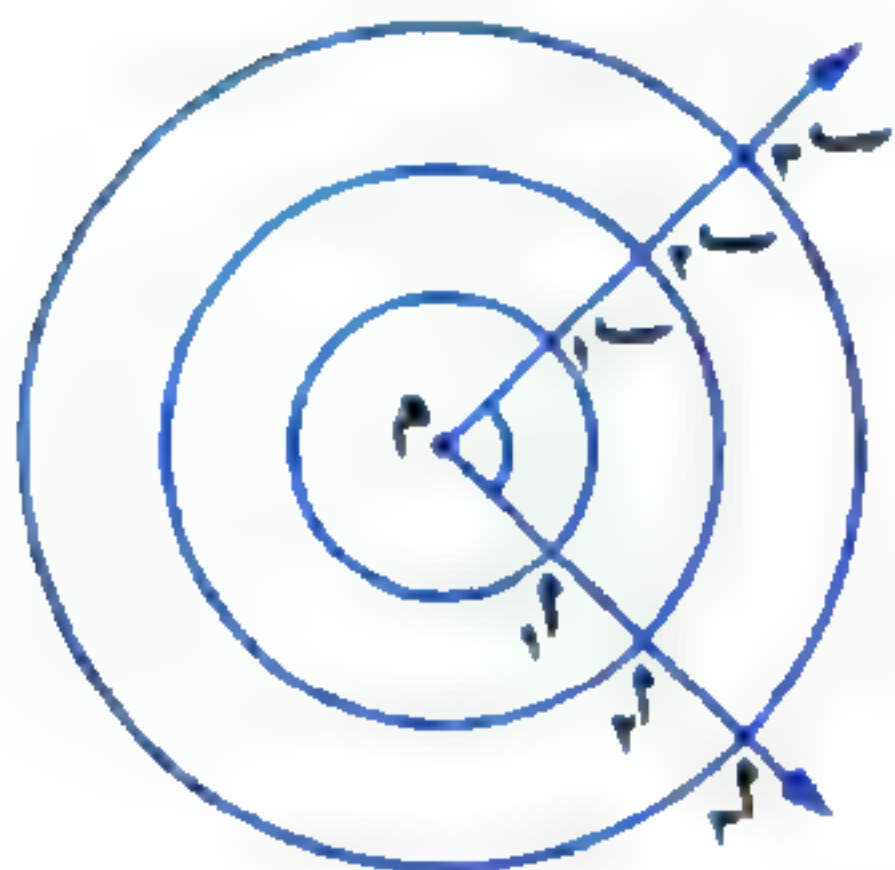
$$37^{\circ} 22' 30'' = 37 \frac{3}{8}^{\circ}$$

$$70^{\circ} 37' 30'' = 70 \frac{5}{8}^{\circ}$$

يعتمد هذا القياس على الحقيقة الهندسية الآتية

في الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظر تساوى مقداراً ثابتاً يتوقف على قياس الزاوية التى تحصر هذا القوس.

فى الشكل المقابل :



$$\text{طول القوس} \frac{\text{طول القوس}}{r_1} = \frac{\text{طول القوس}}{r_2} = \frac{\text{طول القوس}}{r_3} = \text{مقدار ثابت.}$$

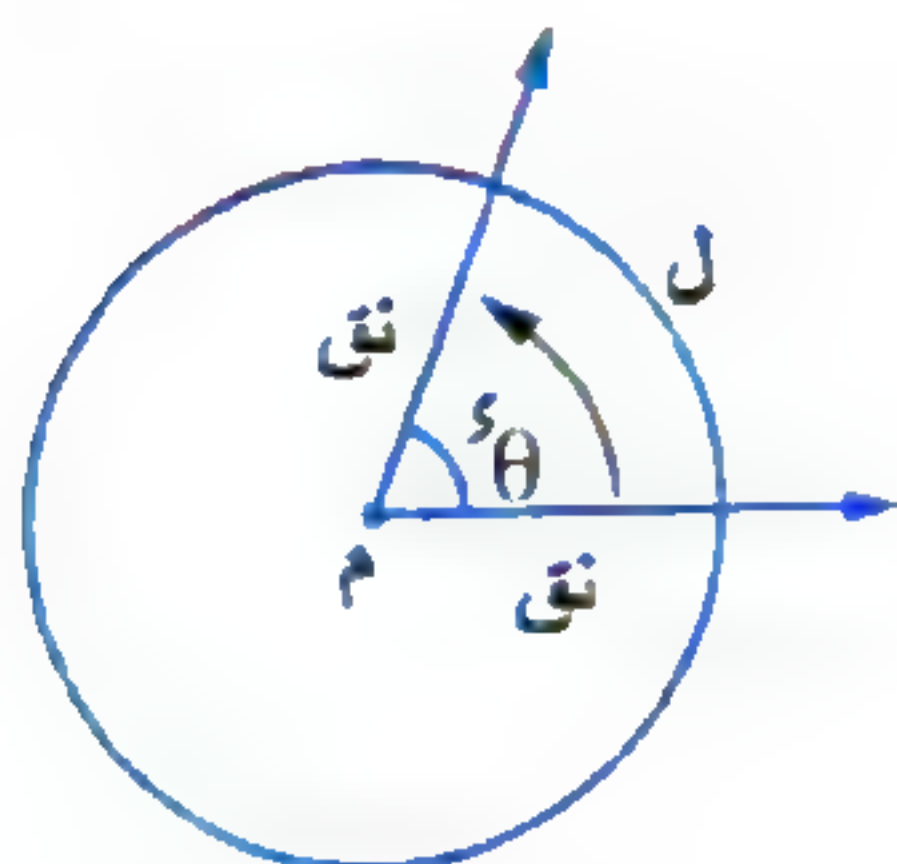
هذا المقدار الثابت يسمى بـ «القياس الدائري للزاوية»

أى أن

القياس الدائري لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

مما سبق يمكن صياغة التعريف السابق رمزياً كما يلى :

تعريف



إذا كان θ هو القياس الدائري لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق

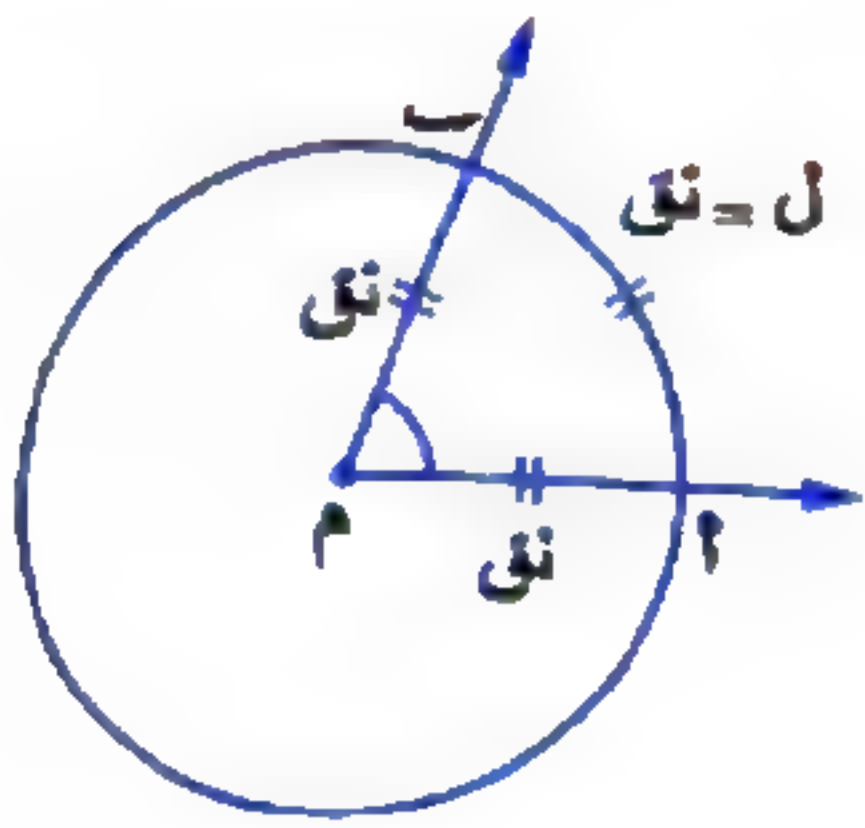
$$\text{وتقابل قوساً طوله } L \text{ فإن : } \theta = \frac{L}{r}$$

وحيث إن طول نصف قطر الدائرة نق مقدار ثابت فإن القياس الدائري لزاوية مركزية فى دائرة يتناسب طردياً مع طول القوس المقابل لها. أى أن $\theta \propto L$

وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائري

الزاوية النصف قطرية هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائري ، ويرمز لها بالرمز $^{\circ}$ ويُقرأ «واحد دائري» (راديان) ، ويمكن تعريف الزاوية النصف قطرية كالتالى :

تعريف



الزاوية النصف قطرية هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوساً طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة.

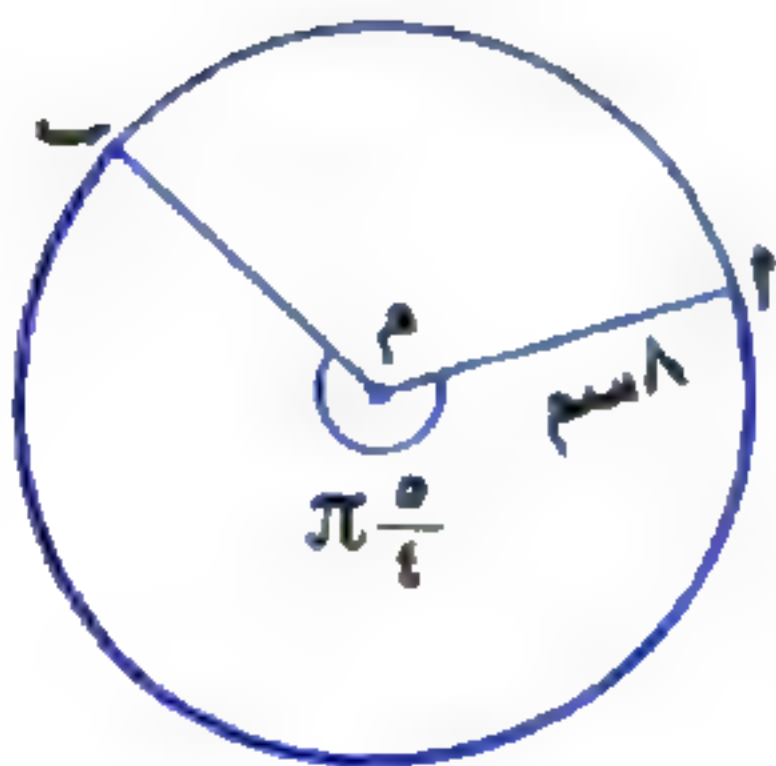
لاحظ أن $\theta = \frac{L}{r}$ $\therefore \theta = \frac{r}{r} = 1$

مثلاً

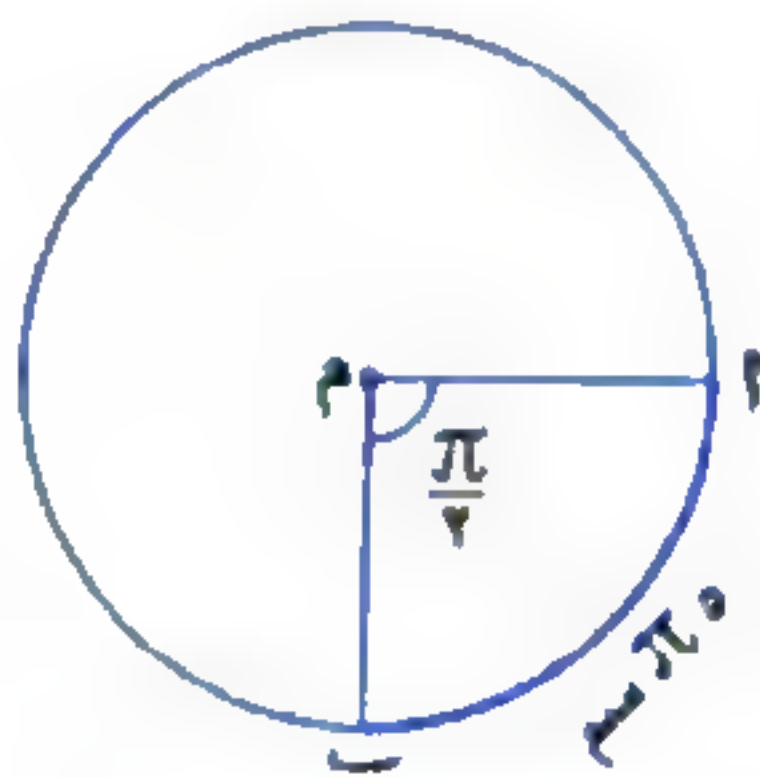
الزاوية المركزية التي تحصر قوساً طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرتها يكون قياسها $\theta = 2$

مثال ١

في كل من الدوائر الآتية أوجد المطلوب أسفل كل شكل لأقرب جزء من عشرة:



طول 'أ' الأكبر.



طول نصف قطر الدائرة م



ج (د م ب) بالقياس الدائري.

الحل

$\theta = ?$ ، $L = 8\pi$ سم ، $r = 12$ سم

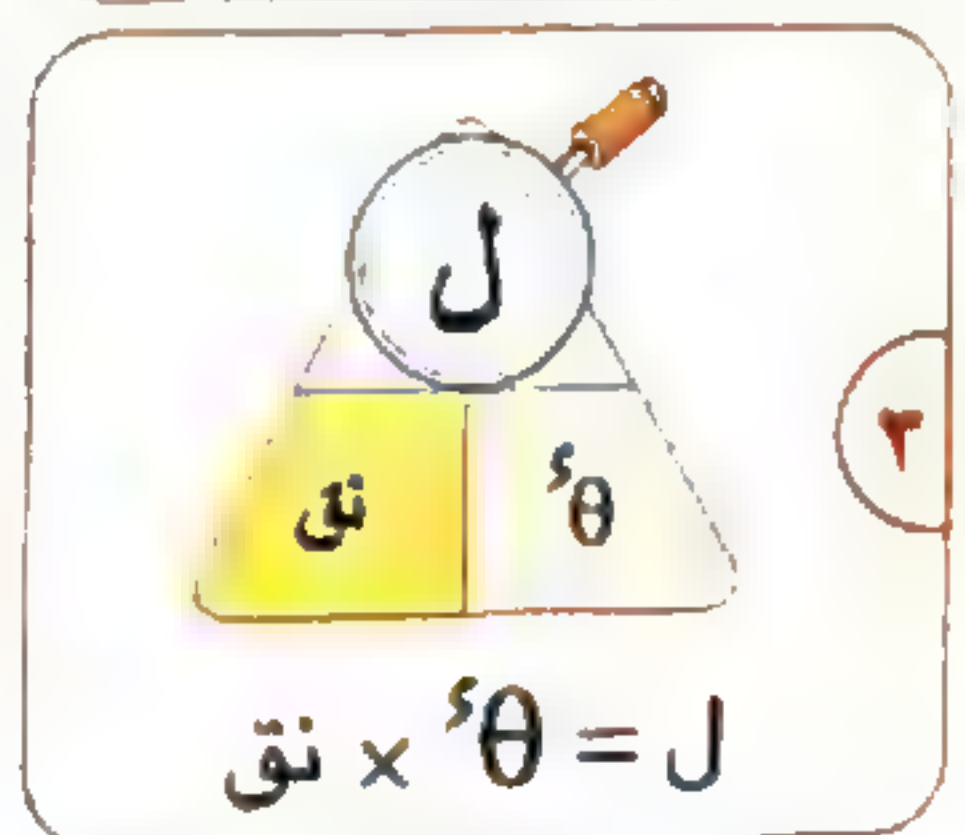
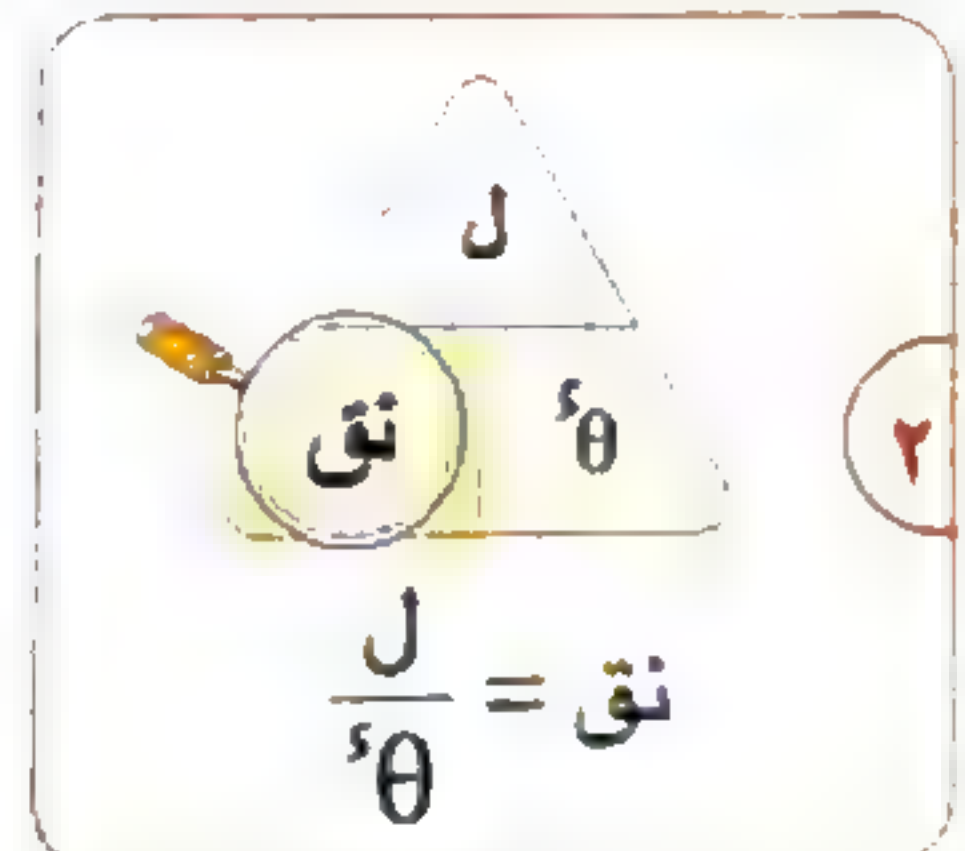
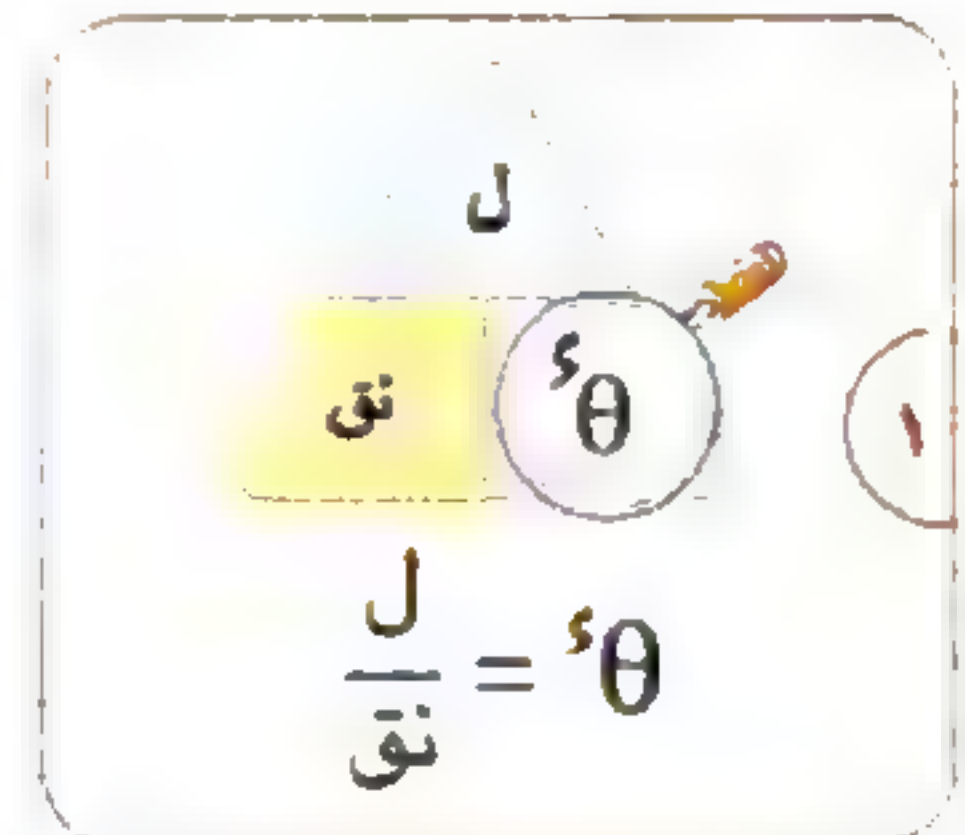
\therefore ج (د م ب) بالقياس الدائري $= \frac{L}{r} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} = \pi \times \frac{2}{3} = 2.1$

$r = ?$ ، $L = 5\pi$ سم ، $\theta = \frac{\pi}{4}$

\therefore طول نصف القطر $= \frac{L}{\theta} = \frac{5\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{\pi} \times 4 = 5 \times 4 = 20$ سم

$L = ?$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $r = 8$ سم

\therefore طول 'أ' الأكبر $= \theta \times r = \frac{\pi}{4} \times 8 = \pi \times 2 = 2\pi = 6.3$ سم



إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة ويكون $\theta = \angle$

فمثلاً فى دائرة الوحدة الزاوية المركزية التى تقابل قوساً طوله $\frac{1}{4}\pi$ وحدة طول قياسها بالتقدير الدائرى $= \frac{1}{4}\pi$ (راديان) $= 1,57^\circ$

حاول بنفسك

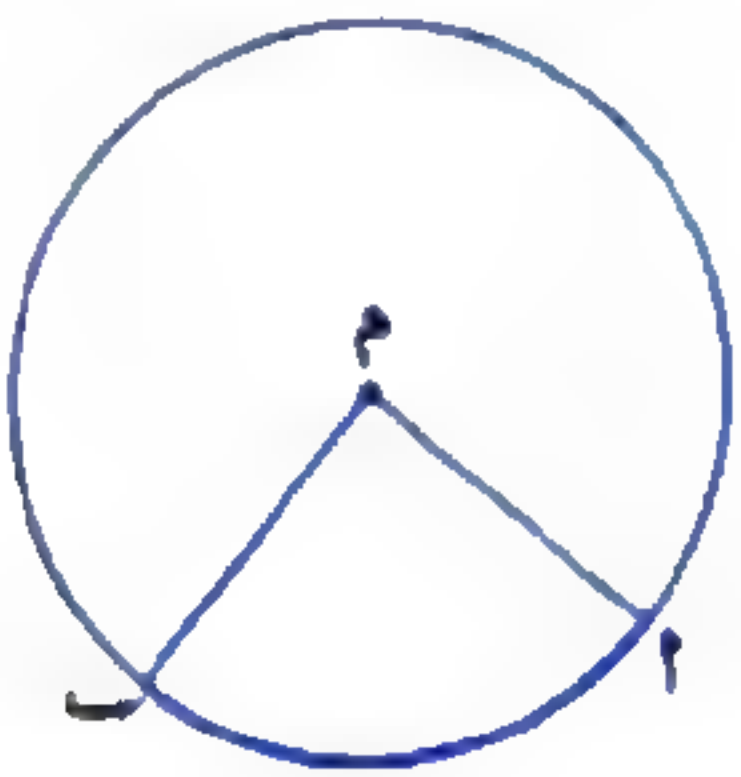
١ أوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوساً فى دائرة طوله ١٥ سم إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم.

٢ أوجد طول القوس فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله $\frac{7\pi}{12}$ مقرباً الناتج لرقمين عشريين.

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها $\frac{9\pi}{8}$ وتحصر قوساً طوله ٢٤ سم لأقرب رقم عشرى واحد.

العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الستينى

نعلم أنه فى أى دائرة يكون : $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول هذا القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$



أى أنه فى الشكل المقابل : $\frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi r} = \frac{\theta}{360^\circ}$

$$\therefore \theta = \frac{360^\circ}{2\pi r} \times \text{طول } \widehat{AB} \quad \therefore \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\pi r} = \frac{\theta}{180^\circ}$$

وبفرض أن : θ يساوى s° بالقياس الستينى ويساوى θ' بالقياس الدائرى

$$\therefore \frac{s^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta'}{\pi}$$

وأن : طول $\widehat{AB} = L$

$$\therefore \theta' = \frac{L}{\pi}$$

$$\therefore \frac{\theta'}{\pi} = \frac{s^\circ}{180^\circ} \quad \text{ومنها} \quad \theta' = \frac{\pi}{180^\circ} \times s^\circ, \quad s^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \times \theta'$$

مثال ٢

١ أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية القياس الدائرى للزاوية التى قياسها الستينى $75^\circ 22' 15''$

٢ أوجد القياس الستينى للزاوية التى قياسها الدائرى $2,38$

$$\therefore \theta = 70.4260 = \frac{\pi}{180} \times 126.2150$$

$$\therefore \theta = 70.4260 = \frac{\pi}{180} \times 126.2150$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{180} \times \text{س} \quad \boxed{1}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{180}{\pi} \times \theta \quad \boxed{2}$$

حاول بنفسك

1 حوّل قياس الزاوية 1.2° إلى قياس ستيني.

2 حوّل قياس الزاوية 72.4° إلى قياس دائري مقرباً إلى رقمين عشريين.

معلومة إثرائية

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهي الجراد (Grade) وتساوي $\frac{1}{100}$ من قياس الزاوية المستقيمة. وعلى هذا فإنه : إذا كانت س ، θ ، ص هي قياسات ثلاث زوايا على التوالي بوحدات الدرجة ، والراديان ، والجراد

$$\text{فإن : } \frac{\text{س}}{180} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{\text{ص}}{100}$$

ملاحظات

1 إذا كان القياس الدائري للزاوية يساوي π (راديان) فإن قياسها الستيني $180^\circ = \frac{180}{\pi} \times \pi$

أي أن π بالتقدير الدائري تكافئ 180° بالتقدير الستيني

فمثلاً $\frac{2}{3}\pi$ تكافئ $120^\circ = 180 \times \frac{2}{3}$

2 إذا علم القياس الستيني لزاوية ما وطلب تحويله إلى القياس الدائري بدلالة π

فإننا نستخدم العلاقة : $\theta = \frac{\pi}{180} \times \text{س}$ ولا نعوض عن π

فمثلاً 18° تكافئ $\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{180} \times 18$ ، 135° تكافئ $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{180} \times 135$

مثال 3

عُن الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التي قياساتها كالاتي :

$$\boxed{1} \quad 2.2^\circ$$

$$\boxed{2} \quad -7.2^\circ$$

$$\boxed{3} \quad \frac{5}{4}\pi$$

الحل

لإيجاد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة نوجد قياسها بالتقدير الستيني.

$$1 \quad \therefore \text{س} = \theta = \frac{180}{\pi} \times 2.2 = \frac{180}{\pi} \times 2.2 \approx 115.44^\circ$$

\therefore الزاوية التي قياسها 2.2 تكافئ 115.44° بالتقدير الستيني.

، \therefore الزاوية التي قياسها 115.44° تقع في الربع الثاني.

\therefore الزاوية التي قياسها 2.2 تقع في الربع الثاني.

$$2 \quad \therefore \text{س} = -\theta = -\frac{180}{\pi} \times 7.3 = -\frac{180}{\pi} \times 7.3 \approx -418.16^\circ$$

، \therefore الزاوية التي قياسها -418.16° تكافئ $-418.16^\circ + 360^\circ \times 2 = 307.68^\circ$

\therefore الزاوية التي قياسها 307.68° تقع في الربع الرابع.

\therefore الزاوية التي قياسها -7.3 تقع في الربع الرابع.

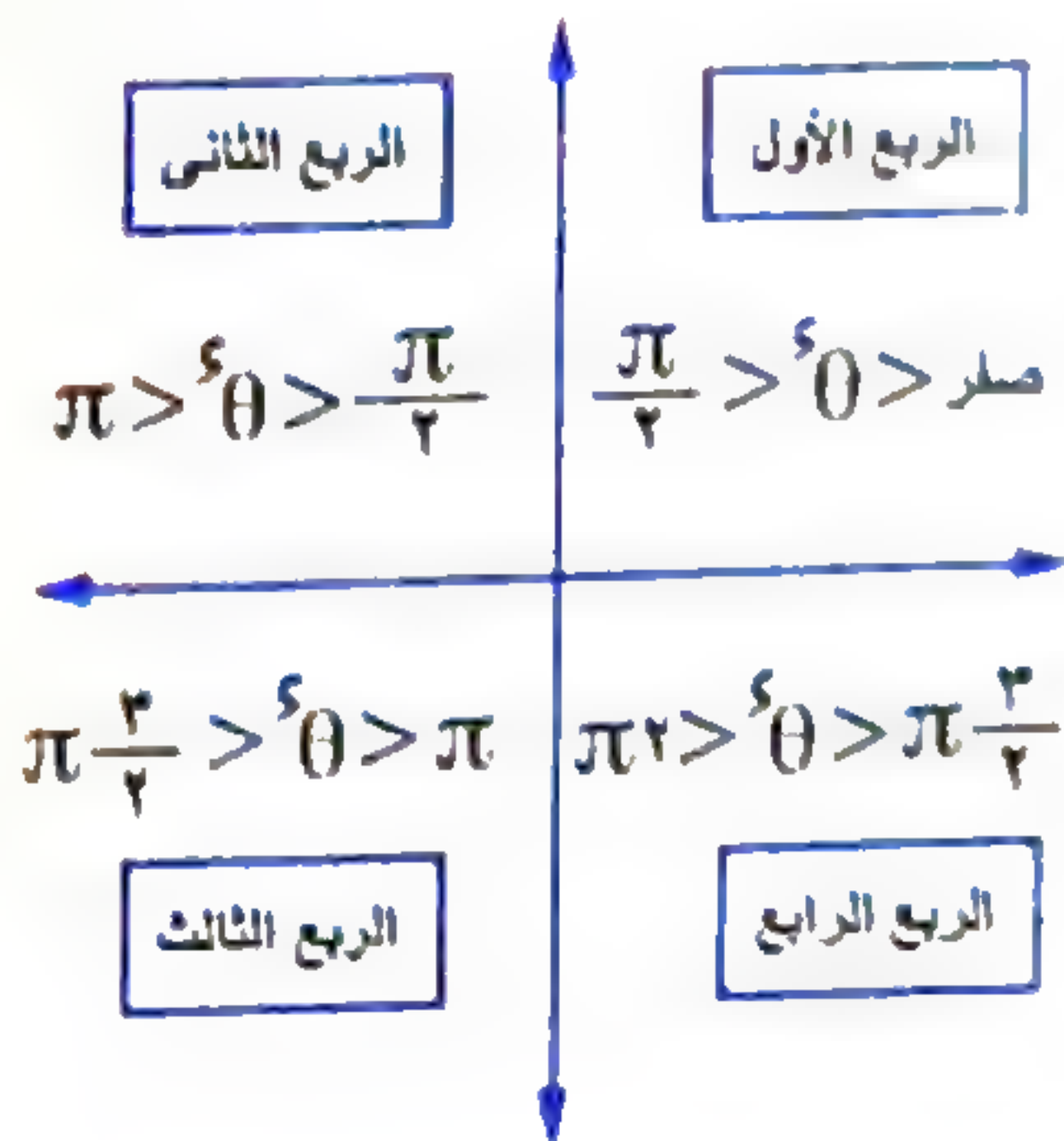
$$3 \quad \therefore \pi \frac{5}{4} \text{ تكافئ } 180^\circ \times \frac{5}{4} = 225^\circ$$

، \therefore الزاوية التي قياسها 225° تقع في الربع الثالث.

\therefore الزاوية التي قياسها $\pi \frac{5}{4}$ تقع في الربع الثالث.

ملاحظة

يمكن تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة المعلوم قياسها الدائري بدلالة π دون التحويل إلى القياس الستيني بملاحظة الشكل المقابل :



فمثلا باستخدام الشكل المقابل يمكن مباشرة أن نحدد الربع

الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها $\pi \frac{5}{4}$ في المثال السابق

$$\text{حيث إن } \pi \frac{3}{2} > \pi \frac{5}{4} > \pi$$

\therefore الزاوية التي قياسها $\pi \frac{5}{4}$ تقع في الربع الثالث.

حاول بنفسك

أوجد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الآتية :

$$1 \quad \text{الزاوية التي قياسها } \pi \frac{5}{4}$$

$$3 \quad \text{الزاوية التي قياسها } 5.7$$

$$2 \quad \text{الزاوية التي قياسها } -0.3 \pi$$

$$4 \quad \text{الزاوية التي قياسها } -6.4$$

مثال ٤

أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها $102^\circ 26' 17''$ مرسومة في دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر.

الحل

$$\therefore \theta = \theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times 102^\circ 26' 17'' = \frac{\pi}{180} \times 102,438^\circ$$

$$\therefore L = \theta \times \text{نق} = 2,6605 \times 10,5 = 28 \text{ سم}$$

مثال ٥

أوجد كلاً من القياس الدائري والقياس الستيني لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٢,٦ سم من دائرة طول نصف قطرها ٧,٢ سم

الحل

$$\theta = \frac{L}{\text{نق}} = \frac{12,6}{7,2} = 1,75^\circ, \quad \theta^\circ = \frac{180}{\pi} \times 1,75 = 100^\circ 16' 4''$$

مثال ٦

أوجد محيط الدائرة التي بها زاوية محيطية قياسها 30° يقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل

\therefore قياس الزاوية المحيطية = 30°

\therefore قياس الزاوية المركزية المناظرة لها = 60°

$$\therefore \theta = \theta^\circ = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{L}{\theta} = \frac{5}{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{\pi} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \times \text{نق} = 2\pi \times \frac{15}{\pi} = 30 \text{ سم}$$

مثال ٧

زاويتان مجموع قياسيهما الدائري $\frac{1}{7}3^\circ$ والفرق بين قياسيهما الستيني 30°
أوجد قياس كل منهما بالقياس الدائري والقياس الستيني $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

$$\therefore \frac{1}{7}3^\circ = \frac{180}{\pi} \times \frac{22}{7} = 180^\circ$$

وبفرض أن الزاويتين هما ٢ ، ٣ حيث : $3 < 2 < 180$

$$\therefore \angle (د) + \angle (د) = 180^\circ, \quad \angle (د) - \angle (د) = 30^\circ$$

$$\text{وبالجمع : } \therefore \angle (د) = 105^\circ$$

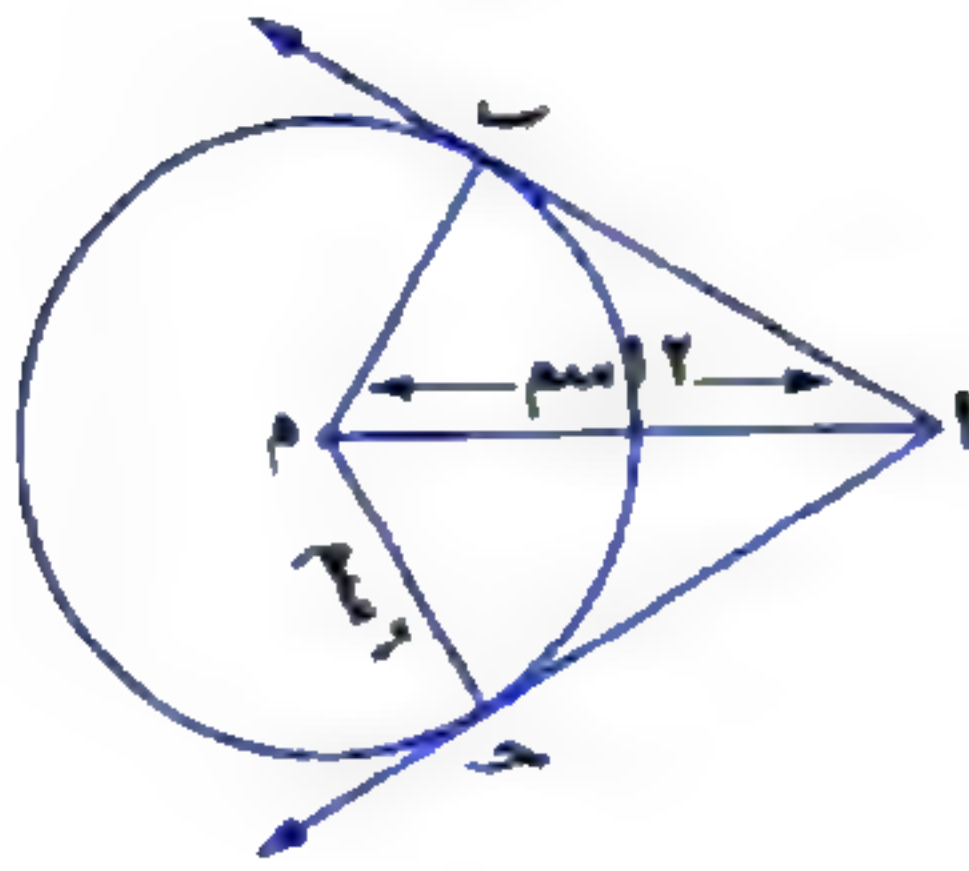
$$\therefore \angle (د) = 105^\circ \text{ ومنها : } \angle (د) = 75^\circ$$

$$\therefore \angle (د) \text{ بالتقدير الدائري} = 105^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1.83$$

$$\angle (د) \text{ بالتقدير الدائري} = 75^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1.31$$

مثال ٨

في الشكل المقابل :



أ ب ، أ ح مماسان للدائرة م التي طول نصف قطرها ٦ سم

فإذا كان : أ م = ١٢ سم

فأوجد طول القوس ب ح الأكبر لأقرب عدد صحيح.

الحل

$$\therefore \overline{AM} \perp \overline{BC}$$

\therefore أ ح مماس للدائرة م

في $\triangle AMH$: $\therefore \angle (أ ح م) = 90^\circ$ ، $\angle م = \frac{1}{2} \angle أ$

$$\therefore \angle (أ ح م) = 60^\circ$$

$$\therefore \angle (أ ح م) = 30^\circ$$

$$\therefore \angle (أ ب م) = 120^\circ$$

، \therefore أ م ينصف د ب ح

$$\therefore \angle (أ ب م ح) \text{ المنعكسة} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\therefore \theta = 240^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \pi \times \frac{\pi}{180}$$

$$\therefore \theta \times \text{نق} = \text{ل}$$

$$\therefore \text{طول ب ح الأكبر} = \pi \times \frac{4}{3} = 8\pi = 25 \text{ سم}$$

حاول بنفسك

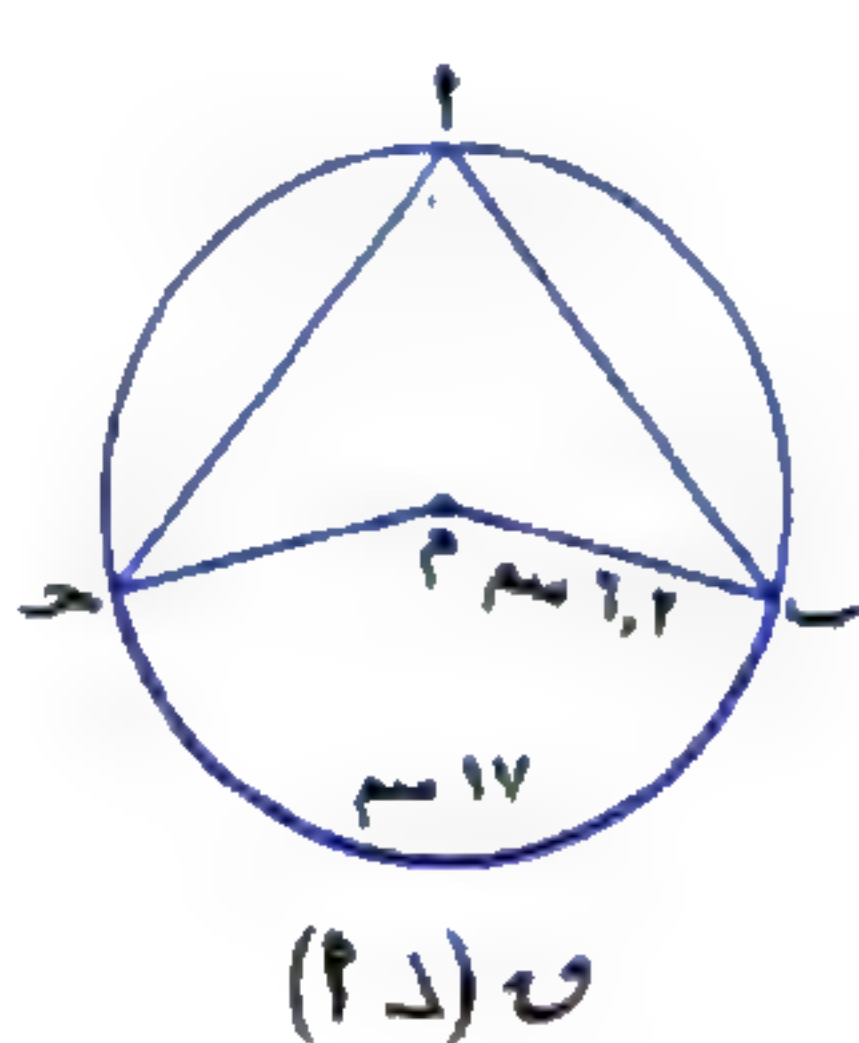
أوجد المطلوب أسفل كل شكل :

١



طول ب ح

٢



$\angle (أ ب)$



على القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

8

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد بدلالة π القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها كالتالي :

$^{\circ} 235 - (٤)$	$^{\circ} 300 (٣)$	$^{\circ} 90 (٢)$	$^{\circ} 135 (١)$
$^{\circ} 780 (٨)$	$^{\circ} 390 (٧)$	$^{\circ} 112 (٦)$	$^{\circ} 210 - (٥)$

٢ أوجد القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها الستينية كالتالي مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

$^{\circ} 37 (٣)$	$^{\circ} 56,6 (٢)$	$^{\circ} 58 (١)$
$^{\circ} 160 (٦)$	$^{\circ} 257 (٥)$	$^{\circ} 115 (٤)$

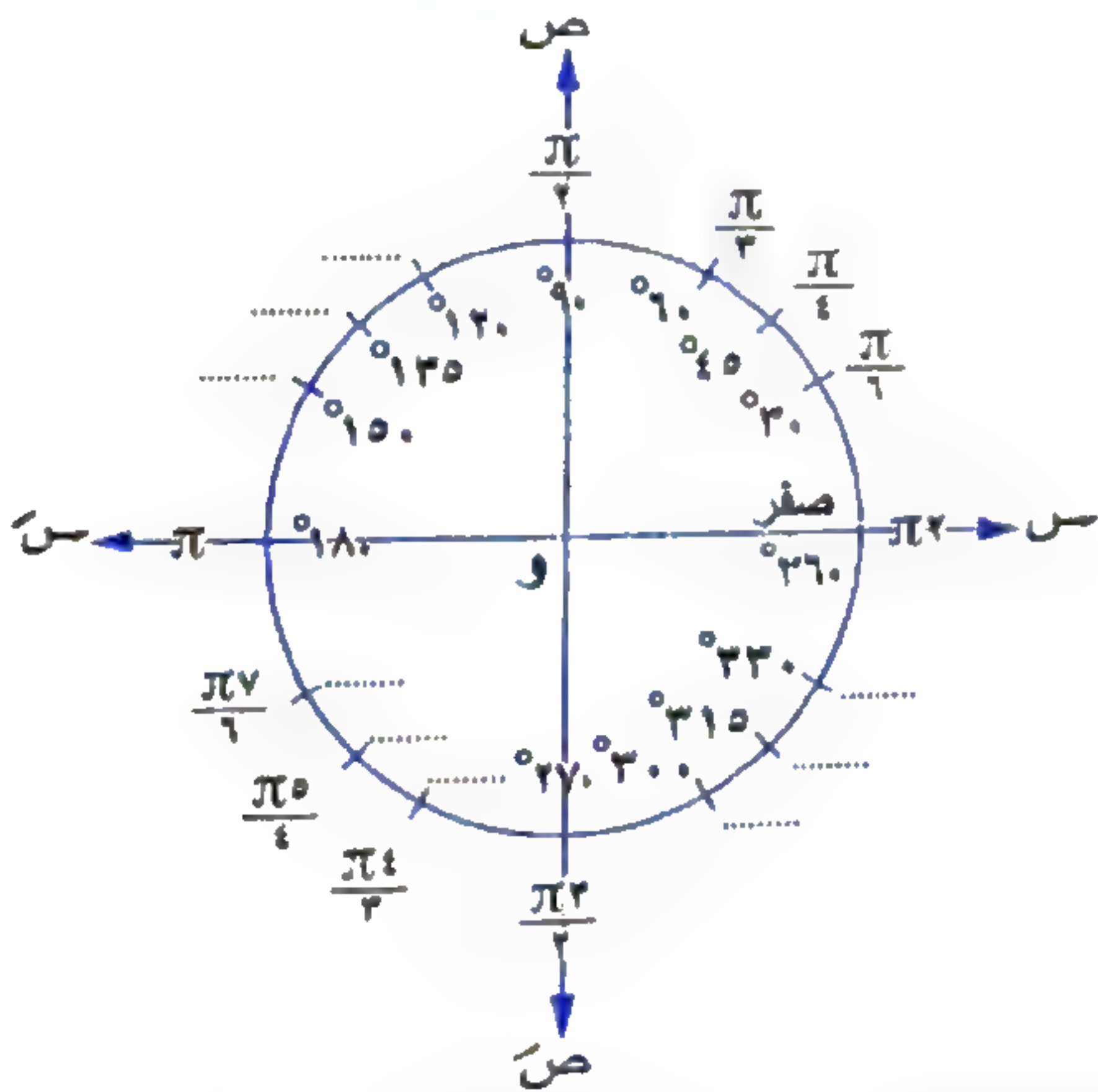
٣ أوجد القياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني) لكل من الزوايا التي قياساتها الدائرية كالتالي :

$^{\circ} 49 (٣)$	$\pi 0,72 (٢)$	$\pi \frac{11}{15} (١)$
$^{\circ} 3 \frac{1}{4} - (٦)$	$^{\circ} 2,27 (٥)$	$^{\circ} 1,67 - (٤)$

٤ الشكل المقابل يمثل قياسات بعض

الزوايا الخاصة بعضها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كُتب بالدرجات (داخل الدائرة).

اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.



٥ أوجد القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوساً طوله (ل) في دائرة طول نصف قطرها (نق) في كل من الحالات الآتية :

$ل = 14 \text{ سم} , \text{نق} = 7 \text{ سم} (٢)$	$ل = 12 \text{ سم} , \text{نق} = 10 \text{ سم} (١)$
$ل = 15,72 \text{ سم} , \text{نق} = 9,17 \text{ سم} (٤)$	$ل = 2\pi \text{ سم} , \text{نق} = 6 \text{ سم} (٣)$

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) في كل من الحالات الآتية :

$ل = 28,35 \text{ سم} , \theta = 0,767 (٢)$	$ل = 22,5 \text{ سم} , \theta = \frac{9}{8}\pi (١)$
$ل = 43,92 \text{ سم} , \theta = 78 \frac{26}{26} (٤)$	$ل = 24,325 \text{ سم} , \theta = 139 (٣)$

٧ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ في كل من الحالات الآتية :

- | | |
|--|---|
| (١) نق = ١٢,٥ سم ، $\theta = ١١,٦^\circ$ | (٢) نق = ٢٠ سم ، $\theta = ٢٠,٤٣^\circ$ |
| (٣) نق = ٧,٥ سم ، $\theta = ٦٧,٤^\circ$ | (٤) نق = ١٥ سم ، $\theta = ١٠٤,٥٨٩^\circ$ |

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{9}$ تقع في الربع

- (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6}$ تقع في الربع

- (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع

- (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٤) إذا كان القياس الستيني لزاوية $٤٣,٦^\circ$ فإن قياسها الدائري يساوى

- (١) $٠,٢٤\pi$ (ب) $٠,٢٤\pi$ (ج) $٠,٢٨\pi$ (د) $٠,٢٨\pi$

(٥) الزاوية التي قياسها الدائري $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى

- (١) $٥٤,٠^\circ$ (ب) $٨٢,٠^\circ$ (ج) $١٥٠,٠^\circ$ (د) $٤٨٠,٠^\circ$

(٦) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي بالتقدير الدائري يساوى

- (١) ٢π (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) ٢π

(٧) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى $١٨٠^\circ \times (٢ - n)$ حيث n عدد الأضلاع

فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائري يساوى

- (١) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{5}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٨) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى سم

- (١) ٥π (ب) ٤π (ج) ٣π (د) ٢π

(٩) القوس الذى طوله ٥π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها

يساوى

- (١) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°

(١٠) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{3}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة

يساوى

- (١) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{12}$

(١١) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{\pi}$ فإن طول قوسه = سم
 (أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (ج) ٤,٢ (د) ٤,٨

(١٢) أ ب ح د شكل رباعي دائري ، و (د) = 60° فإن : و (د ح) =
 (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{\pi^2}{3}$ (د) $\frac{\pi^5}{6}$

(١٣) في الشكل المقابل :

لايجاد طول أ ب يكون كافياً الحصول على

(أ) Δ أ م ب متساوي الأضلاع محيطه ٣٠ سم فقط.

(ب) محيط الدائرة = 10π سم فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معاً.

(د) لا شيء مما سبق.

(١٤) القياس الدائري للزاوية الخارجة عن الشكل السباعي المنتظم يساوي

(أ) $\pi \frac{1}{7}$ (ب) $\pi \frac{2}{7}$ (ج) $\pi \frac{2}{7}$ (د) $\pi \frac{4}{7}$

(١٥) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب ، أ ح مماسين للدائرة م وكان

و (د) = $\frac{5}{11}\pi$ وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر ح =

(أ) ٢- (ب) $\frac{28}{\pi}$ (ج) ٢٨ (د) 20π

(١٦) الزاوية التي قياسها $20^\circ + 180^\circ (1 + n)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ تكافئ زاوية قياسها الدائري هو

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) π (ج) $\pi \frac{7}{6}$ (د) $\pi \frac{5}{3}$

(١٧) إذا كان طول قوس من دائرة يساوي $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس قياسها الستيني يساوي

(أ) 20° (ب) $40^\circ 67$ (ج) 135° (د) 43° تقريباً.

(١٨) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري يساوي

(أ) $\frac{1}{4}$ طول قوسها.

(ب) $\frac{1}{4}$ طول قوسها.

(ج) طول قوسها.

(د) ضعف طول قوسها.

٩ أوجد محيط الدائرة التي فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها 45° «٤٨ سم»

١٠ أوجد القياس الدائري والستيني لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٣ أمثال طول نصف قطر دائرتها.

«٣ ، $171^\circ 53' 64''$ »

١١ إذا كان قياس زاوية مركزية في دائرة يساوي 105° وتحصر قوسًا طوله $\frac{7}{3}\pi$ سم أوجد طول قطر الدائرة.

٨٠ سم

١٢ مثلث قياس إحدى زواياه 60° وقياس زاوية أخرى منه يساوي $\frac{\pi}{4}$

أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

70° ، $\pi \frac{5}{12}$

١٣ شكل رباعي قياس إحدى زواياه $\frac{11}{6}$ وقياس زاوية أخرى منه $\frac{4}{9}2^\circ$ وقياس زاوية ثالثة منه 45°

أوجد القياس الستيني والقياس الدائري لزاويته الرابعة. $(\frac{22}{7} \approx \pi)$

70° ، $\frac{11}{6}$

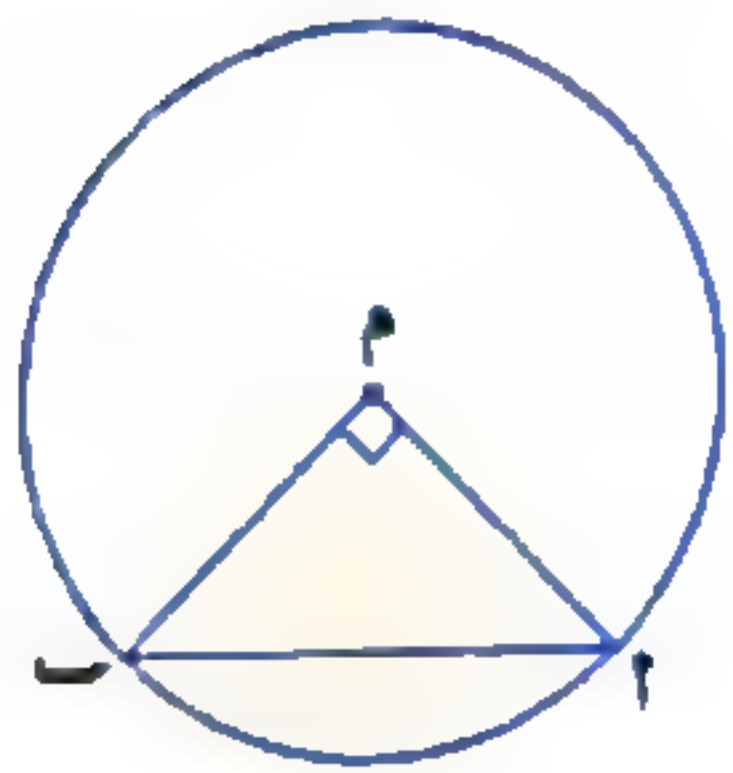
١٤ زاويتان مجموع قياسيهما 70° والفرق بينهما $\frac{\pi}{5}$ أوجد قياسيهما بالتقدير الستيني والدائري.

53° ، 17° ، $\pi \frac{57}{18}$ ، $\pi \frac{17}{18}$

١٥ زاويتان متكاملتان الفرق بين قياسيهما $\frac{\pi}{3}$ أوجد قياسى الزاويتين بالتقديرين الستيني والدائري.

120° ، 60° ، $\pi \frac{2}{3}$ ، $\pi \frac{1}{3}$

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية

في م تساوي ٣٢ سم^٢

فأوجد محيط الشكل المظلل تقريبًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

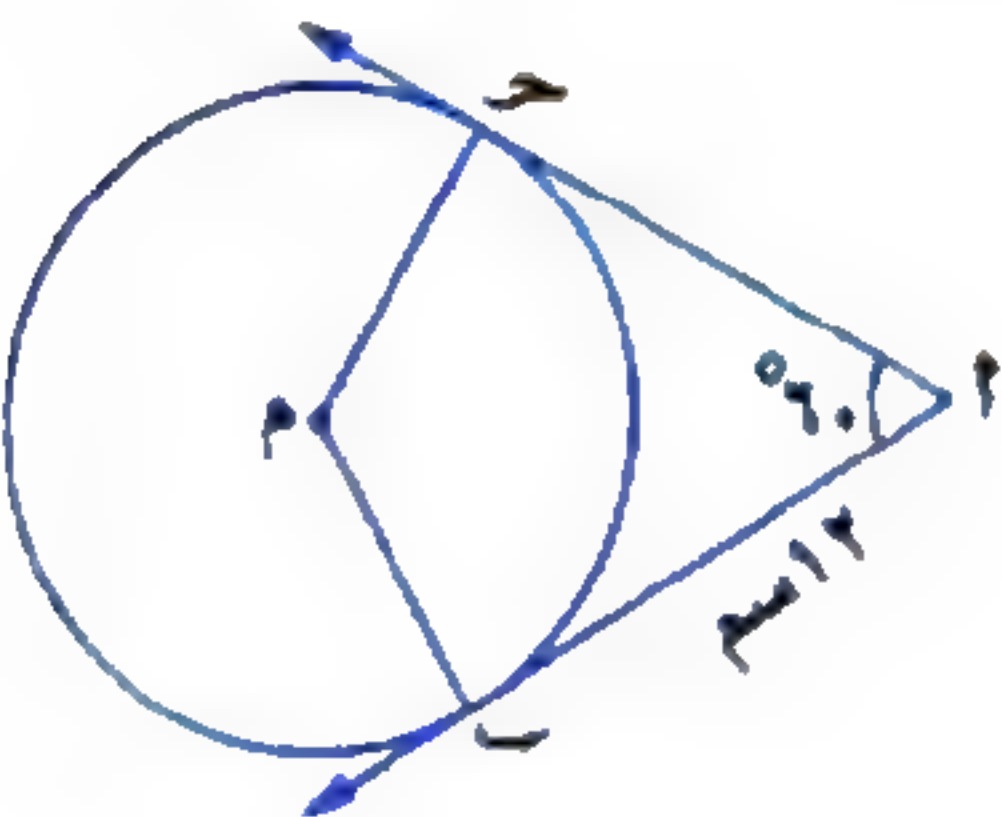
٢٨,٥٧ سم

١٧ س ص قطر في الدائرة م طوله ١٨ سم ، رسم الوتر ص ع بحيث \angle (د س ص ع) = 10°

أوجد طول القوس الأصغر س ع تقريبًا الناتج لرقمين عشريين.

٣,١٤ سم

١٨ في الشكل المقابل :



أ ب ، أ ح مماسان للدائرة م

، \angle (د ح أ ب) = 60° ، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر ح ب

٢٩ سم

١٩ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ح مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = ٢٤ سم

، ب ح = ١٢ سم فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التي تنقسم إليها الدائرة ب رؤوس هذا المثلث تقريبًا الناتج

لرقم عشري واحد.

٢٠ دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم تمر برءوس مثلث ABC فإذا كان :

$$\angle A = 60^\circ, \angle B = 40^\circ$$

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التي تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث.

١٥,٧ سم ، ١٤,١ سم ، ١٧,٢ سم.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا قطع القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 72° في دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم وثنى ليكون دائرة

فإن طول نصف قطر الدائرة الناتجة يساوى

- (أ) ١,٤ (ب) ٢,٨ (ج) ٥,٦ (د) ٧

(٢) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها M ، طول نصف قطرها ١٠ سم

فإذا كان طول AB $\in [0, 6]$

فإن قيمة $\angle C$ يمكن أن تكون

- (أ) 90° (ب) 60° (ج) 28° (د) 34°

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعي كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه

يساوى

- (أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{12}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٤) القياس الموجب للزاوية التي يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف

تماماً يساوى

- (أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{12}$ (ج) $\frac{\pi}{12}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٥) إذا كان طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 60° في دائرة يساوى طول القوس المقابل لزاوية

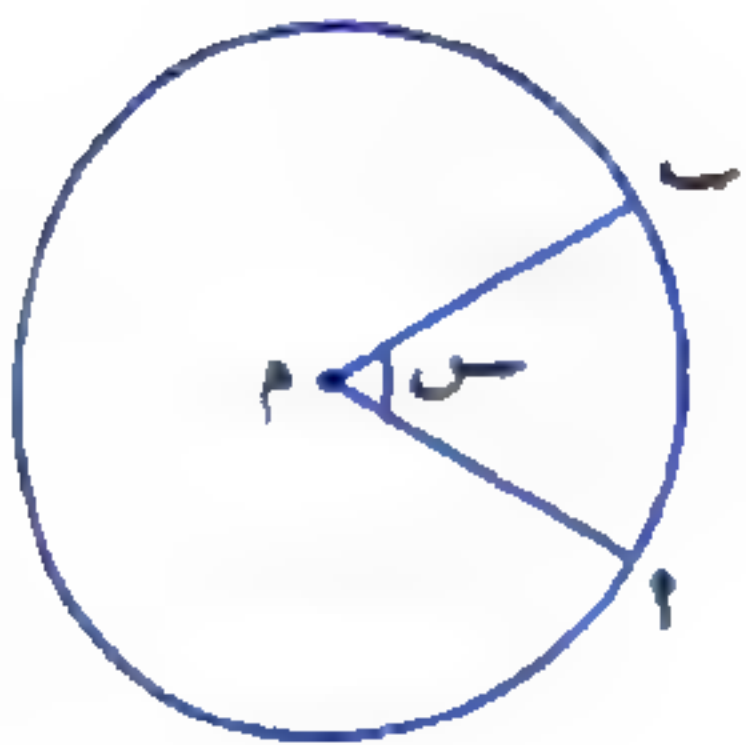
مركزية قياسها 80° في دائرة أخرى فإن النسبة بين طولى نصفى قطرى الدائرتين هى

- (أ) $\frac{5}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{9}{16}$

(٦) أسطوانة تدور ٤٥ دورة فى الدقيقة حول محورها فإن قياس الزاوية التي تدورها نقطة على سطحها

الجانبى فى الثانية الواحدة يساوى

- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) π



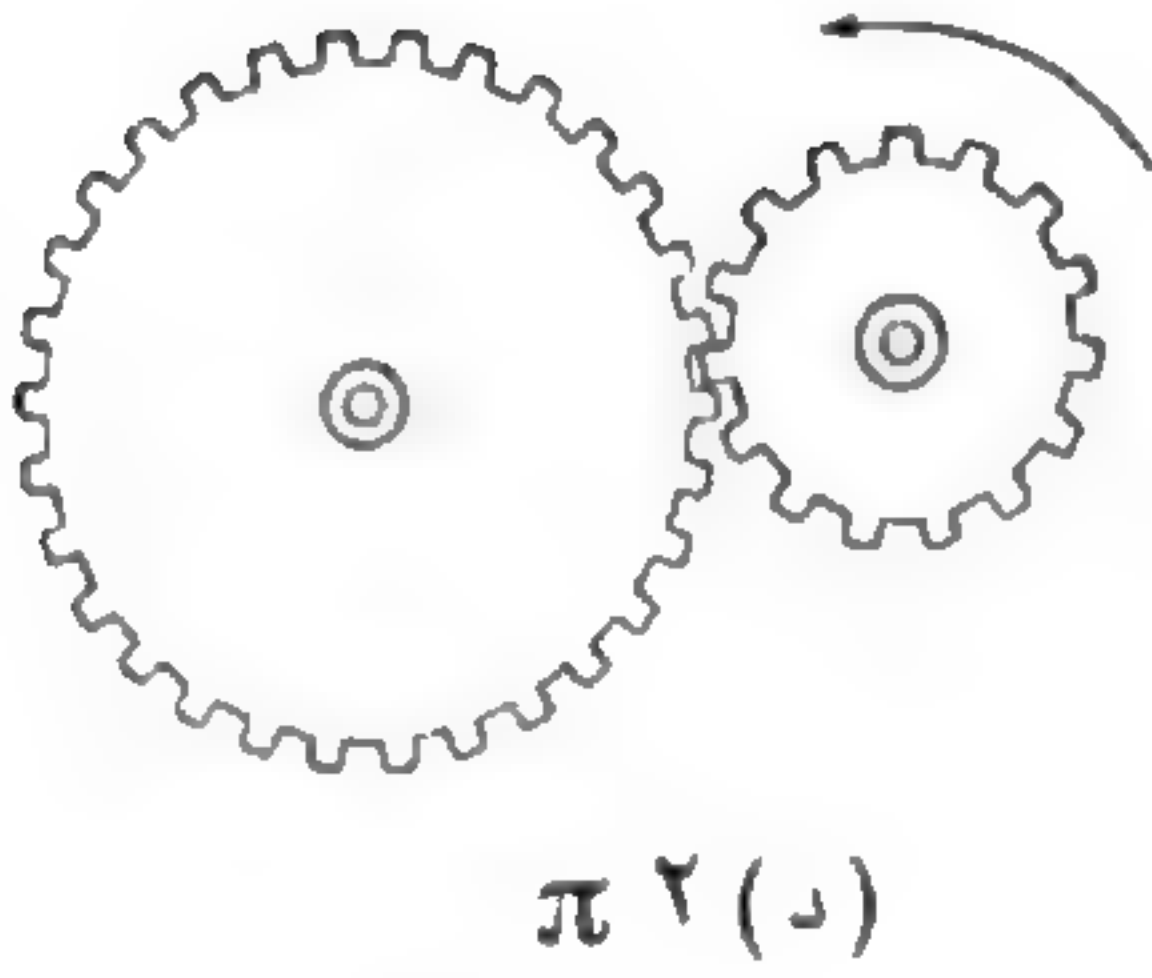
(٧) (قياس الدائرة) $\angle < \theta$ حيث θ عدد صحيح موجب فإن أكبر قيمة لـ θ هي

- (أ) ٨ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٣

(٨) المسافة التي يقطعها رأس عقرب الدقائق الذي طوله ٨ سم من الساعة السادسة صباحًا حتى الساعة الثالثة والرابع عصرًا تساوى سم

- (أ) $\pi \frac{27}{4}$ (ب) $\pi 148$ (ج) $\pi \frac{27}{2}$ (د) $\pi 592$

(٩) في الشكل المقابل :



إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاث لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة في الاتجاه الموضح بالسهم فإن قياس الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح

- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

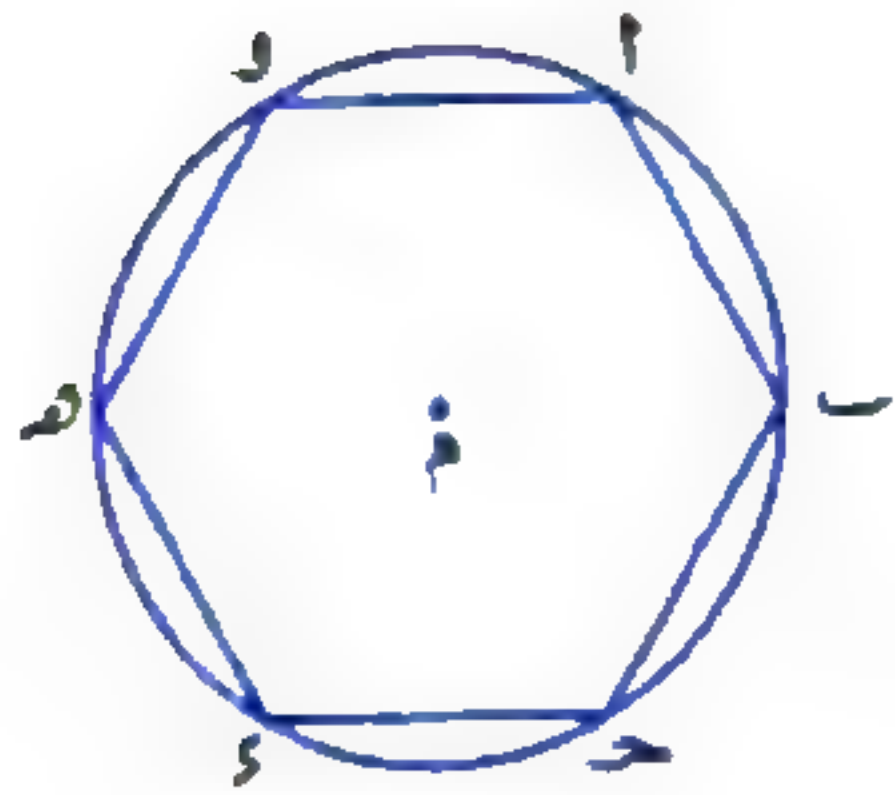
(١٠) في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ه طولاً نصفى قطريهما ٢١ سم ، ٧ سم على الترتيب إذا دارت الدائرة ه دورة كاملة من نقطة أ إلى نقطة ب فإن : $\angle AOB =$

- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{5}$ (د) π

(١١) في الشكل المقابل :

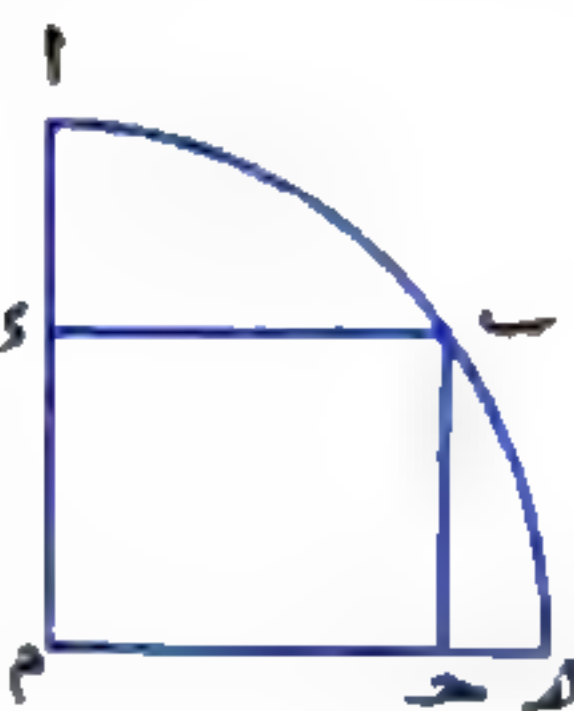


أ ب ح د ه و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم مرسوم داخل دائرة م فإن طول $\widehat{AB} =$ سم

- (أ) π (ب) $\pi \frac{4}{3}$ (ج) $\pi 2$ (د) $\pi \frac{5}{3}$

٢٢ مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ فى الوضع القياسى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم. «ص = $3\sqrt{2}$ سم»

٢٣ فى الشكل المقابل :



ربع دائرة ، رسم بداخله المستطيل ب ح د ه

بحيث ح د = ١٠ سم

أوجد : طول القوس \widehat{AB}

« ٥ π سم »



الدوال المثلثية

3

الدرس

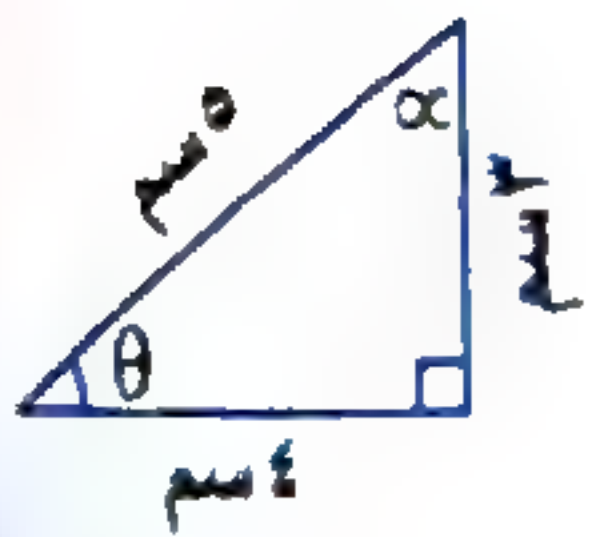
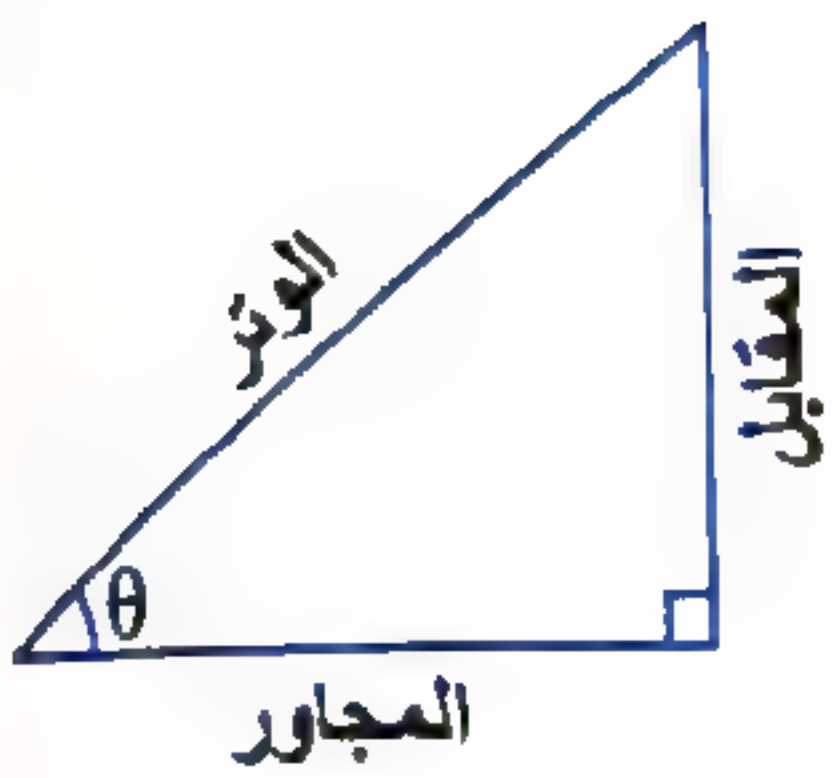
* درسنا فيما سبق النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة وعلمنا أنه :

• في أي مثلث قائم الزاوية يكون :

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

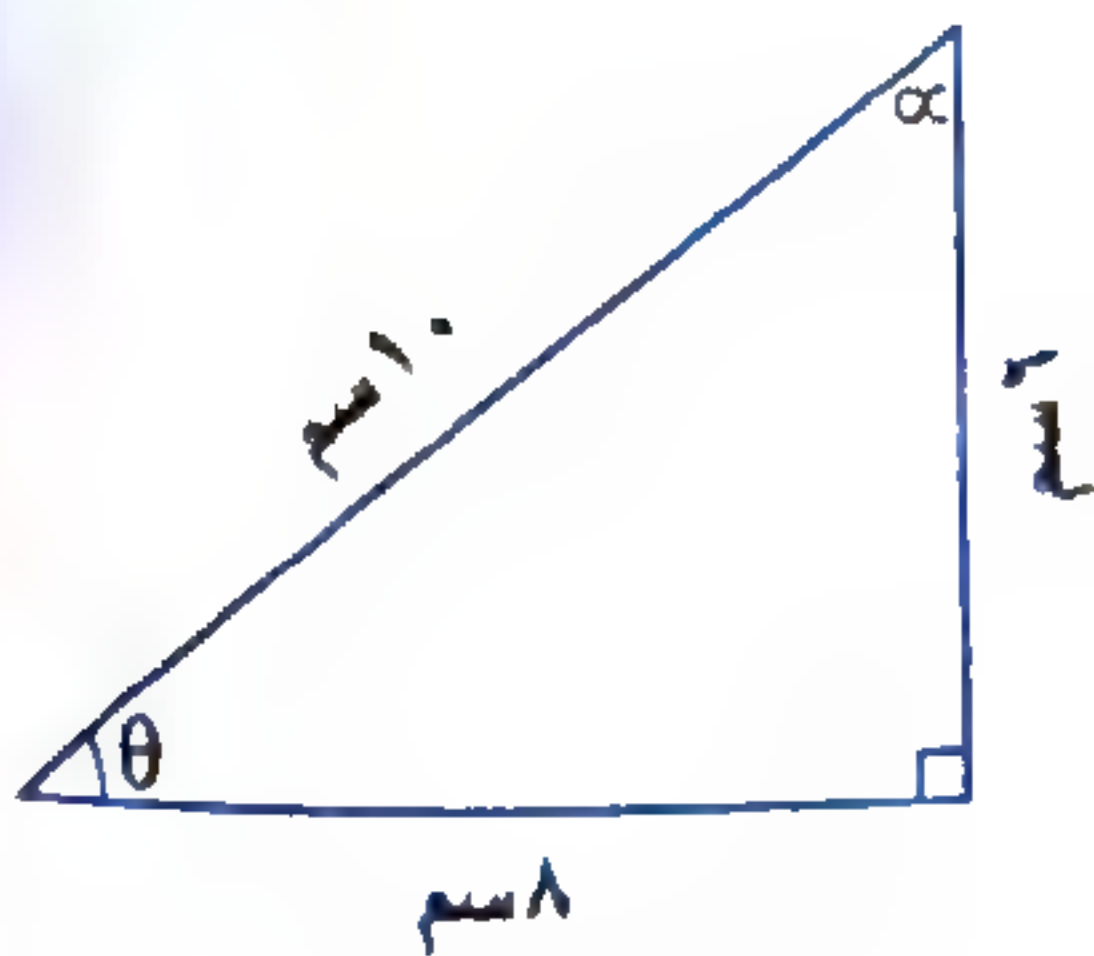
• ففي الشكل المقابل :



$\sin \theta = \frac{3}{5}$	$\cos \theta = \frac{4}{5}$	$\tan \theta = \frac{3}{4}$
$\sin \alpha = \frac{4}{5}$	$\cos \alpha = \frac{3}{5}$	$\tan \alpha = \frac{4}{3}$

• وإذا رسمنا مثلثاً آخر مشابهاً للمثلث السابق نجد أن :

$\sin \theta = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	$\cos \theta = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$	$\tan \theta = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
$\sin \alpha = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$	$\cos \alpha = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	$\tan \alpha = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$



• مما سبق نستنتج أن :

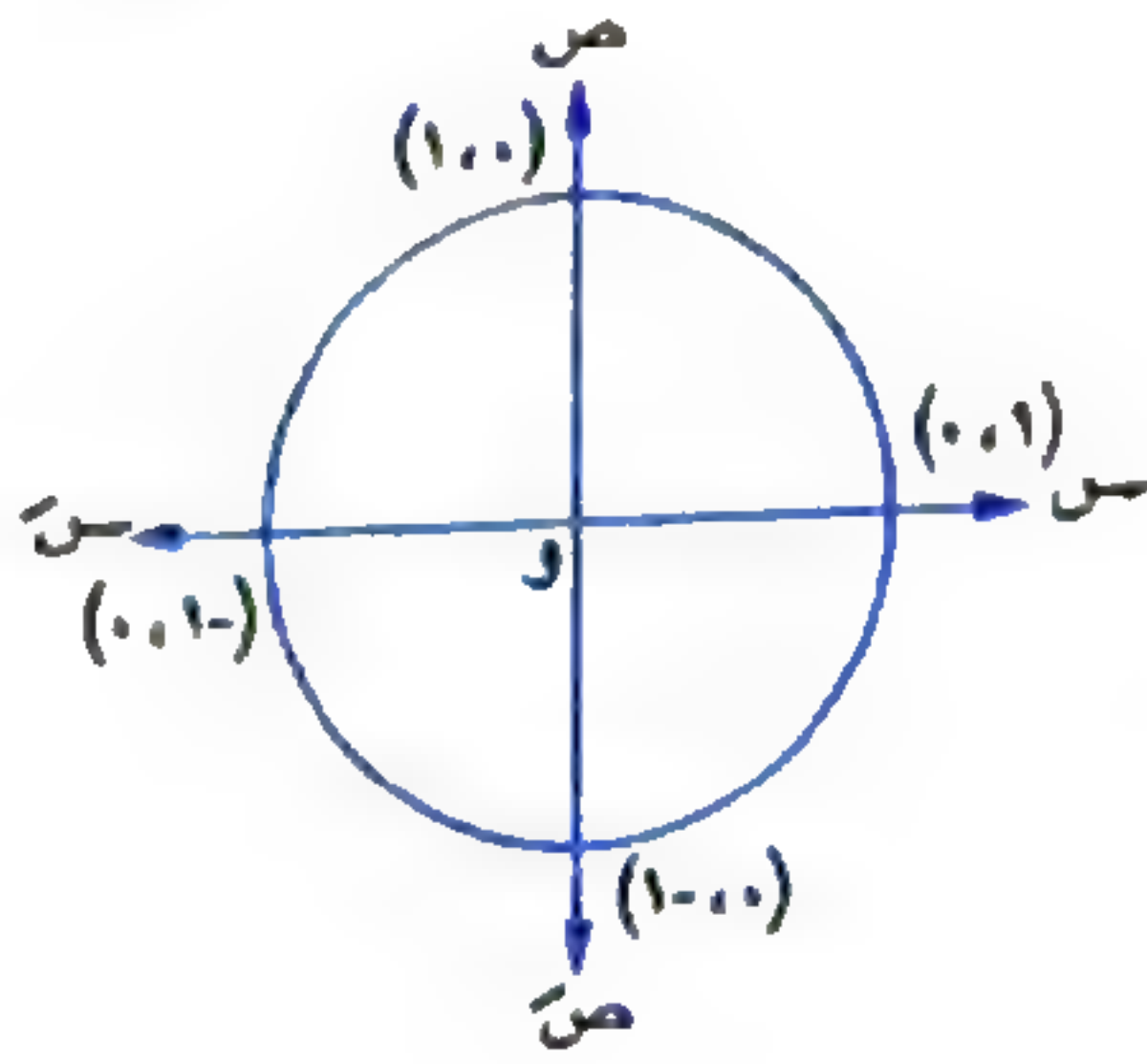
١) $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ في المثلثين متساويين.

أي أن النسبة المثلثية للزاوية ثابتة لا تتوقف على مساحة المثلث.

٢) $\sin \alpha \neq \sin \theta$ ، $\cos \alpha \neq \cos \theta$ ، $\tan \alpha \neq \tan \theta$ في أي من المثلثين.

أي أن النسبة المثلثية تتغير بتغير قياس الزاوية وهذا ما يُعرف بـ «الدوال المثلثية».

دائرة الوحدة



في النظام الإحداثي المتعامد الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها وحدة الأطوال تُسمى دائرة الوحدة.

ولاحظ من الشكل المقابل أن :

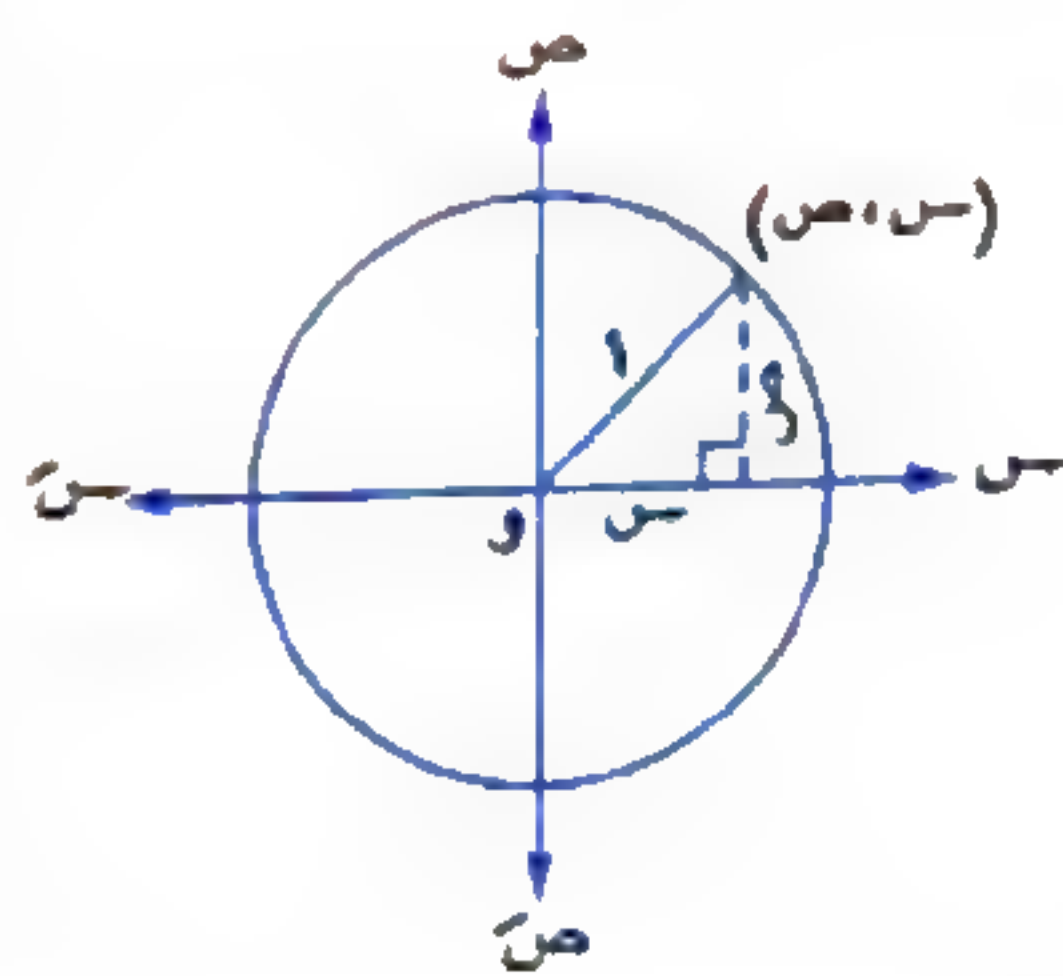
- دائرة الوحدة تقطع محور السينات في نقطتين هما : $(0, 1)$ ، $(0, -1)$
- دائرة الوحدة تقطع محور الصادات في نقطتين هما : $(1, 0)$ ، $(-1, 0)$

ملاحظة

إذا كانت النقطة $(س, ص)$ \exists دائرة الوحدة فإن :

$$س^2 + ص^2 = 1 \quad \text{من نظرية فيثاغورث}$$

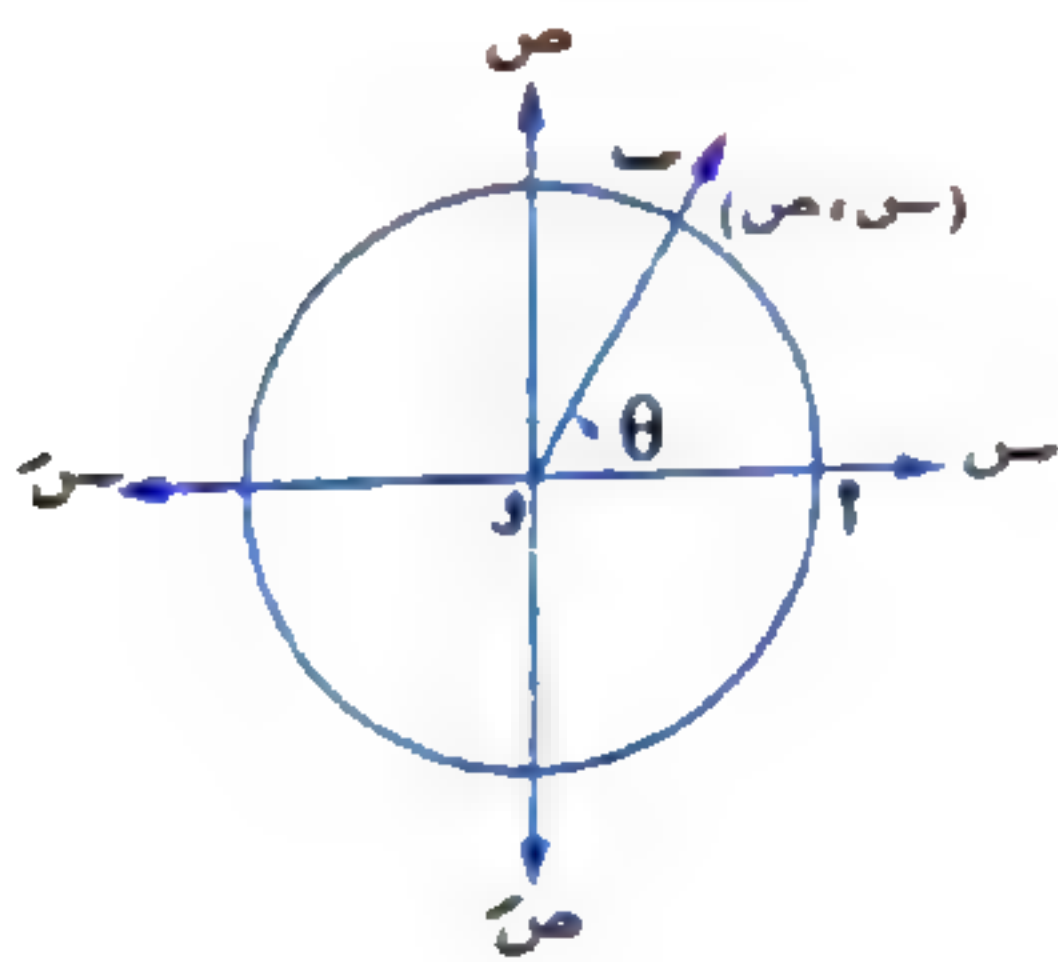
$$س \in [-1, 1] , ص \in [-1, 1]$$



الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها

إذا رسمنا الزاوية الموجهة α و β في وضعها القياسي وقطع ضلعها النهائي و β دائرة الوحدة في النقطة

$(س, ص)$ ، وكان $\alpha = (\alpha و \beta) = \theta$ فإن :



أولاً الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها θ

١ جيب تمام الزاوية = الإحداثي السيني لنقطة β أي أن $\cos \theta = س$

٢ جيب الزاوية = الإحداثي الصادي لنقطة β أي أن $\sin \theta = ص$

٣ ظل الزاوية = $\frac{\text{الإحداثي الصادي لنقطة } \beta}{\text{الإحداثي السيني لنقطة } \beta}$ أي أن $\tan \theta = \frac{ص}{س} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ حيث $س \neq 0$.

لاحظ أنه

يمكن كتابة النقطة $\beta (س, ص)$ على الصورة $(\cos \theta, \sin \theta)$

ပုံ

ای ان

حيث $s \neq 0$.

ای ان

حیث ص ۴۰

ای ان

حکومت

1

في النقطة ٢ في كل مما يأتي :

(- 6 1-) 1 2

۴) (-س، س) حیث س < .

الحل

$$\frac{z}{y} = \frac{y}{x} \div \frac{z}{x} = \theta \vee \quad , \quad \frac{z}{x} = \theta \wedge \quad , \quad \frac{y}{x} = \theta \wedge \quad \boxed{1}$$

$$\frac{r}{z} = \theta \text{ 左} \quad , \quad \frac{o}{z} = \theta \text{ 右} \quad , \quad \frac{o}{r} = \theta \text{ 右} \quad ,$$

$$\cdot = \frac{\cdot}{1} = \theta \downarrow, \quad \cdot = \theta \downarrow, \quad 1 - = \theta \downarrow \quad \boxed{2}$$

$$\text{فأ } \theta = 1, \quad \text{فأ } \theta = \frac{1}{\cdot} \text{ (غير معرف)}, \quad \text{فأ } \theta = \frac{1}{\cdot} \text{ (غير معرف)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} - 1 = {}^2\text{ص} \therefore 1 = {}^2\text{ص} + {}^1\left(\frac{1}{4}\right) \therefore 1 = {}^2\text{ص} + {}^2\text{س} \therefore \boxed{3}$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ و } \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ص} \therefore \quad \therefore \text{ص} < \quad \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \pm = \text{ص}$$

$$\sqrt{r} - = \frac{1}{r} \div \frac{\sqrt{r}}{r} = \theta \text{ L}, \quad \frac{\sqrt{r}}{r} = \theta \text{ L}, \quad \frac{1}{r} = \theta \text{ L} \therefore$$

$$\frac{1}{r\sqrt{r}} = 0.15, \quad \frac{r}{r\sqrt{r}} = 0.15, \quad r = 0.15,$$

$$1 = {}^2s_2 \therefore 1 = {}^2s_1 + {}^1(s-1) \therefore 1 = {}^2s_1 + {}^1s_1 \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{2}} = s \therefore \quad \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \pm s = s \therefore s < \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \therefore$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{r}} \div \frac{1}{\sqrt{r}} = \theta L, \quad \frac{1}{\sqrt{r}} = \theta L, \quad \frac{1}{\sqrt{r}} = \theta L \therefore$$

$$\sqrt{-1} = \theta \text{ 12}, \quad \sqrt{2} = \theta \text{ 13}, \quad \sqrt{-2} = \theta \text{ 14}.$$

حاول بنفسك

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب إذا كان :

١ - $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ٢ - $(0, 1)$ ، $s > 0$ ٣ - $(-1, 0)$ ، $s < 0$.

ملاحظة

الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية.

أي أنه لجميع قيم $n \in \mathbb{Z}$ (مجموعة الأعداد الصحيحة) يكون :

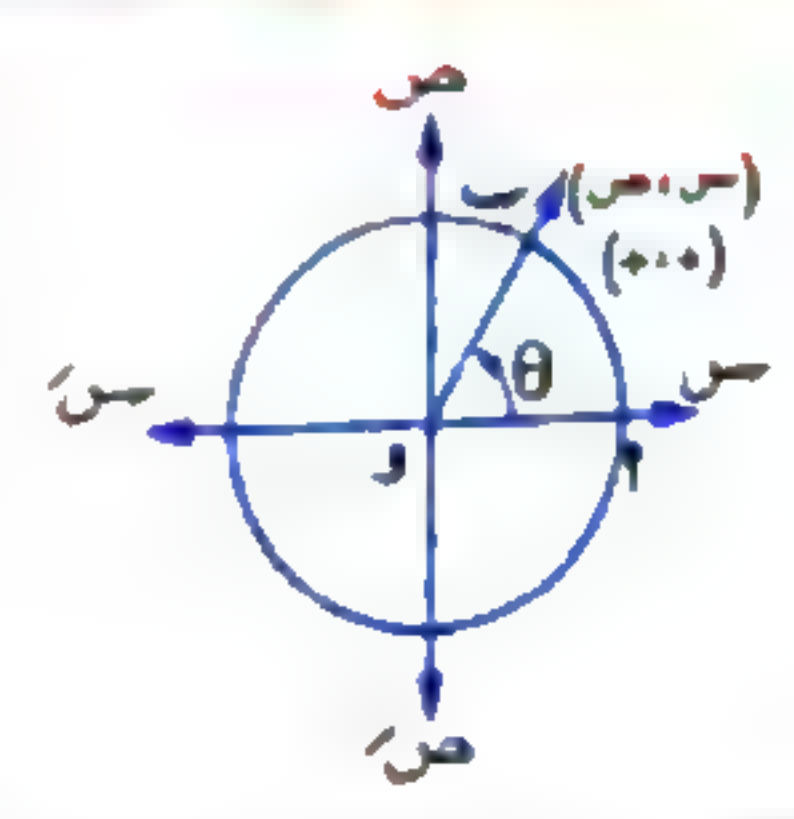
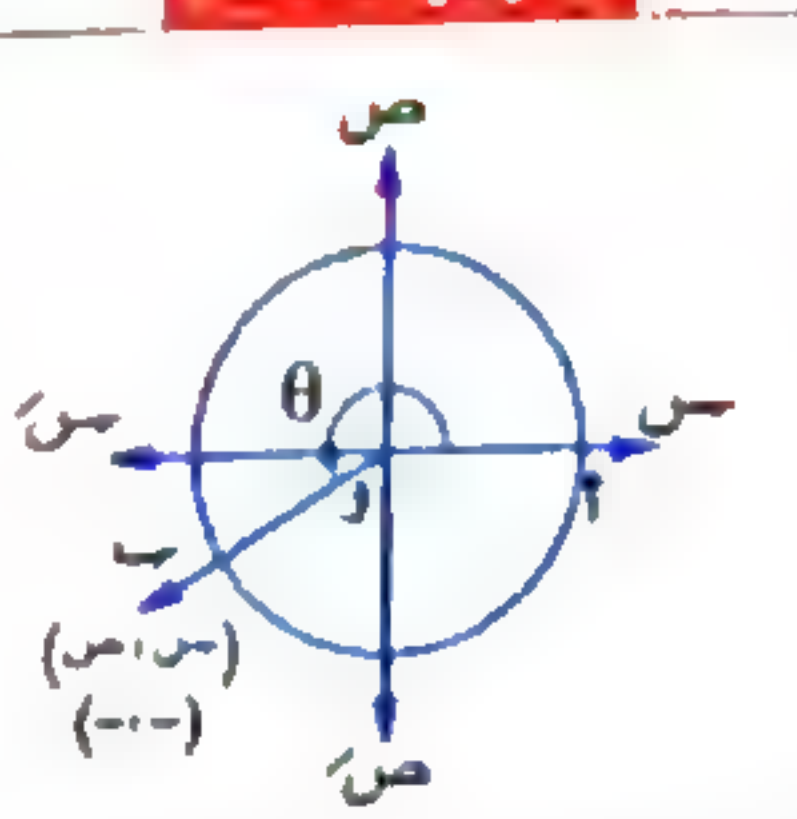
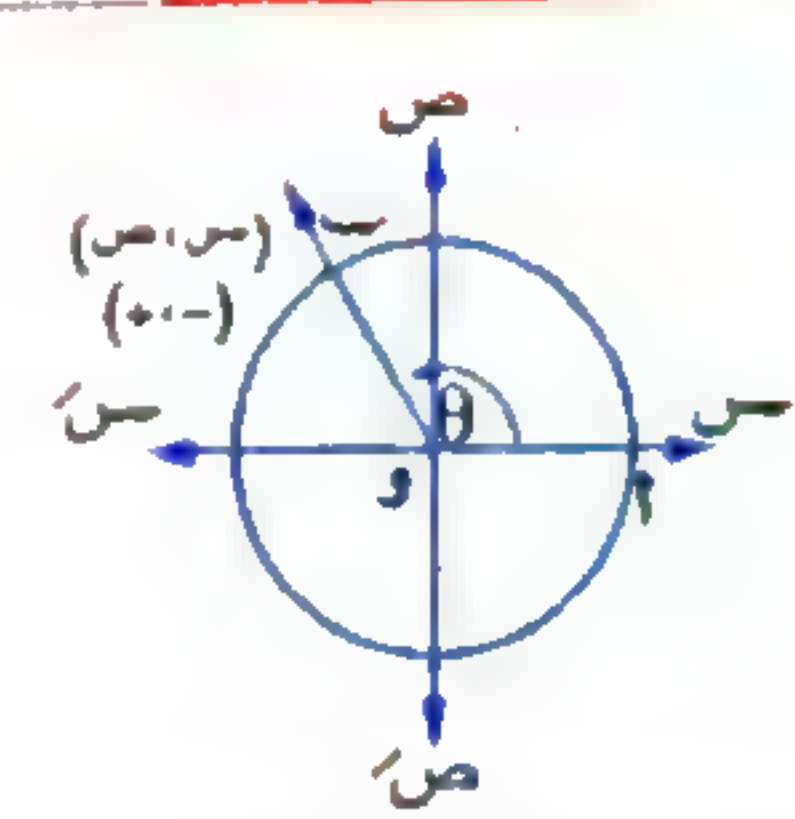
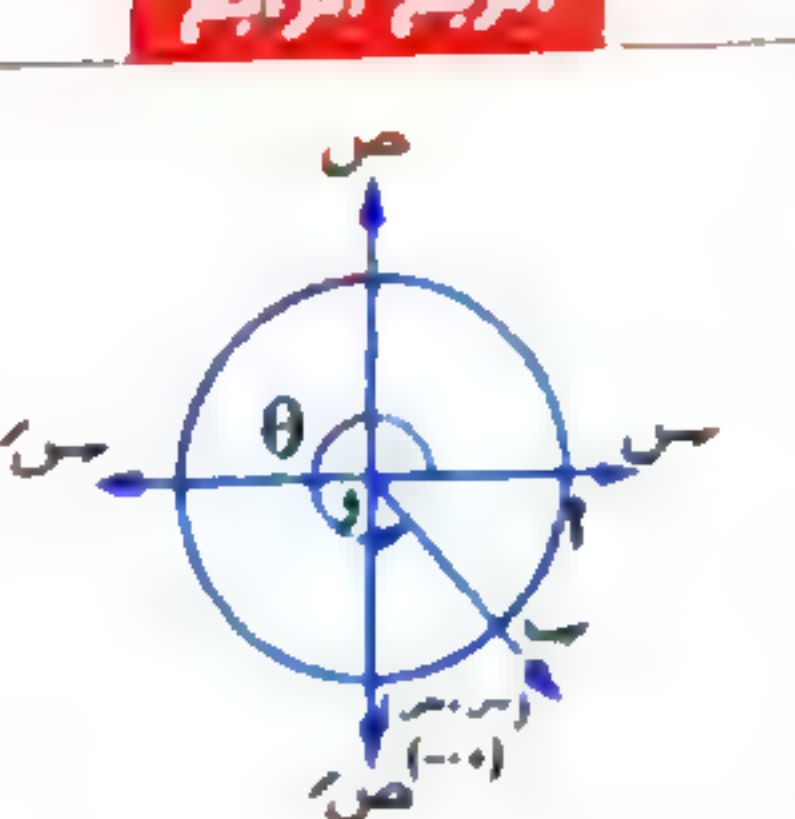
- $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ حيث $s \neq 0$.
- $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ حيث $s \neq 0$.
- $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin \theta$ ، $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ حيث $s \neq 0$.

- فمثلاً** : $\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ$ ، $\cos 84^\circ = \cos(36^\circ \times 2 + 12^\circ) = \cos 12^\circ$.
 $\sin 150^\circ = \sin(360^\circ - 210^\circ) = \sin 210^\circ$.

إشارات الدوال المثلثية

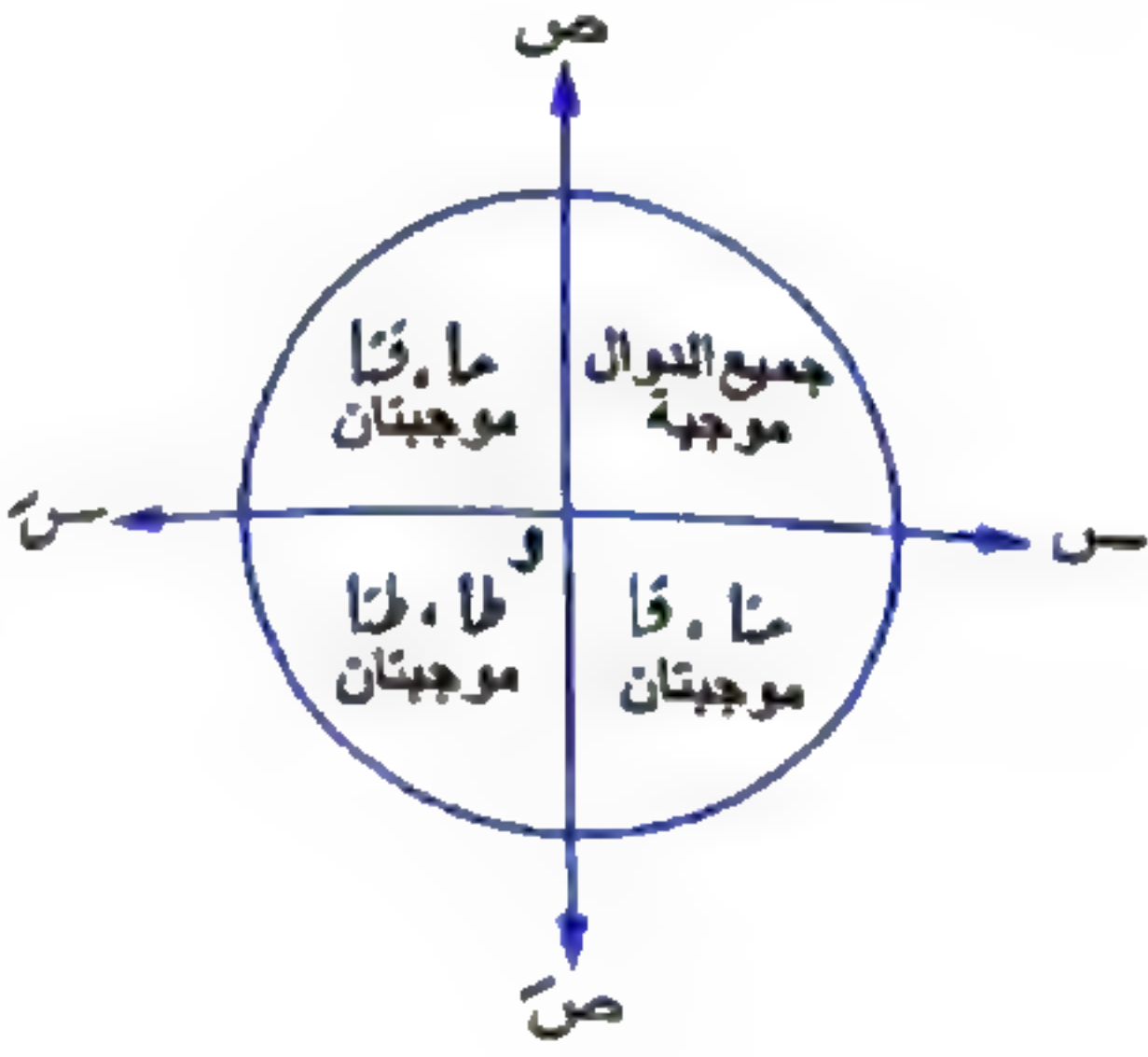
إذا كانت : د أ و ب الموجهة في وضعها القياسي ، ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص) وكان $\theta = (د أ و ب)$ فإن :

د أ و ب تقع في أحد الأرباع كما يلي

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
جميع الدوال المثلثية موجبة.	س ، ص > 0 ، ص < 0	س ، ص < 0 ، ص > 0	س ، ص > 0 ، ص < 0
جميع الدوال المثلثية موجبة.	س ، ص > 0 ، ص < 0	س ، ص < 0 ، ص > 0	س ، ص > 0 ، ص < 0

• ونلخص ما سبق في الجدول والشكل الآتيين :

الربع	الفترة التي تنتمي إليها θ	إشارة \sin ، \cos	إشارة \tan ، \cot	إشارة \sec ، \csc
الأول	$[0, \frac{\pi}{2}]$	+	+	+
الثاني	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	-	+	-
الثالث	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	-	-	+
الرابع	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	+	-	-



فمثلاً • 320° تكون سالبة لأن :

الزاوية التي قياسها 320° تقع في الربع الرابع $\leftarrow 360^\circ > 320^\circ > 270^\circ$

• 160° تكون موجبة لأن :

الزاوية التي قياسها 160° تقع في الربع الثاني $\leftarrow 180^\circ > 160^\circ > 90^\circ$

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

مثال ٢

ابحث إشارة كل من النسب المثلثية الآتية :

- ١ $\sin 97^\circ$ ٢ $\tan \frac{7\pi}{3}$ ٣ $\cos (-200^\circ)$ ٤ $\cot (-\frac{\pi}{6})$

الحل

١ $\sin 97^\circ = \sin (250^\circ + 2 \times 360^\circ) = \sin 250^\circ$ ، $250^\circ > 180^\circ > 90^\circ$ أي تقع في الربع الثالث. $\therefore \sin 250^\circ$ سالبة.

٢ $\tan \frac{7\pi}{3} = \tan (\frac{180^\circ}{3} \times 7) = \tan 420^\circ = \tan (60^\circ + 360^\circ) = \tan 60^\circ$ ، $60^\circ > 0^\circ > -90^\circ$ أي تقع في الربع الأول. $\therefore \tan 60^\circ$ موجبة.

$\therefore \tan \frac{7\pi}{3}$ موجبة.

٣ $\cos (-200^\circ) = \cos (360^\circ - 200^\circ) = \cos 160^\circ$ ، $160^\circ > 90^\circ > 0^\circ$ أي تقع في الربع الثاني. $\therefore \cos 160^\circ$ سالبة.

$\therefore \cos (-200^\circ)$ سالبة.

٤ $\cot (-\frac{\pi}{6}) = \cot (-\frac{180^\circ}{6}) = \cot (-30^\circ) = \cot (360^\circ - 30^\circ) = \cot 330^\circ$ ، $330^\circ > 90^\circ > 0^\circ$ أي تقع في الربع الأول. $\therefore \cot 330^\circ$ موجبة.

$\therefore \cot (-\frac{\pi}{6})$ موجبة.

حاول بنفسك

عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية : ١) $\sin 62^\circ$ ٢) $\cos(-30^\circ)$ ٣) $\tan \frac{11}{3}\pi$

مثال ٣

إذا كانت θ نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها θ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فأوجد قيمة كل من : $\sin \theta$ ، $\cos \theta$

الحل

$\therefore 90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني.

\therefore لأي نقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$ على دائرة الوحدة يكون $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

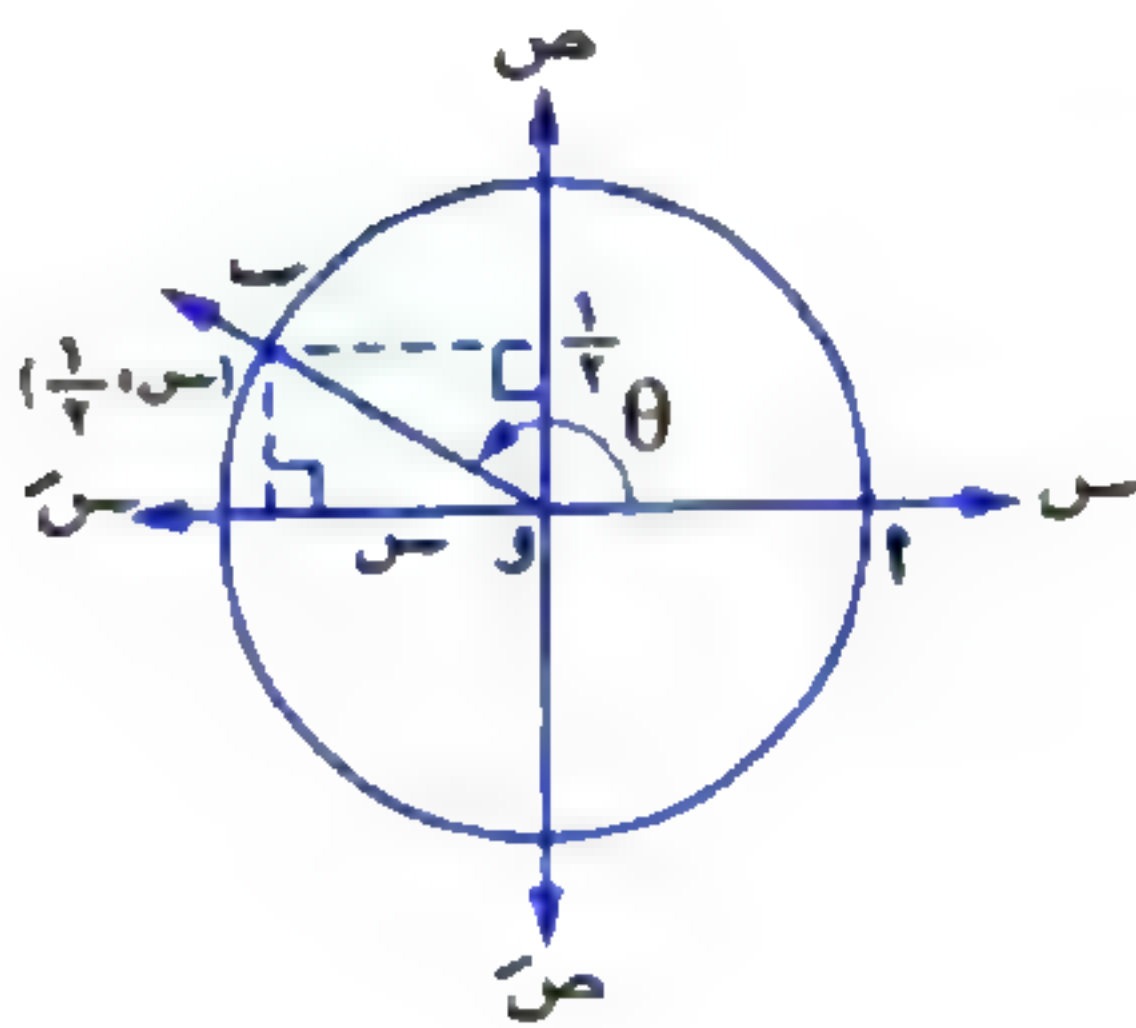
$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\therefore \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

\therefore النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$ في الربع الثاني $\therefore \sin \theta$ سالبة.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$



مثال ٤

إذا كانت $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ وكانت $\sin \theta = \frac{5}{13}$ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

الحل

نفرض أن θ (د و ب) حيث θ في الربع الرابع

وأن نقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$ هي

$$\therefore \sin \theta = \frac{5}{13} \quad \therefore \cos \theta = \pm \frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

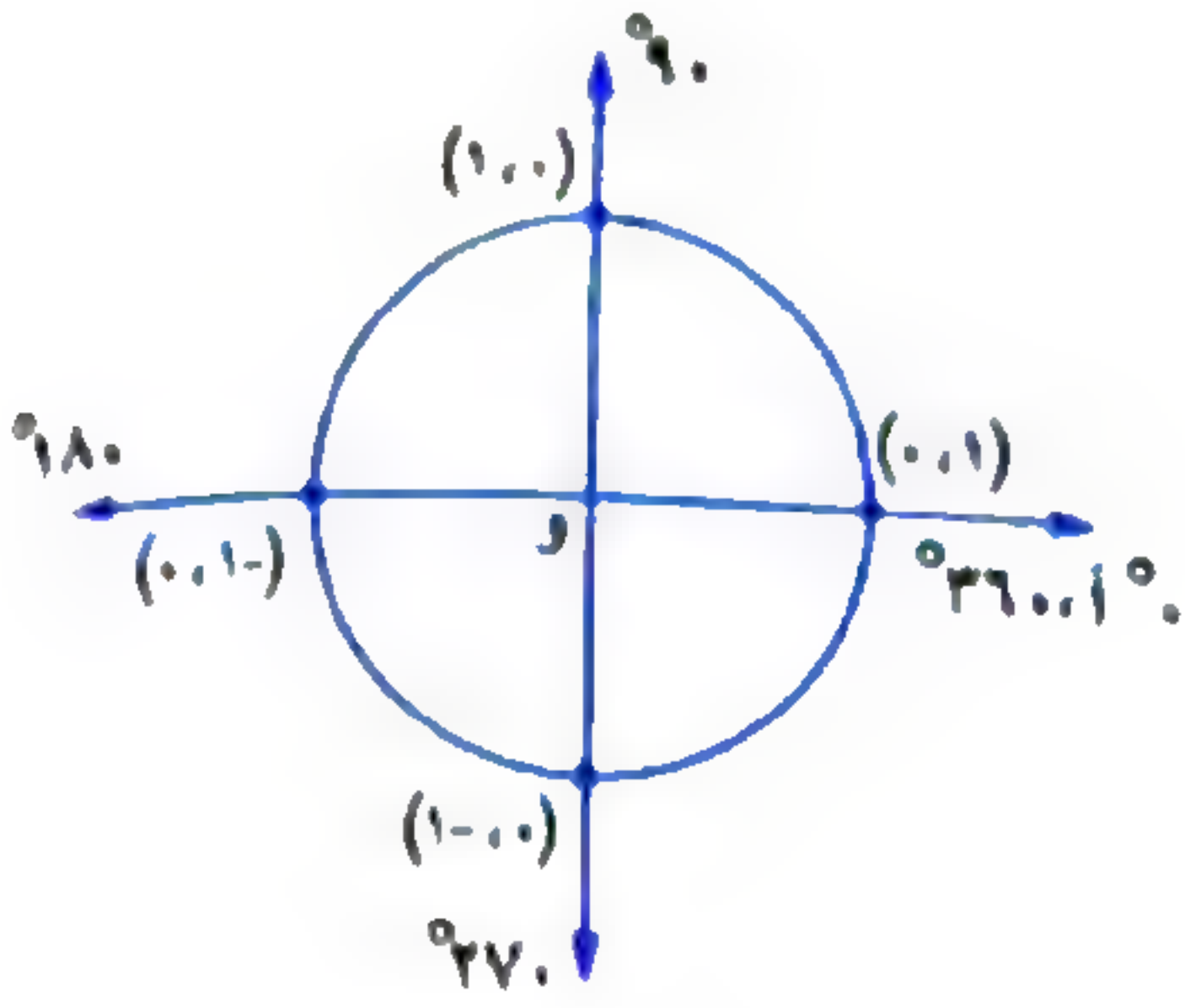
$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad \therefore \cos \theta = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{ويكون : } \cos \theta = \frac{12}{13} \quad \text{أو} \quad \cos \theta = -\frac{12}{13} \quad \text{أو} \quad \sin \theta = \frac{5}{13} \quad \text{أو} \quad \sin \theta = -\frac{5}{13}$$

حاول بنفسك

إذا كانت $180^\circ < \theta < 270^\circ$ وكانت $\sin \theta = \frac{5}{13}$ فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



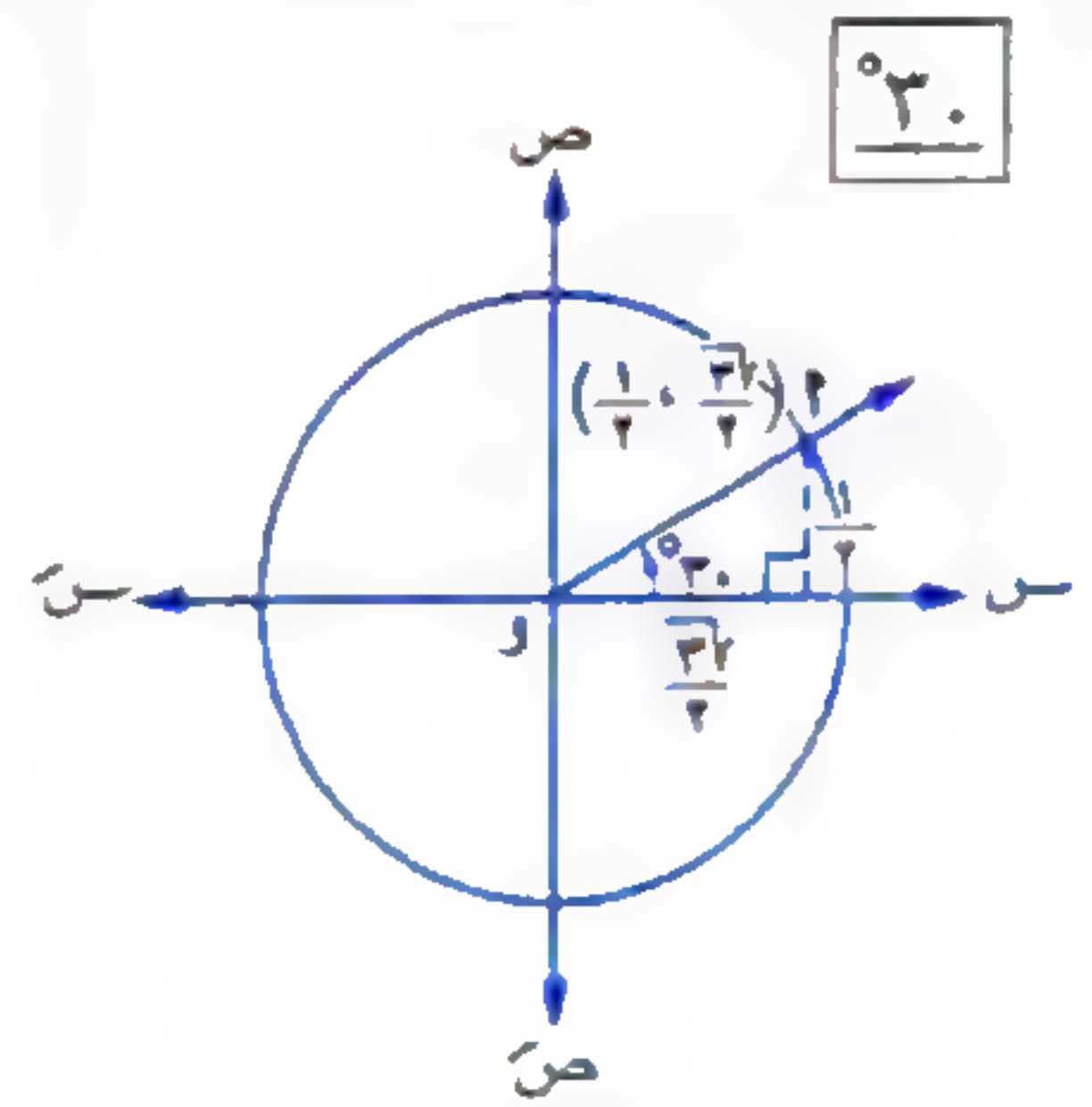
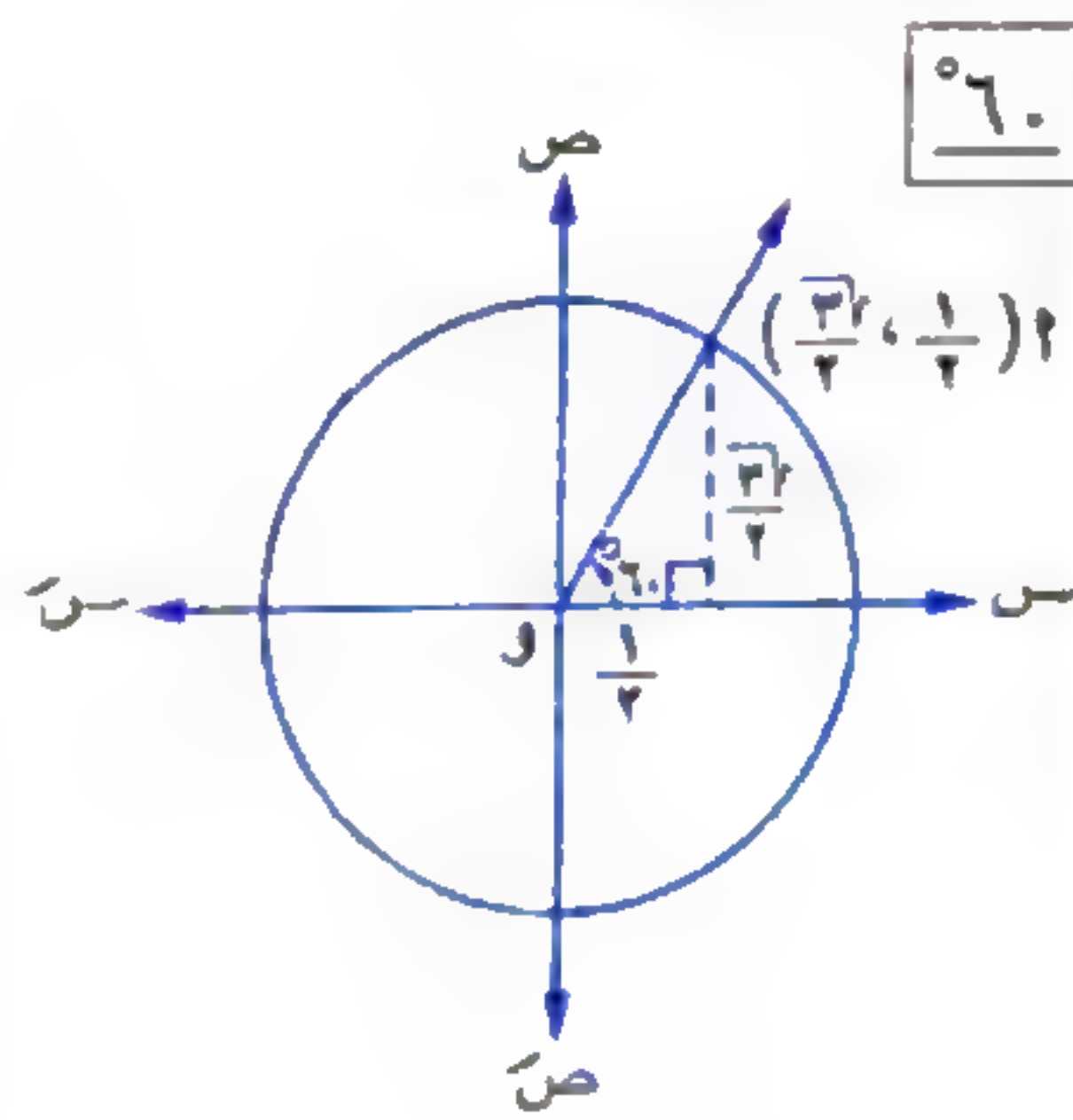
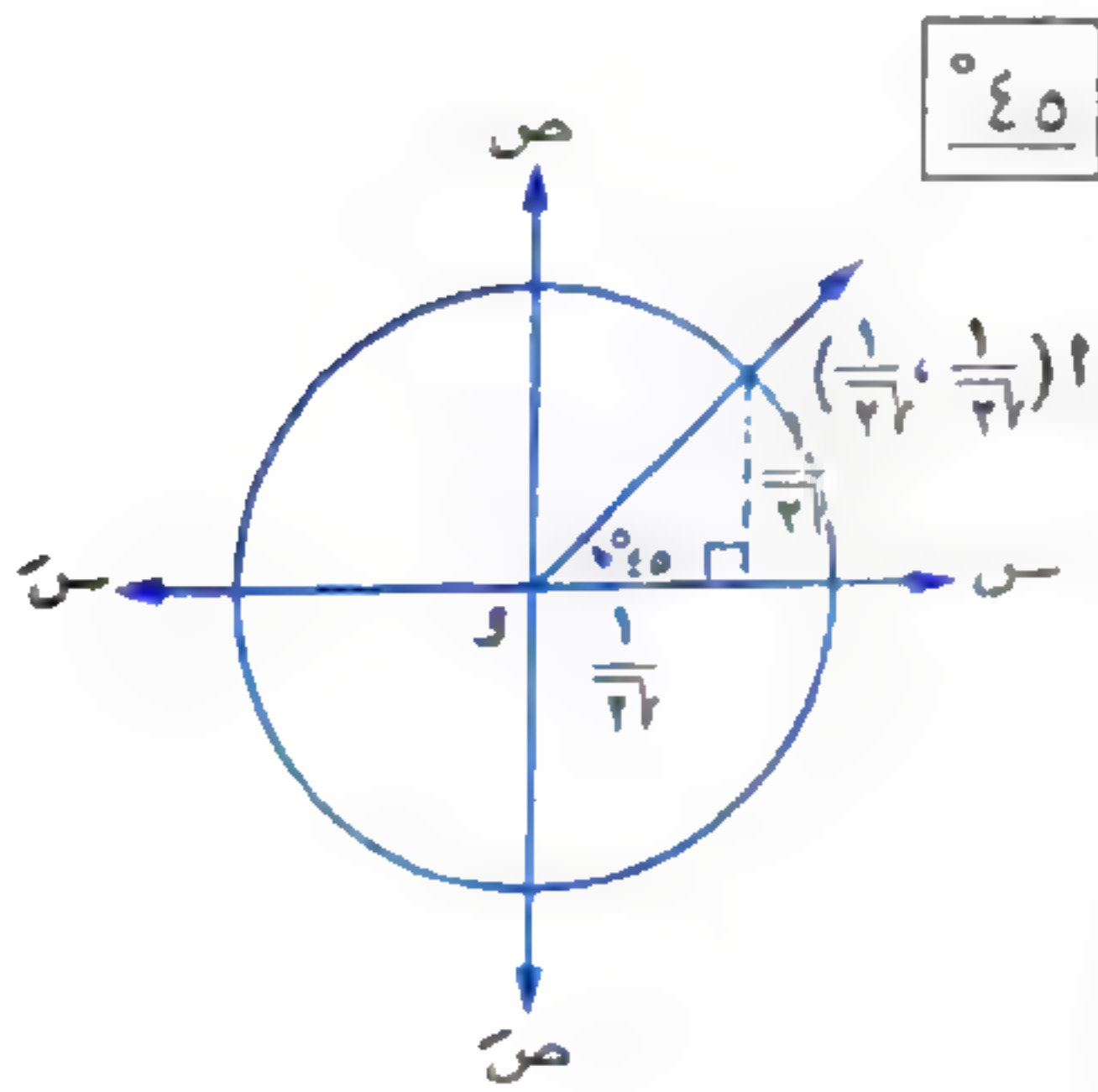
أولاً الزوايا الربعية (°0 ، °90 ، °180 ، °270)

الشكل المقابل يوضح نقط تقاطع الضلع النهائي للزوايا الربعية مع دائرة الوحدة ومنه يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا

كما هو موضح بالجدول التالي :

θ بالقياس الستيني	θ بالقياس الدائري	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
°0 ، °360	0 ، 2π	0	1	0	1	1	غير معرف
°90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	غير معرف	0	غير معرف	1
°180	π	0	-1	0	-1	غير معرف	1
°270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	غير معرف	0	غير معرف	-1

ثانياً الزوايا التي قياساتها (°30 ، °60 ، °45)



الأشكال السابقة توضح نقط تقاطع الضلع النهائي للزوايا التي قياساتها °30 ، °60 ، °45 في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة ومنها يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا كما هو موضح بالجدول التالي :

θ بالقياس الستيني	θ بالقياس الدائري	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
°30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
°60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
°45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

مثال ٥

أوجد قيمة :

$$٤ \text{ ما } ٣٠^\circ - ٩٠^\circ \text{ ما } ٦٠^\circ + ٥ \text{ ما } ٤٥^\circ + ١٠ \text{ ما } ٤٥^\circ - ٢٧^\circ \text{ ما } ٣٠^\circ - ١٨^\circ$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= ٤ \times \frac{1}{4} - ١ \times \frac{1}{4} + ١ \times ٥ + ٢ \times ١ - ١ \times \frac{1}{4} - (١-) \times \left(\frac{1}{4} \right) \times ١٠ + ١ \times ٥ + ٢ \times ١ - ١ \times \frac{1}{4} \times \text{صفر} \\ &= ٢ - ٢ + ٥ - ٥ + ٢ - ٢ = \text{صفر} \end{aligned}$$

مثال ٦

$$\text{أثبت أن : ما } ٦٠^\circ + \text{ما } ٤٥^\circ + \text{ما } ٣٠^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ ما } \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \text{ ما } \frac{\pi}{3} + \pi \text{ ما } \frac{\pi}{3} \text{ ما } \frac{\pi}{2}$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \text{ما } ٣٠^\circ - \frac{1}{4} \text{ ما } ٦٠^\circ + \text{ما } ١٨^\circ + \text{ما } ٦٠^\circ - ٢٧^\circ$$

$$= \left(\frac{3}{4} \right) - ١ \times \left(\frac{3}{4} \right) + (١-) \times \left(\frac{1}{4} \right) + (١-) \times \left(\frac{3}{4} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} - ١ + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٧

$$\text{أوجد قيمة س التي تحقق : س ما } \frac{\pi}{6} \text{ ما } \frac{\pi}{4} = \text{ما } ٣٠^\circ \text{ ما } \frac{\pi}{2}$$

الحل

$$\therefore \text{س ما } ٣٠^\circ \text{ ما } ٤٥^\circ = \text{ما } ٣٠^\circ \text{ ما } ٩٠^\circ$$

$$\therefore \text{س} \times \left(\frac{1}{4} \right) = \left(\frac{3}{4} \right) \times ١$$

$$\therefore \text{س} = ٣$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ س} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة ٨

إذا كانت : $0^\circ < S < 90^\circ$ فأوجد قيمة S التي تحقق :

$$\text{ماس قأ}^\circ 45 = \text{طا}^\circ 60 - \text{مأ}^\circ 2 - \text{مأ}^\circ 360$$

الحل

$$\therefore \text{ماس} \times (\text{قأ}^\circ 45) = (\text{مأ}^\circ 2 - \text{مأ}^\circ 360) \times 1$$

$$\therefore \text{ماس} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ماس قأ}^\circ 45 = \text{طا}^\circ 60 - \text{مأ}^\circ 2 - \text{مأ}^\circ 360$$

$$\therefore 1 = 2 - 3 = \text{ماس} \times 2$$

$$\therefore \text{ماس} = 20^\circ$$

حاول بنفسك

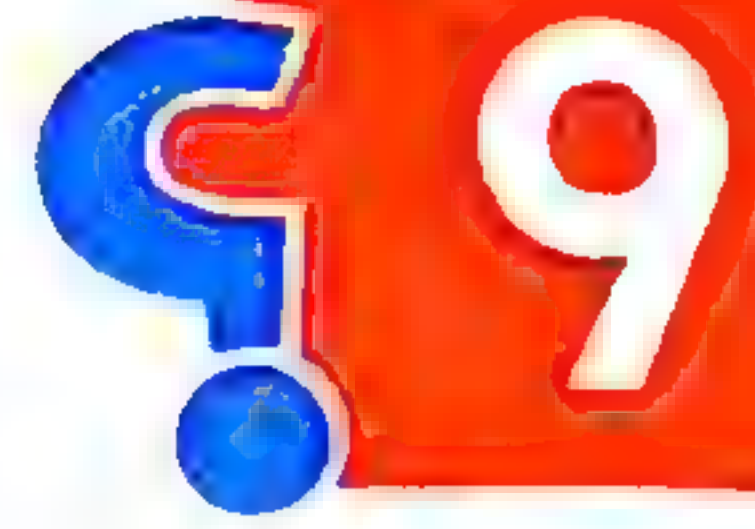
$$1 \text{ أوجد قيمة : } \text{مأ}^\circ 90 \text{ قأ}^\circ 30 + \text{قأ}^\circ 45 \text{ مأ}^\circ 20 - \text{مأ}^\circ 270 \text{ مأ}^\circ 180$$

$$2 \text{ إذا كانت : } 0^\circ \leq S \leq 90^\circ$$

$$\text{فأوجد قيمة } S \text{ التي تحقق أن : } \text{مأ}^\circ 30 = \text{مأ}^\circ 30 \text{ مأ}^\circ 60 + \text{مأ}^\circ 30 \text{ مأ}^\circ 60$$



على الدوال المثلثية



١. من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان θ قياس زاوية فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ فإن : ما $\theta =$

- (أ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(٢) إذا كان : ما $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : $\theta =$

- (أ) 30° (ب) 60° (ج) 45° (د) 90°

(٣) إذا كان : ما $\theta = 1 -$ ، ما $\theta =$. فإن : $\theta =$

- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) 2π

(٤) إذا كانت : قنا $\theta = 2$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : $\theta =$

- (أ) 15° (ب) 30° (ج) 45° (د) 60°

(٥) إذا كان : ما $\theta = 1$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : $\theta =$

- (أ) 60° (ب) 30° (ج) 45° (د) 90°

(٦) إذا كان : ما $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : ما $\theta =$

- (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٧) ما $30^\circ - 60^\circ + 45^\circ =$

- (أ) ١ (ب) صفر (ج) $1 -$ (د) ٢

(٨) إذا كان : ما $\theta = \frac{1}{2}$ ، ما $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن الزاوية التى قياسها θ تقع فى الربع

- (أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٩) ما $(\frac{12}{5}\pi -)$ =

- (أ) ما $\frac{12}{5}\pi$ (ب) ما 72° (ج) ما 288° (د) ما $\frac{1}{5}\pi$

(١٠) ما $0^\circ + 0^\circ + 0^\circ =$

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(١١) ما $2^\circ 45' =$

- (أ) ما 90° (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) ٢

(١٢) إذا كان : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \theta$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2} = \theta$ فإن : $\theta = \dots$

(د) $\frac{\pi}{6}$

(ج) $\frac{\pi}{3}$

(ب) $\frac{\pi}{4}$

(أ) $\frac{\pi}{2}$

(١٣) إذا كان الضلع النهائي لزاوية في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في نقطة أ في الربع الرابع حيث الإحداثي

السيني للنقطة أ يساوي $\frac{5}{13}$ فإن : $\theta = \dots$

(د) $(\frac{8}{13}, \frac{5}{13})$

(ج) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

(ب) $(\frac{1}{13}, \frac{5}{13})$

(أ) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

(١٤) إذا كان : أ ب ح ممثلًا قائم الزاوية في ب ، و (أ ب) = ٢ و (ب ح) =

فإن : أ + ب + ح =

(د) ٨

(ج) ٦

(ب) ٤

(أ) ٢

٢ ابحث إشارات النسب المثلثية الآتية :

(٤) $\frac{\pi}{4}$ ما

(٣) 260° قأ

(٢) 100° طأ

(١) 350° منا

(٨) 1200° قأ

(٧) 410° طأ

(٦) $\frac{\pi}{4}$ طأ

(٥) $\frac{\pi}{7}$ قأ

(١٢) $(\frac{\pi}{6} -)$ قأ

(١١) $(\frac{\pi}{4} -)$ طأ

(١٠) $\frac{\pi}{3}$ طأ

(٩) (-160°) منا

٣ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة :

(٣) $(0, -1)$

(٢) $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

(١) $(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$

٤ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ في كل من الحالات الآتية :

(٢) $(\pi, -\frac{\pi}{6})$ ، $\pi < \theta$

(١) $(\pi, 0)$ ، $\pi < \theta$

(٣) $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $\pi < \theta < 180^\circ$

(٥) $(\pi, -1)$ ، $\pi < \theta$

(٤) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ ، $\pi < \theta$

(٧) $(\pi, -\pi)$ ، $\pi < \theta$

(٦) (π, π) ، $\pi < \theta$

(٨) $(120^\circ, 180^\circ)$ ، $\pi < \theta < 270^\circ$

(٩) $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ، $\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$

٥ أوجد قيمة كل من :

$$(٢) \text{ ط } ٠ + \text{ ط } ٤٥ + \text{ ط } ١٨٠$$

$$(٤) \text{ ط } ٣٠ + ٢ \text{ ما } ٤٥ + \text{ ما } ٩٠$$

$$(٦) \text{ ق } \frac{\pi}{6} \text{ ط } \frac{\pi}{3} - \text{ ط } \frac{\pi}{3} \text{ ما } \frac{\pi}{6}$$

$$(٨) \frac{\text{ ط } ٤٥ - \text{ ط } ٦٠}{\text{ ق } ٣٠ - \text{ ق } ٤٥}$$

$$(١) \text{ ما } ٠ + \text{ ما } ٩٠ + \text{ ما } ١٨٠ + \text{ ما } ٢٧٠$$

$$(٣) \text{ ما } ٣٠ + \text{ ما } ٦٠ - \text{ ط } ٤٥$$

$$(٥) \text{ ما } ١٨٠ \text{ ما } ٤٥ - \text{ ما } ١٨٠ \text{ ما } ٤٥$$

$$(٧) \text{ ما } \frac{\pi}{2} \text{ ما } ٠ + \text{ ما } \frac{\pi}{2} \text{ ما } \frac{\pi}{2}$$

$$(٩) \frac{٤ \text{ ما } ٣٠ - ٢ \text{ ط } ٤٥ \text{ ما } ٠}{٢ \text{ ما } ٦٠ + ٢ \text{ ما } ٤٥ \text{ ما } ٤٥}$$

$$(١٠) ٣ \text{ ما } ٣٠ \text{ ما } ٦٠ - \text{ ما } ٠ \text{ ق } ٦٠ + \text{ ما } ٢٧٠ \text{ ما } ٤٥$$

٦ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

$$(١) ٢ \text{ ما } ٩٠ = ٢ - \text{ ما } ١٨٠$$

$$(٣) ٢ \text{ ما } ٤٥ \text{ ما } ٤٥ \text{ ط } ٤٥ = ١$$

$$(٥) \text{ ما } ٣٠ \text{ ط } ٦٠ \text{ ط } ٤٥ = \frac{١}{٤}$$

$$(٧) \text{ ق } ٣٠ \text{ ط } ٦٠ + \text{ ق } ٦٠ - \text{ ط } ٤٥ = \frac{٧}{٣}$$

$$(٨) \frac{\pi}{٤} \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ - \text{ ما } ٣٠ \text{ ما } ٦٠ = \frac{\pi}{٤}$$

$$(٩) ١ = \frac{١}{٤} \text{ ط } ٤٥ \text{ ق } ٣٠ + \frac{٤}{٣} \text{ ما } ٣٠ - \frac{١}{٤} \text{ ط } ٤٥ \text{ ق } ٣٠$$

$$(١٠) ١٠ = \frac{\pi}{٢} \text{ ما } ٤ - \frac{\pi}{٣} \text{ ط } ٤ + \frac{\pi}{٤} \text{ ما } ٣ + \frac{\pi}{٢} \text{ ما } ٢$$

$$(١١) \text{ ط } ٦٠ = \frac{\text{ ط } ٣٠ - \text{ ط } ٦٠}{١ + \text{ ط } ٦٠ \text{ ط } ٣٠}$$

$$(٢) \frac{\pi}{٤} \text{ ما } ٦٠ - \frac{\pi}{٤} \text{ ما } ٦٠ = \frac{\pi}{٢}$$

$$(٤) ٢ \text{ ما } ٣٠ \text{ ط } ٦٠ - ٢ \text{ ق } ٤٥ \text{ ق } ٤٥ = \frac{١}{٢}$$

$$(٦) ٣ \text{ ط } ٤٥ - ٢ \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٣٠ = \frac{٢}{٩} \text{ ما } ٩٠$$

$$(١٢) \text{ ما } ٩٠ = \frac{\text{ ما } ٣٠ \text{ ما } ٤٥ + \text{ ما } ٤٥ \text{ ما } ٣٠}{\text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٤٥ + \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٣٠}$$

٧ أوجد قيمة س إذا كان :

$$(١) \text{ س ما } \frac{\pi}{٤} \text{ ما } \pi = \text{ ط } \frac{\pi}{٣} \text{ ما } \frac{\pi}{٢}$$

$$(٢) \text{ س ما } \frac{\pi}{٤} \text{ ما } \frac{\pi}{٤} \text{ ط } \frac{\pi}{٦} = \text{ ط } \frac{\pi}{٤} \text{ ما } \frac{\pi}{٣}$$

«٦»

« $\frac{\sqrt{2}}{2}$ »

٨ إذا كانت س $\in [٠, ٩٠]$ فأوجد قيمة س التي تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

$$(١) \text{ ما } ٠ - \frac{\text{ ما } ٦٠}{\text{ ما } ٩٠} = \frac{\text{ ما } ٣٠}{\text{ ما } ٤٥} \quad (٢) \text{ ما } ٣٠ \text{ ما } ٦٠ + \text{ ما } ٣٠ \text{ ما } ٦٠ = \text{ ما } ٩٠$$

٩ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ و س التي قياسها θ في كل من الحالات الآتية :

$$(٢) \left[\frac{\pi}{٢}, \pi \right] \text{ ، } \frac{١٢}{١٣} = \text{ ما } \theta$$

$$(٤) \left[\frac{\pi}{٢}, \pi \right] \text{ ، } \frac{٢٥}{٧} - = \text{ ق } \theta$$

$$(١) \left[\frac{\pi}{٢}, ٠ \right] \text{ ، } \frac{\pi}{٢} = \text{ ما } \theta$$

$$(٣) \left[\frac{\pi}{٢}, \pi \right] \text{ ، } \frac{٢}{٤} - = \text{ ط } \theta$$

$$(٥) \left[\frac{\pi}{٢}, \pi \right] \text{ ، } ٢ = \text{ ق } \theta$$

١٠ إذا كان الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ أوجد قيمة θ ثم أوجد قيمة: $\theta - \theta$

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

١١ إذا كانت $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $\frac{2}{5} = \theta$ فأوجد قيمة: $\theta - \theta$

$$\frac{2}{5}$$

١٢ إذا كانت $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $\frac{12}{13} = \theta$ فأوجد قيمة: $\theta - \theta$

$$\frac{12}{13}$$

١٣ إذا كانت $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، $\frac{24}{25} = \theta$ فأوجد:

$$\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$$

$$(1) \frac{\theta - \theta}{\theta - \theta} \quad (2) \theta - \theta$$

اكتشف الخطأ

١٤ طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج 2 ما 45°

إجابة كريم

$$2 \text{ ما } 45^\circ = 2 \times 45^\circ = 90^\circ = 1$$

إجابة أحمد

$$2 = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \times 2 = 2 \text{ ما } 45^\circ$$

أي الإجابتين صحيحة؟ ولماذا؟

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في دائرة الوحدة التي مركزها O إذا كان طول $\widehat{AB} = \frac{\pi}{4}$

فإن: $\angle AOB =$ (د ب و ح) =

$$(1) \frac{\pi}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) 2$$

(٢) إذا كان θ هي أكبر قياس لزاوية حادة في مثلث أطوال أضلاعه 5 ، 12 ، 13 من السنتيمترات

فإن: $\theta =$

$$(1) \frac{12}{13} \quad (2) \frac{5}{13} \quad (3) \frac{0}{13} \quad (4) \frac{12}{5}$$

(٣) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث ABC قائمة الزاوية هي 3 ، 4 ، 5 وكان \widehat{ABC}

أصغر ضلع فإن: $\angle A =$

$$(1) \frac{0}{13} \quad (2) \frac{12}{13} \quad (3) \frac{12}{13} \quad (4) \frac{0}{4}$$

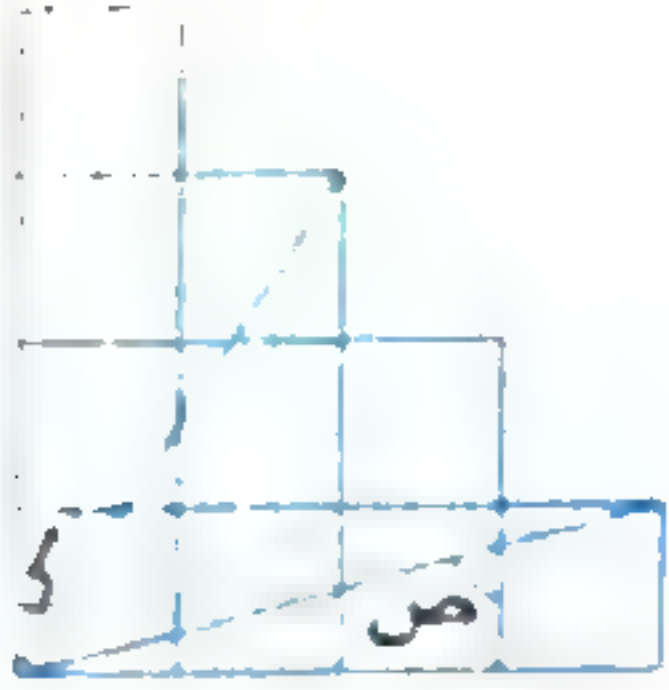
(٤) في الشكل المقابل :



إذا كانت جميع المربعات متطابقة فإن : $\text{طا} = \text{ص} + \text{طا} + \text{ص} + \text{طا} = \dots$

- (١) ٦ (ب) $\frac{11}{9}$ (ج) $\frac{7}{11}$ (د) $3 + 5\sqrt{2}$

(٥) في الشكل المقابل :

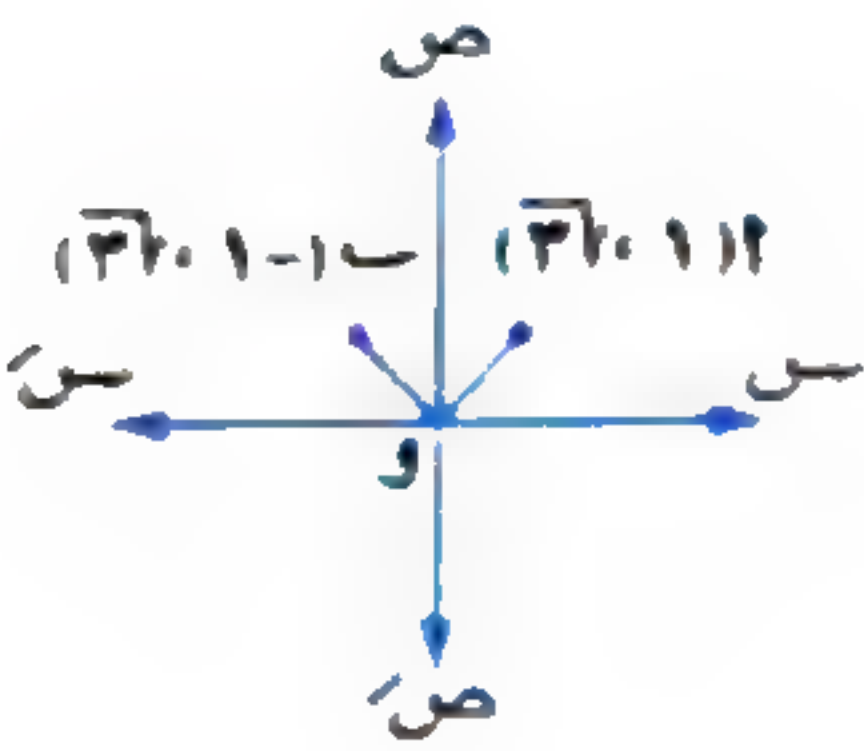


إذا كانت جميع المربعات متطابقة

فإن : $\text{طا} = \text{ص} + \text{طا} + \text{ص} + \text{طا} = \dots$

- (١) $\frac{11}{12}$ (ب) $\frac{7}{4}$ (ج) $\frac{5}{3}$ (د) $\frac{14}{3}$

(٦) في الشكل المقابل :

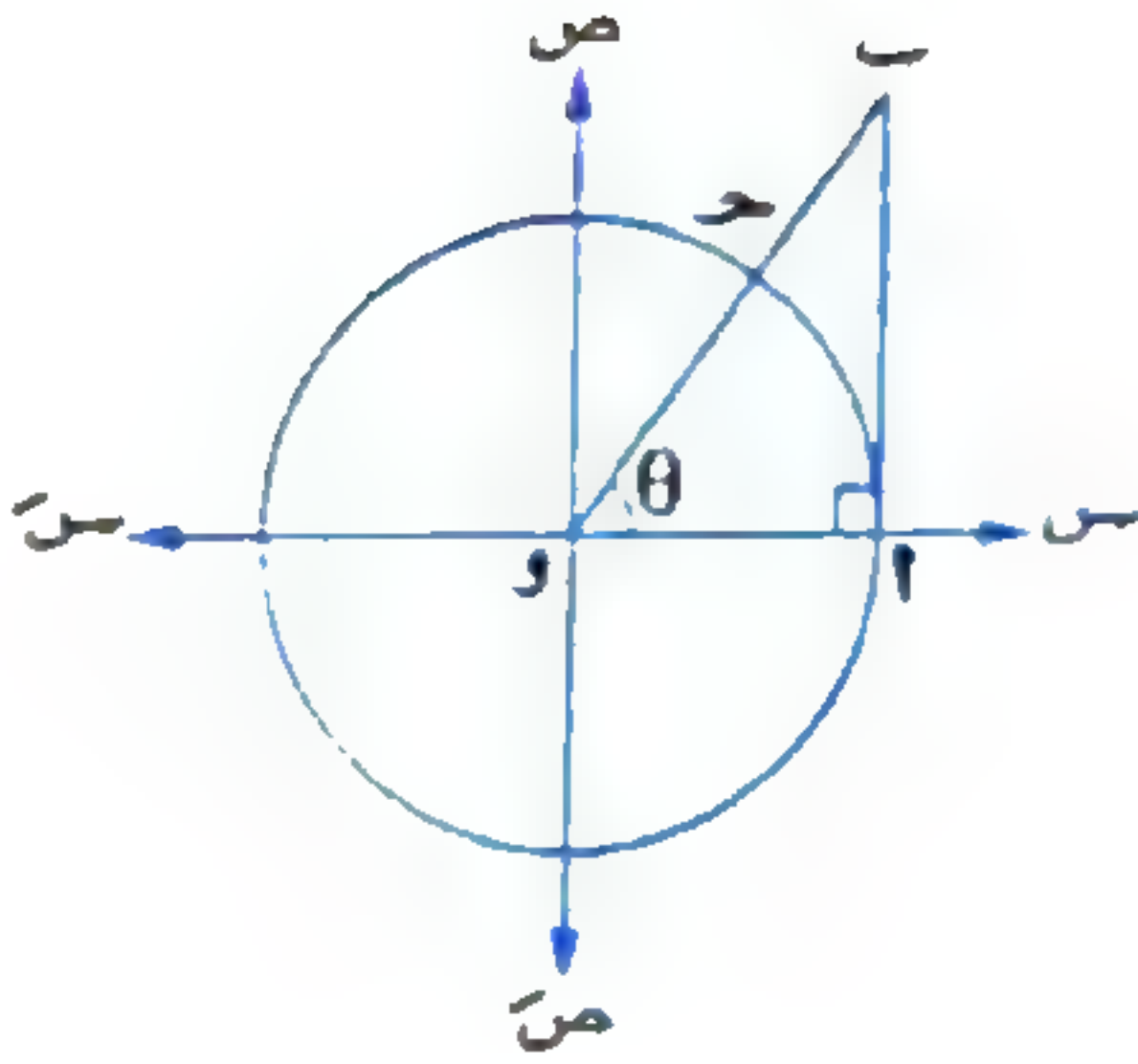


إذا كان : $(3, 1)$ ، $(3, -1)$ ، $(-3, 1)$ ، $(-3, -1)$

فإن : $\text{طا} = (\text{د} و \text{ب}) = \dots$

- (١) ١ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (د) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(٧) في الشكل المقابل :



دائرة وحدة مركزها و ، $\overline{أب}$ قطعة مماسة فإن :

أولاً : $\text{و} = \dots$

- (١) $\text{ما} \theta$ (ب) $\text{ما} \theta$ (ج) $\text{فا} \theta$ (د) $\text{فا} \theta$

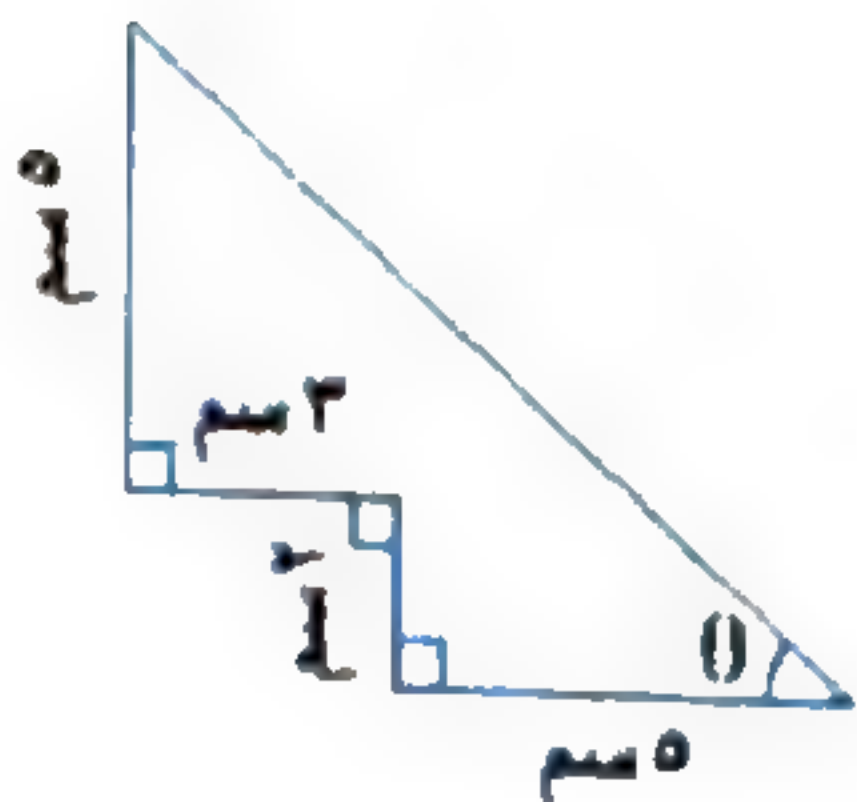
ثانياً : $\text{ب} = \dots$

- (١) $\text{طا} \theta$ (ب) $1 - (\text{فا} \theta)$ (ج) $1 - (\text{فا} \theta)$ (د) $\text{ما} \theta$

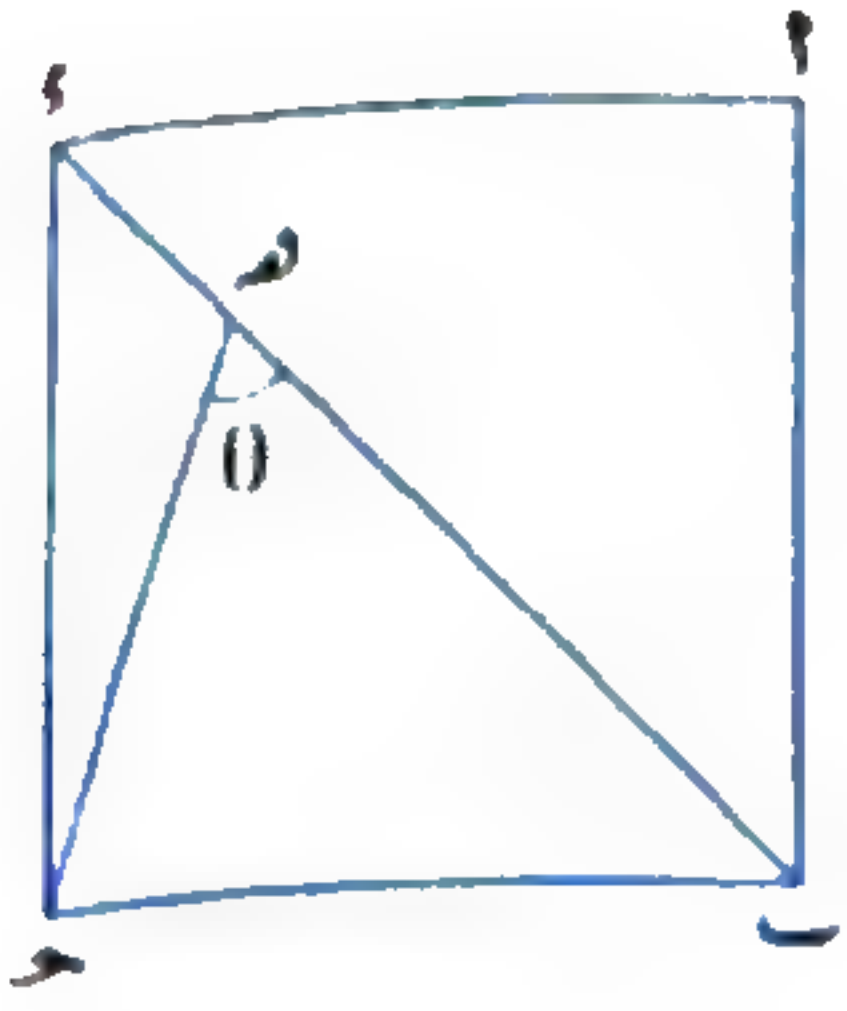
ثالثاً : مساحة المثلث $\text{أ} \text{ب} \text{و} = \dots$

- (١) $\frac{1}{2} \text{ما} \theta$ (ب) $\frac{1}{2} \text{طا} \theta$ (ج) $\frac{1}{2} \text{ما} \theta$ (د) $\frac{1}{2} \text{ما} \theta$

(٨) في الشكل المقابل : $\text{طا} = \theta = \dots$



- (١) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{7}{8}$ (ج) $\frac{2}{7}$ (د) $\frac{8}{7}$



(٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $1 - \cos \theta = \frac{2}{5}$ وكان مربعاً وكان $\frac{2}{5} = \frac{\cos \theta}{1}$

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(ب) $\frac{2}{5}$

(١) $\frac{5}{7}$

(د) $\frac{7}{5}$

(ج) $\frac{2}{7}$

(١٠) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\exists \overline{BC} \text{ وكان } \angle A = \angle C$ ، $\theta = \frac{4}{3}$

فإن : $\theta = \frac{\theta}{2} = \dots\dots\dots$

(د) $\frac{2}{3}$

(ج) $\frac{1}{2}$

(ب) ٢

(١) $\frac{2}{4}$

(١١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\cos \theta = \cos A + \cos B = \frac{5}{2}$

فإن : $\overline{BC} = \dots\dots\dots$ سم

(د) ١٤

(ج) ١٠

(ب) ٨

(١) ٦

(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت θ هي قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم

$\vec{v} = 2\vec{s}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات

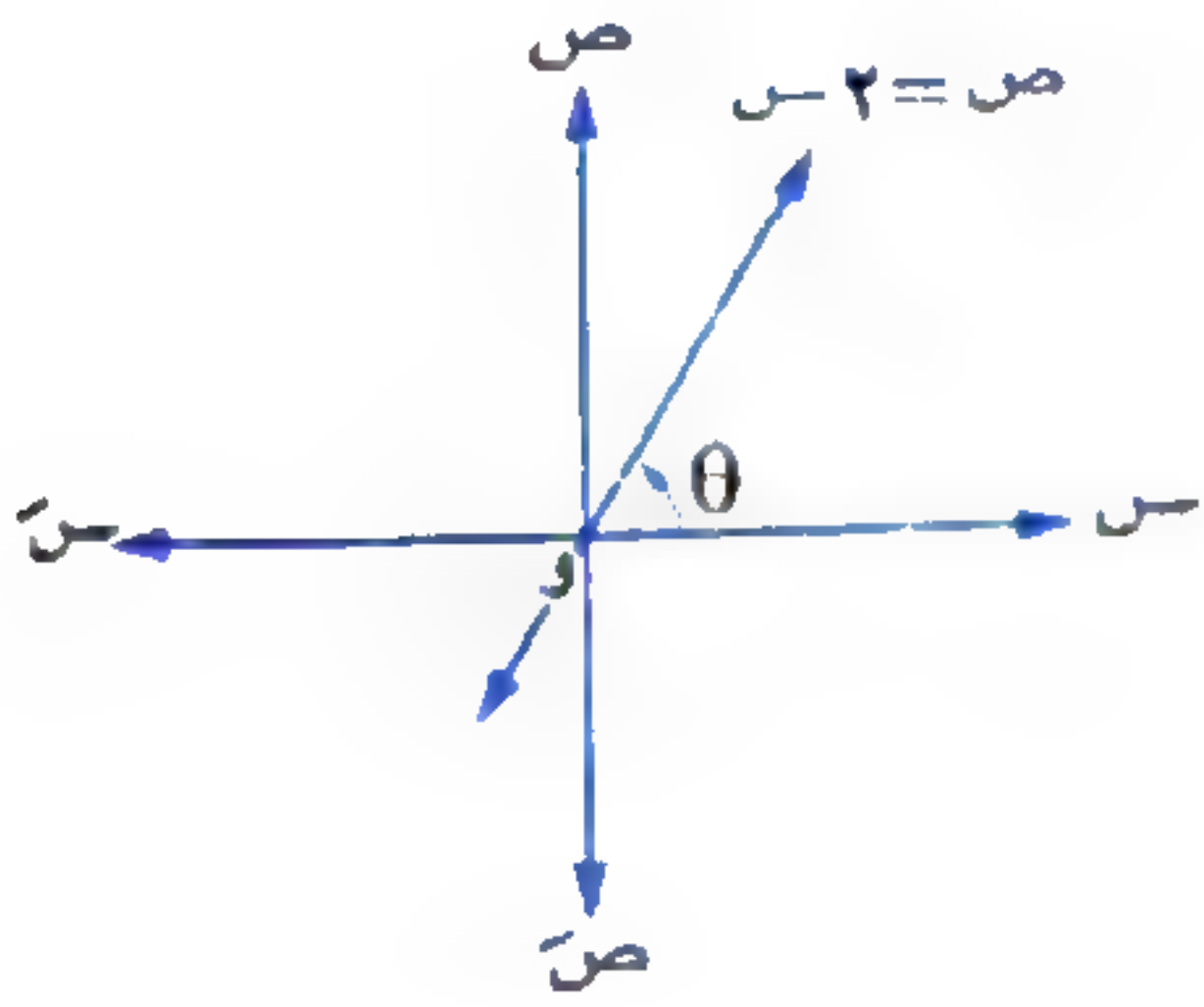
فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(د) $\frac{1}{3}$

(ج) $\frac{2}{5\sqrt{2}}$

(ب) $\frac{1}{5\sqrt{2}}$

(١) $\frac{1}{2}$



الزوايا المنتسبة

تعريف الزاويتين المنتسبتين

هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عددًا صحيحًا من القوائم.

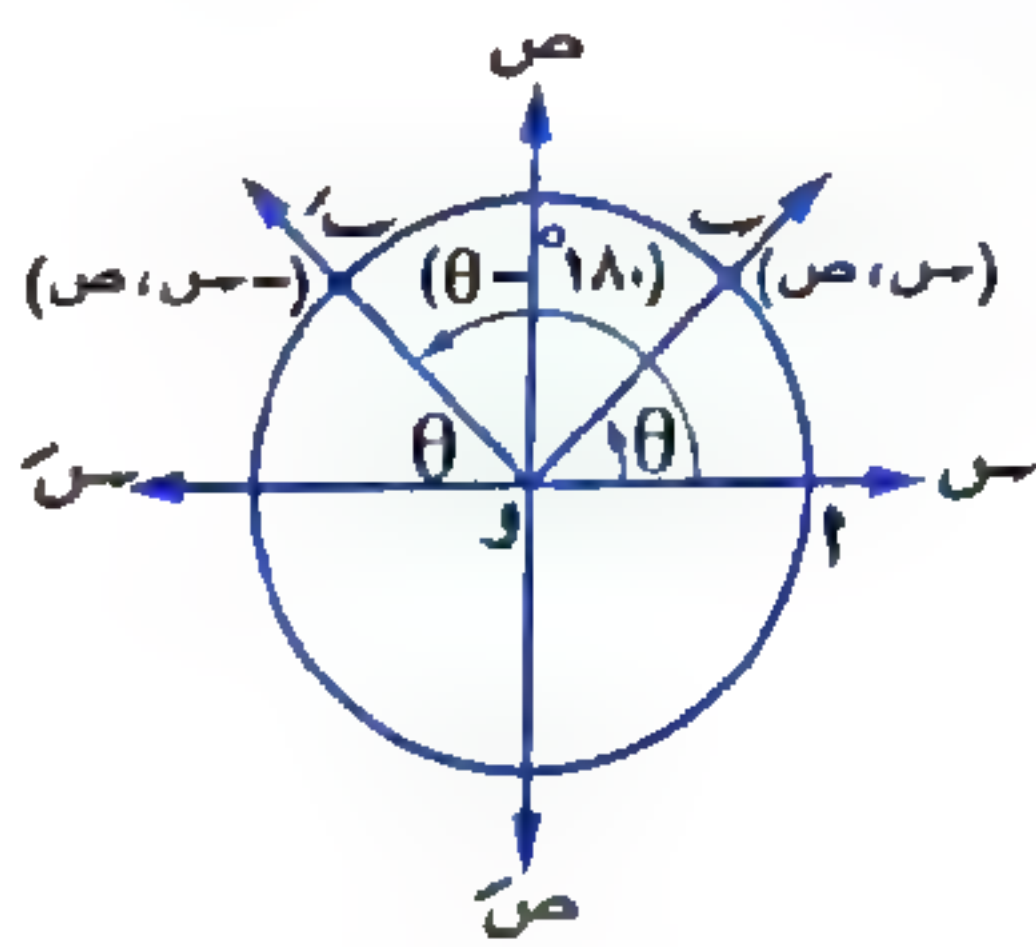
فمثلاً الزاويتان اللتان قياساهما 30° ، 210° زاويتان منتسبتان.

لأن $210^\circ - 30^\circ = 180^\circ$ أي قائمتان.

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

إذا كان الضلع النهائي للزاوية الموجهة α و β في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ وكان $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن :

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 180^\circ)$



إذا كانت صورة النقطة $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ بالانعكاس في محور الصادات

هي النقطة $P'(\cos \alpha, -\sin \alpha)$

فإن $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ الموجهة $(\theta - 180^\circ)$

ونستنتج أن :

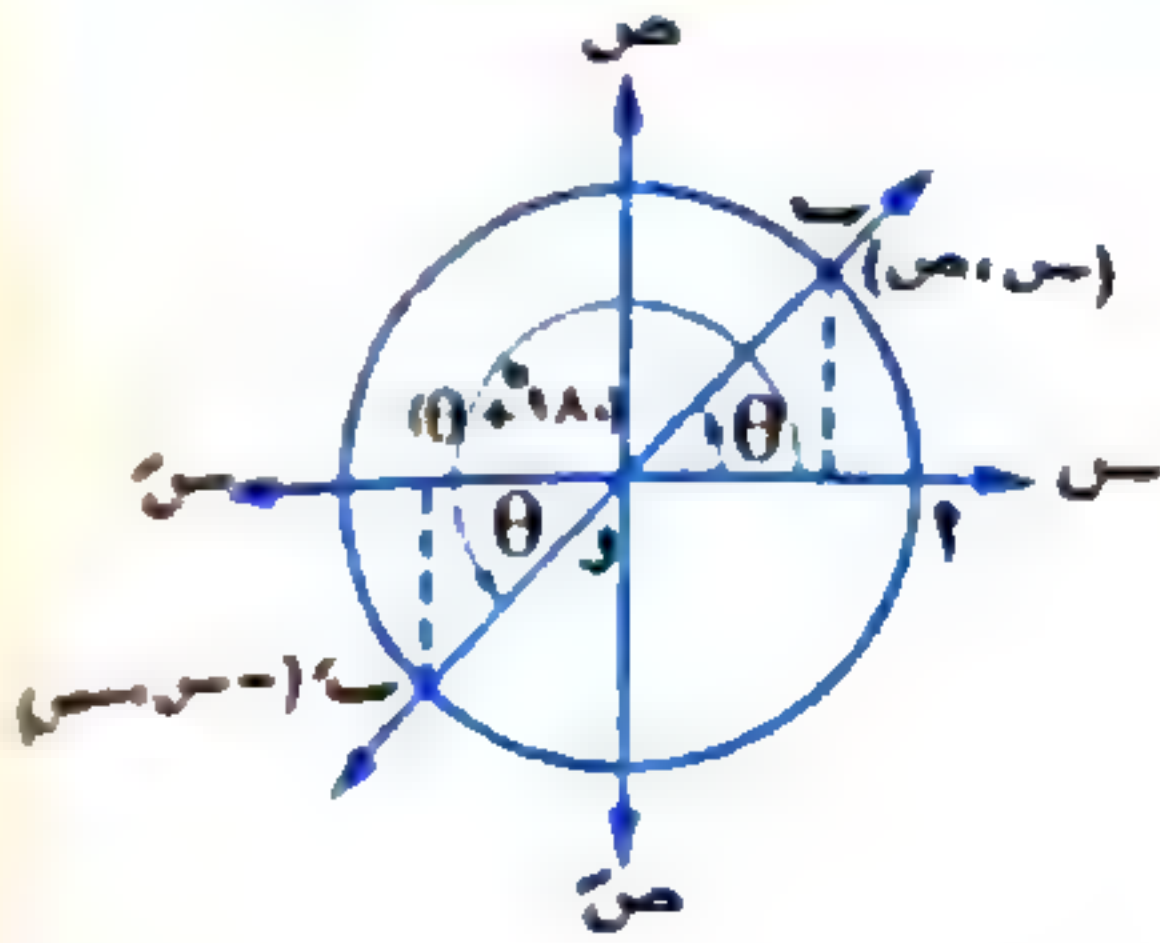
$\cos \theta = \cos(\theta - 180^\circ)$,	$\sin \theta = -\sin(\theta - 180^\circ)$
$\cos \theta - = -\cos(\theta - 180^\circ)$,	$\sin \theta - = \sin(\theta - 180^\circ)$
$\cos \theta - = \cos(\theta - 180^\circ)$,	$\sin \theta - = -\sin(\theta - 180^\circ)$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - = 60^\circ \text{ مـ} - = (60^\circ - 180^\circ) \text{ مـ} = 120^\circ \text{ مـ} \cdot \quad \frac{1}{4} = 30^\circ \text{ مـ} = (30^\circ - 180^\circ) \text{ مـ} = 150^\circ \text{ مـ} \cdot \\ 1 - = 45^\circ \text{ طـ} - = (45^\circ - 180^\circ) \text{ طـ} = 135^\circ \text{ طـ} \cdot \end{aligned}$$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta + 180^\circ)$

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس في نقطة الأصل و
هي النقطة ب' (-س ، -ص)
فإن θ و $(\theta + 180^\circ)$ الموجهة =



ونستنتج ان :

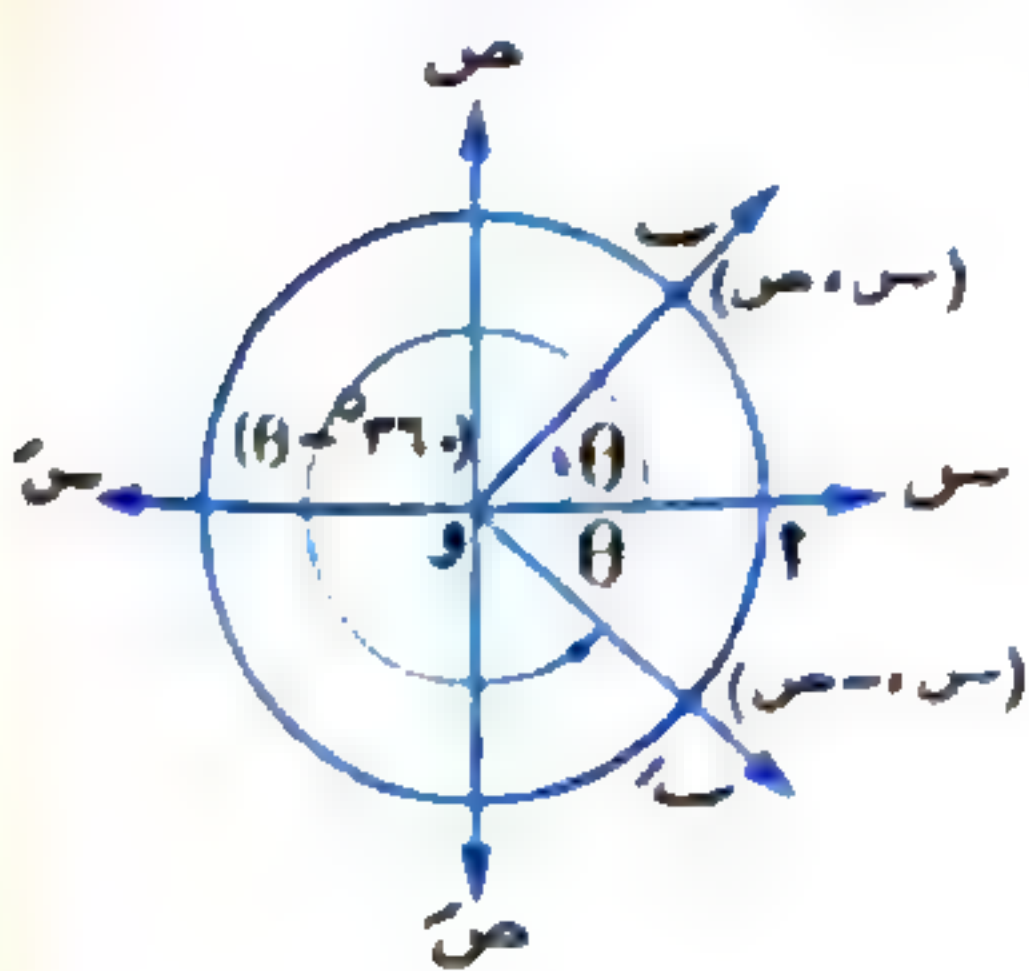
$$\begin{aligned} \text{مـ} - = (\theta + 180^\circ) \text{ مـ} \quad , \quad \text{مـ} - = (\theta + 180^\circ) \text{ مـ} \\ \text{مـ} - = (\theta + 180^\circ) \text{ مـ} \quad , \quad \text{مـ} - = (\theta + 180^\circ) \text{ مـ} \\ \text{طـ} = (\theta + 180^\circ) \text{ طـ} \quad , \quad \text{طـ} = (\theta + 180^\circ) \text{ طـ} \end{aligned}$$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}} - = 45^\circ \text{ مـ} - = (45^\circ + 180^\circ) \text{ مـ} = 225^\circ \text{ مـ} \cdot \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} - = 30^\circ \text{ قـ} - = (30^\circ + 180^\circ) \text{ قـ} = 210^\circ \text{ قـ} \cdot \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} = 60^\circ \text{ طـ} = (60^\circ + 180^\circ) \text{ طـ} = 240^\circ \text{ طـ} \cdot \end{aligned}$$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 360^\circ)$

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات
هي النقطة ب' (س ، -ص)
فإن θ و $(\theta - 360^\circ)$ الموجهة =



ونستنتج ان :

$$\begin{aligned} \text{قـ} - = (\theta - 360^\circ) \text{ قـ} \quad , \quad \text{مـ} - = (\theta - 360^\circ) \text{ مـ} \\ \text{قـ} = (\theta - 360^\circ) \text{ قـ} \quad , \quad \text{مـ} = (\theta - 360^\circ) \text{ مـ} \\ \text{طـ} - = (\theta - 360^\circ) \text{ طـ} \quad , \quad \text{طـ} - = (\theta - 360^\circ) \text{ طـ} \end{aligned}$$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin 45^\circ = \sin (90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ \\ \frac{1}{2} &= \sin 30^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin 60^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ \end{aligned}$$

ملاحظة

الزاوية التي قياسها $(\theta - 90^\circ)$ تكافئ الزاوية التي قياسها (θ)

ومن ذلك يمكن استنتاج :

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 90^\circ)$ كما يلي :

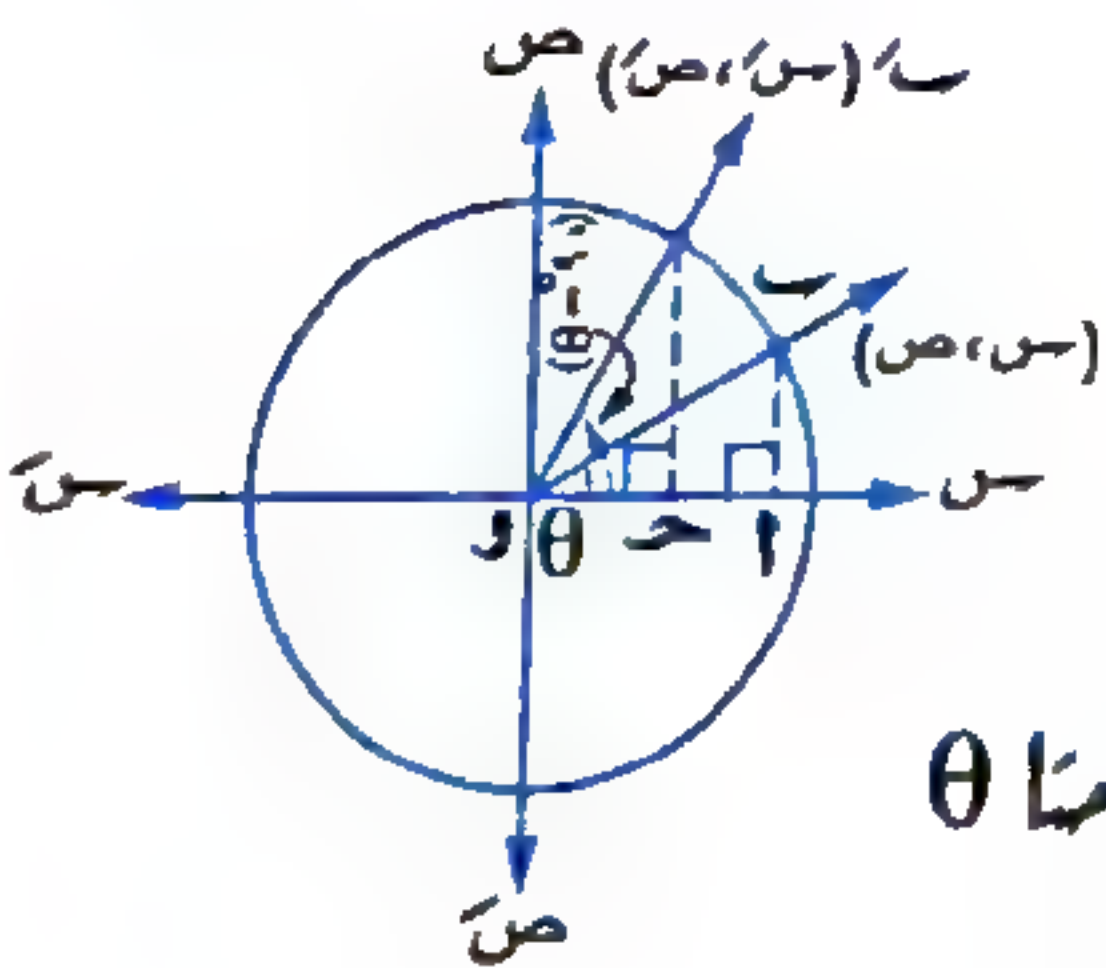
$$\begin{aligned} \sin(\theta - 90^\circ) &= -\cos \theta \\ \cos(\theta - 90^\circ) &= \sin \theta \\ \tan(\theta - 90^\circ) &= -\cot \theta \end{aligned}$$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sin 30^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin 45^\circ = \sin (90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin 60^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ \end{aligned}$$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 90^\circ)$

في الشكل المقابل :



الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها $(\theta - 90^\circ)$ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\sin \theta, -\cos \theta)$

من هندسة الشكل نجد أن : $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$

$$\begin{aligned} \therefore \angle A &= \angle B \quad \text{ومنها } \sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \\ \therefore \angle B &= \angle A \quad \text{ومنها } \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \\ \therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos(\theta - 90^\circ)}{\sin(\theta - 90^\circ)} \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 90^\circ)$

ونلخص ما سبق كما يلي :

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 90^\circ) &= -\cos \theta \\ \cos(\theta - 90^\circ) &= \sin \theta \\ \tan(\theta - 90^\circ) &= -\cot \theta \end{aligned}$$

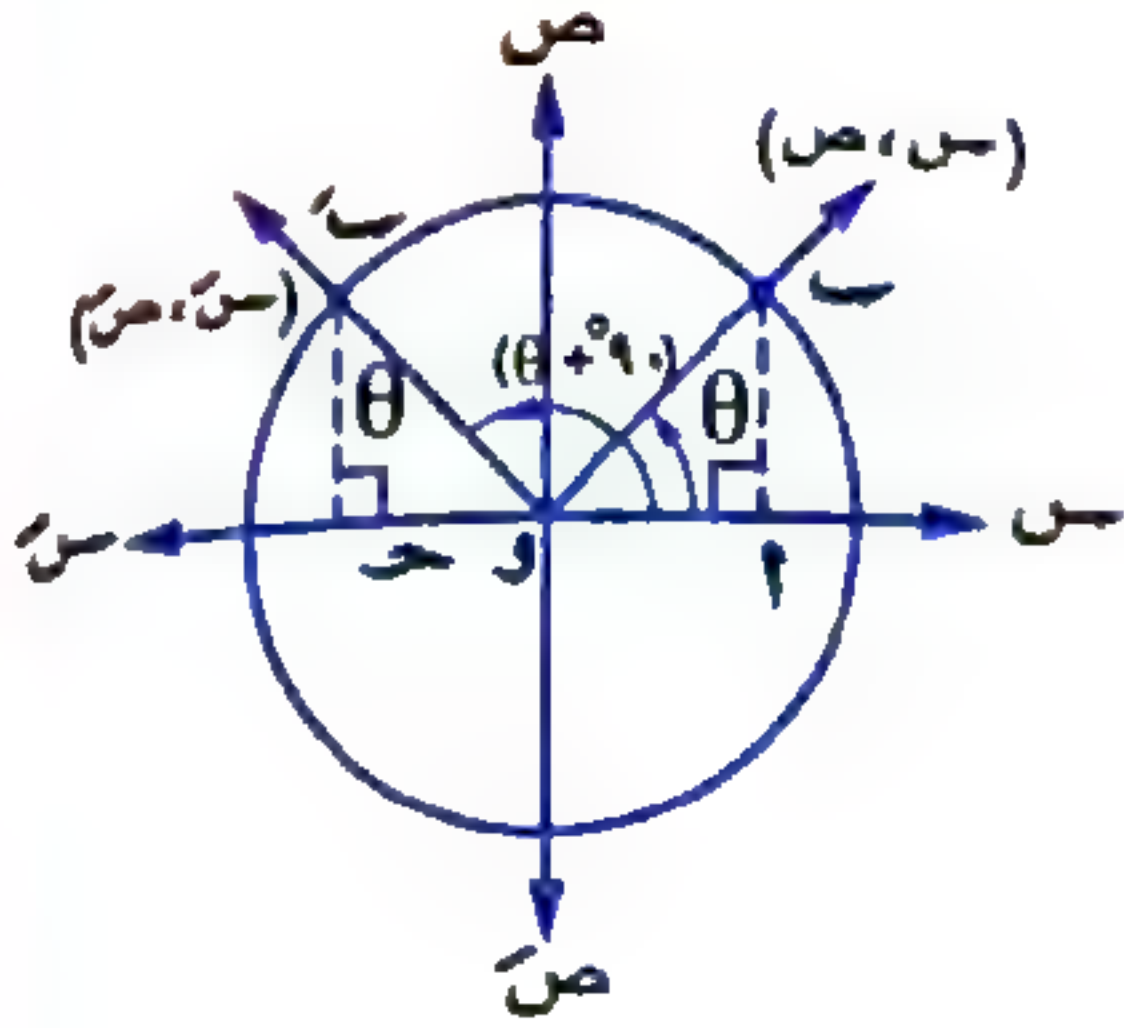
فمثلاً

$$1 = \frac{\sin 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \frac{(\sin 0^\circ - \sin 90^\circ)}{\sin 0^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 0^\circ}$$

$$\sin 20^\circ = (\sin 20^\circ - \sin 90^\circ) = \sin 70^\circ$$

$$\cos 10^\circ - \sin 80^\circ = \sin 80^\circ - (\sin 80^\circ - \sin 90^\circ) = \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$$

5 العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta + 90^\circ)$



في الشكل المقابل :

الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها $(\theta + 90^\circ)$ في

الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (\cos, \sin)

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\Delta OCP \equiv \Delta OCP'$$

$$\therefore \cos \theta = \sin \theta' \text{ ومنها } \cos \theta = \sin \theta'$$

$$\sin \theta = -\cos \theta' \text{ ومنها } \sin \theta = -\cos \theta'$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'} = \tan(\theta + 90^\circ)$$

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta + 90^\circ)$

ونلخص ما سبق كما يلي :

$\sin \theta = \cos(\theta + 90^\circ)$,	$\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$
$\sin \theta = -\cos(\theta + 90^\circ)$,	$\cos \theta = -\sin(\theta + 90^\circ)$
$\tan \theta = \cot(\theta + 90^\circ)$,	$\tan \theta = -\cot(\theta + 90^\circ)$

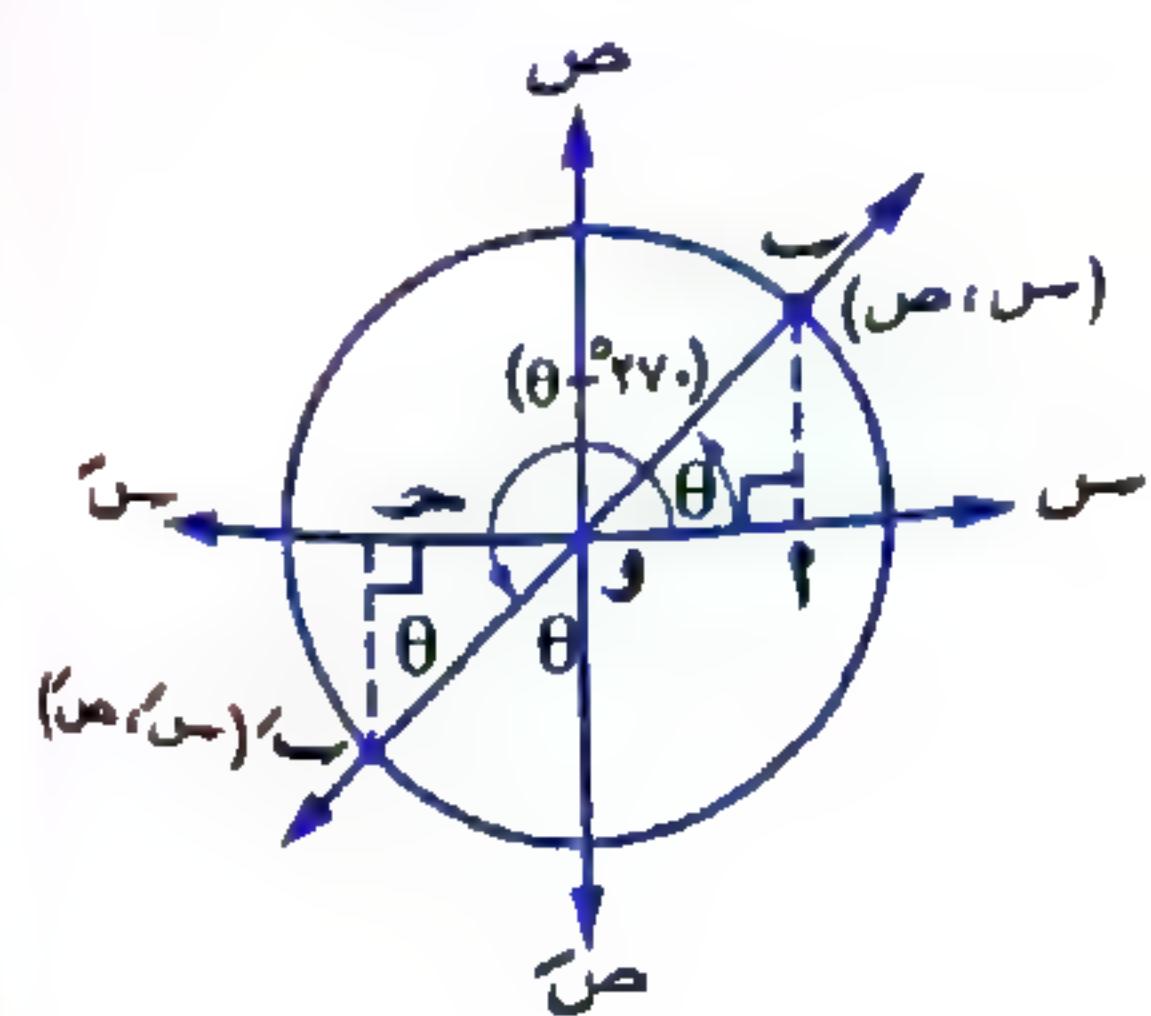
فمثلاً

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{(\sin 60^\circ - \sin 90^\circ)}{\cos 60^\circ} = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$\cos 135^\circ = (\cos 135^\circ - \cos 90^\circ) = \cos 45^\circ = 1$$

6 العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 270^\circ)$

في الشكل المقابل :



الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها

$(\theta - 270^\circ)$ في الوضع القياسي يقطع دائرة

الوحدة في النقطة (\cos, \sin)

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\Delta ح و ب \equiv \Delta ا ب و$$

$$\therefore ح ب = ا ب \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore ح و = ا و \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و}$$

$$\text{اي ان} \quad ح = ا \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{اي ان} \quad ح = ا \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore ح = ا$$

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta - 270^\circ)$

ونلخص ما سبق كما يلي :

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

فمثلاً

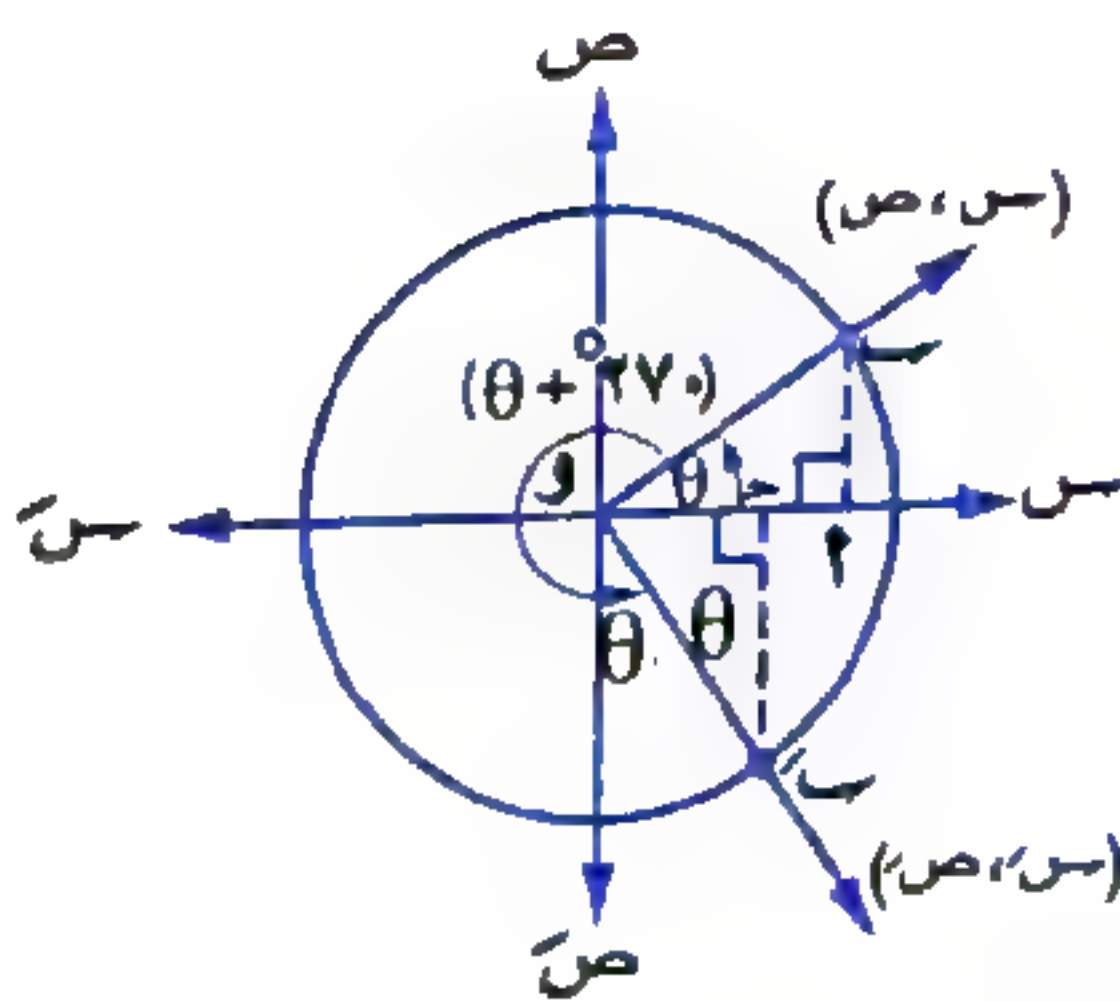
$$\bullet \text{ ح} = 225^\circ = 225^\circ - 270^\circ = -45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ ح} = 240^\circ = 240^\circ - 270^\circ = -30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ ح} = 210^\circ = 210^\circ - 270^\circ = -60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

٧ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta + 270^\circ)$

في الشكل المقابل :



الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها $(\theta + 270^\circ)$ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\sin \theta, -\cos \theta)$

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\Delta ح و ب \equiv \Delta ا ب و$$

$$\therefore ح ب = ا ب \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore ح و = ا و \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و} = \frac{ح}{و} = \frac{ا}{و}$$

$$\text{اي ان} \quad ح = ا \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{اي ان} \quad ح = ا \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\therefore ح = ا$$

وكذلك يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، $(\theta + 270^\circ)$

ونلخص ما سبق كما يلي :

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

$$\text{ح} = \text{ا} \quad \text{ومنها} \quad ح = ا$$

فمثلاً

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ = \sin (30^\circ + 15^\circ) = \sin 30^\circ \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos (30^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin (45^\circ - 15^\circ) = \sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ$$

يمكن تلخيص كل ما سبق بالمخطط التالي (حيث θ هو قياس زاوية حادة) :

فمثلاً :

$$\sin (\theta + 90^\circ)$$

تقع $(\theta + 90^\circ)$ في الربع الثاني

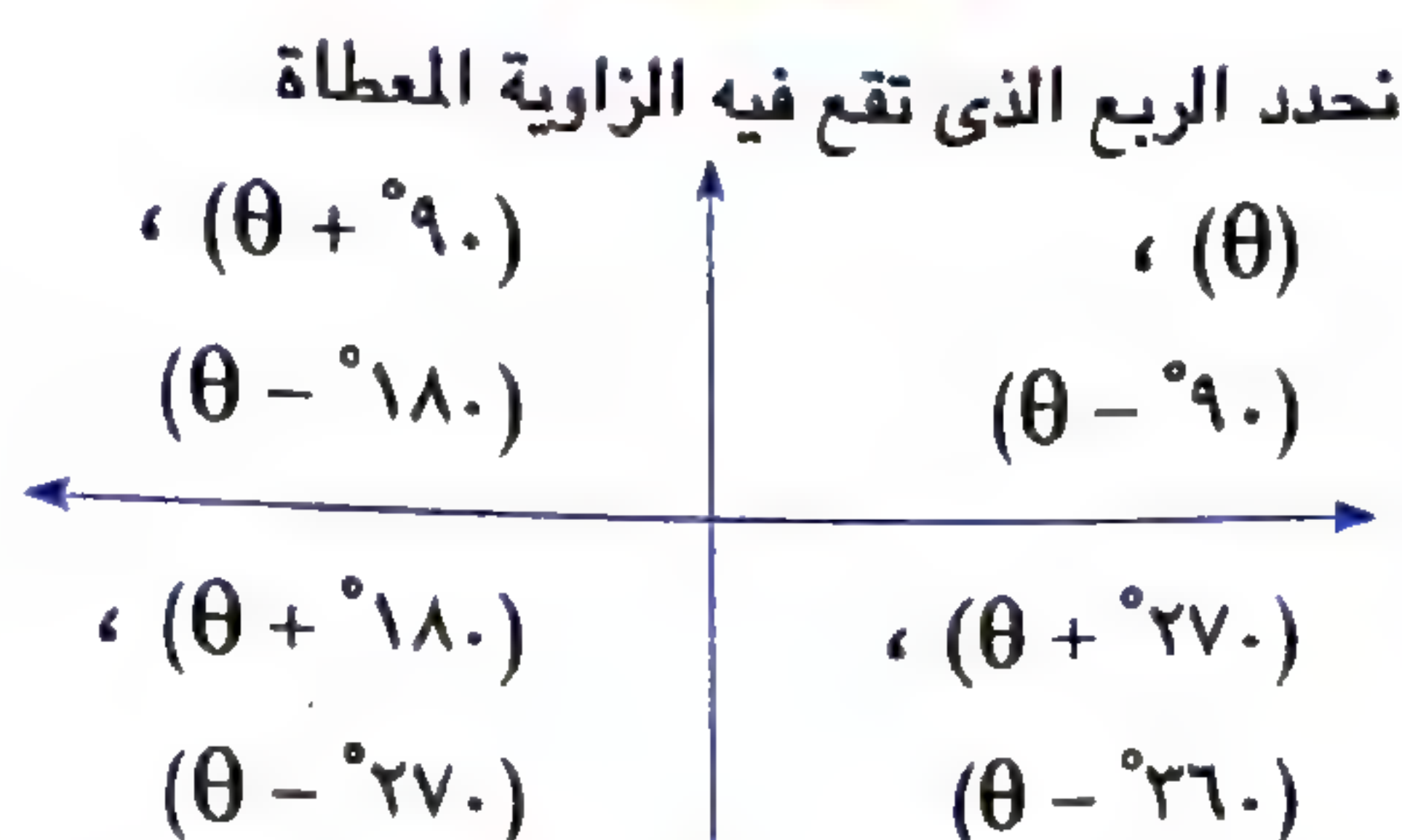
دالة الجيب في الربع الثاني موجبة (+)

$$+\sin \theta$$

تم إضافة التاء لأن قياس الزاوية $(\theta + 90^\circ)$

$$\therefore \sin (\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

أولاً



ثانياً

نضع إشارة الدالة المثلثية المعطاة حسب الربع الذي حددناه.

ثالثاً

في حالة الزوايا التي قياساتها $\theta - 90^\circ$ ، $\theta + 90^\circ$ ، $\theta - 270^\circ$ ، $\theta + 270^\circ$ تتغير فيها الدالة المثلثية بوضع حرف التاء في حالة عدم وجودها بالدالة أو بحذفها في حالة وجودها وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ	في حالة الزوايا التي قياساتها $\theta - 180^\circ$ ، $\theta + 180^\circ$ ، $\theta - 360^\circ$ ، $\theta + 360^\circ$ تكتب الدالة المثلثية كما هي وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ
--	--

فمثلاً :

$$\sin (\theta + 180^\circ)$$

تقع $(\theta + 180^\circ)$ في الربع الثالث

دالة جيب التمام في الربع الثالث سالبة (-)

$$-\sin \theta$$

الدالة كما هي لأن قياس الزاوية $(\theta + 180^\circ)$

$$\therefore \sin (\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

إيجاد دالة مثلثية لزاوية معلوم قياسها وليكن (α)

أولاً إذا كانت $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ (أي $\alpha \in]0, \pi[$)

- ١ نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية ثم نحدد إشارة الدالة المثلثية.
- ٢ نحول الدالة المثلثية للزاوية α إلى نفس الدالة المثلثية للزاوية θ $\exists \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ وذلك بأن :
 نضع α على الصورة $(\theta - 180^\circ)$ إذا كانت α فى الربع الثانى.
 نضع α على الصورة $(\theta + 180^\circ)$ إذا كانت α فى الربع الثالث.
 نضع α على الصورة $(\theta - 360^\circ)$ إذا كانت α فى الربع الرابع.

ثانياً إذا كانت $360^\circ < \alpha < 720^\circ$ (أي $\alpha \in]\pi, 2\pi[$)

- ١ نضع α على الصورة $(\theta + 2\pi)$ حيث $\theta \in]0, \pi[$
- ٢ نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى أولاً.

ثالثاً إذا كانت α سالبة (أي $\alpha < 0$)

تتبع إحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى

نطبق قاعدة الدالة المثلثية للزاوية السالبة وهى :

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta, \quad \cot(-\theta) = -\cot \theta \text{ وهكذا}$$

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى (أولاً) أو (ثانياً)

الطريقة الثانية

نضيف إلى α أى عدد صحيح من الدورات الكاملة الموجبة

(أى نضيف إلى α الزاوية 360° أو 2π حيث $\exists n \in \mathbb{Z}$)

حتى نحصل على زاوية موجبة $\theta \in]0, \pi[$

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ فتكون هى نفس الدالة المثلثية للزاوية السالبة α

أوجد قيمة كل من :

• YE. L. 1

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{2}$$

°V. L ۳

3) $(-0.1)^\circ$

الأصل

$$\frac{\sqrt[3]{r}}{r} = {}^{\circ}6. L = ({}^{\circ}6. + {}^{\circ}18.) L = {}^{\circ}24. L \quad \boxed{1}$$

$$\frac{1}{r} = 0.6 \text{ km} = (0.6 - 0.36) \text{ km} = 0.24 \text{ km} = \frac{18 \times 10^3}{r} \text{ km} = \frac{\pi \times 10^3}{r} \text{ km} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\pi}{r} L_m = \left(\frac{\pi}{r} - \pi^2 \right) L_m = \frac{\pi_0}{r} L_m, i$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = {}^{\circ}3. \text{L} = ({}^{\circ}3. + {}^{\circ}18.) \text{L} = {}^{\circ}21. \text{L} = ({}^{\circ}21. + {}^{\circ}26.) \text{L} = {}^{\circ}47. \text{L} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 = (0.577 -) = (0.577 - 0.180) = 0.397 = (0.397 -) \quad \boxed{3}$$

۲ مکان

أوجد قيمة كل مما يأتي بطريقتين مختلفتين :

12. 4

° 130 LB 2

(° 24. -) L 3

$$\frac{\pi \cdot 10}{\varepsilon} \approx 31.4159 \approx 31.42$$

الحل

$$\frac{\sqrt{r}}{r} = 0.6 \text{ L} = (0.6 - 0.18) \text{ L} = 0.42 \text{ L} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}V}{Y} = 0.3 \cdot L = (0.3 + 0.9) L = 1.2 \cdot L$$

$$1 - = ^\circ \varepsilon_0 \text{ lb} - = (^\circ \varepsilon_0 - ^\circ 18.) \text{ lb} = ^\circ 130 \text{ lb} \quad \boxed{2}$$

$$1 - {}^\circ 40 16' = ({}^\circ 40 + {}^\circ 9.0) 16' = {}^\circ 49 16'$$

$$(^{\circ}6. + ^{\circ}18.) \text{ L} = ^{\circ}24. \text{ L} = (^{\circ}24.-) \text{ L} \quad \boxed{3}$$

$$(^{\circ}3. - ^{\circ}27.) \angle = ^{\circ}24. \angle = (^{\circ}24. -) \angle$$

$$\frac{1}{2} - = 0.5 - =$$

$$\frac{1}{r} = 2.6 =$$

$$^{\circ}310 \text{ G} = (^{\circ}310 + ^{\circ}360) \text{ G} = ^{\circ}670 \text{ G} = \frac{^{\circ}180 \times 10}{\xi} \text{ G} = \frac{\pi 10}{\xi} \text{ G} \therefore \boxed{\xi}$$

$$(^{\circ}40 + ^{\circ}27.) \angle = ^{\circ}310 \angle = \frac{\pi}{\xi} 10 \angle \quad , \quad (^{\circ}40 - ^{\circ}27.) \angle = ^{\circ}310 \angle = \frac{\pi}{\xi} 10 \angle \therefore$$

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

$$\sqrt{r} = 0.4016 =$$

۳ مثال

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتي :

$$^{\circ}9.. \ln\left(\frac{\pi^0}{\xi} -\right) \xi - ^{\circ}33.. \ln \frac{\pi^2}{\gamma} \xi + ^{\circ}6.. \ln (^{\circ}10.-) \xi$$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{مـا} (-^{\circ}150) &= \text{مـا} ^{\circ}150 = \text{مـا} (-^{\circ}180 - ^{\circ}30) = -\text{مـا} ^{\circ}30 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{مـا} ^{\circ}60 &= \text{مـا} (^{\circ}240 + ^{\circ}360) = \text{مـا} ^{\circ}240 = \text{مـا} (^{\circ}60 + ^{\circ}180) = -\text{مـا} ^{\circ}60 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{مـا} \frac{\pi}{3} &= \text{مـا} ^{\circ}120 = \text{مـا} (^{\circ}60 - ^{\circ}180) = -\text{مـا} ^{\circ}60 = -\frac{1}{2} \\ \text{مـا} ^{\circ}330 &= \text{مـا} (^{\circ}30 - ^{\circ}360) = -\text{مـا} ^{\circ}30 = -\frac{1}{2} \\ \text{قـا} \left(\frac{\pi}{4}\right) &= \text{قـا} \frac{\pi}{4} = \text{قـا} ^{\circ}225 = \text{قـا} (^{\circ}45 + ^{\circ}180) = -\text{قـا} ^{\circ}45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{طـا} ^{\circ}90 &= \text{طـا} (^{\circ}180 + ^{\circ}720) = \text{طـا} ^{\circ}180 = \text{صفر} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) - (-\sqrt{3}) (-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}$$

حاول بنفسك

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

- ١ أوجد قيمة : $\text{مـا} ^{\circ}210 - \text{مـا} ^{\circ}510 - \text{مـا} ^{\circ}330$
- ٢ أثبت أن : $1 - \sqrt{3} = \text{مـا} ^{\circ}60 + \text{مـا} ^{\circ}150 + \text{مـا} ^{\circ}390$

مثال ٤

إذا كانت الزاوية الموجهة التي قياسها θ في الوضع القياسي ، ويمر ضلعها النهائي بالنقطة $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| ١ $\text{مـا} (-^{\circ}90)$ | ٢ $\text{مـا} (^{\circ}180 + \theta)$ | ٣ $\text{قـا} (\theta + ^{\circ}90)$ |
| ٤ $\text{قـا} (\theta - ^{\circ}270)$ | ٥ $\text{طـا} (\theta - ^{\circ}360)$ | ٦ $\text{طـا} (\theta -)$ |

الحل

$$\therefore \text{سـ} + \text{صـ} = \left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{17}{13} = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

\therefore النقطة $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right) \in$ دائرة الوحدة.

- | | |
|---|--|
| ١ $\text{مـا} (\theta - ^{\circ}90) = \frac{5}{13}$ | ٢ $\text{مـا} (\theta + ^{\circ}180) = -\frac{5}{13}$ |
| ٣ $\text{قـا} (\theta + ^{\circ}90) = \frac{12}{13}$ | ٤ $\text{قـا} (\theta - ^{\circ}270) = -\frac{12}{13}$ |
| ٥ $\text{طـا} (\theta - ^{\circ}360) = \frac{12}{13}$ | ٦ $\text{طـا} (\theta -) = \frac{5}{13}$ |

مثال ٥

إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة في وضع قياسي وتعين على دائرة الوحدة النقطة $\left(\frac{3}{5}, \text{صـ}\right)$ فأوجد قيمة :

- ١ $\text{طـا} (\theta - ^{\circ}90) + \text{قـا} (\theta - ^{\circ}90)$
- ٢ $\text{طـا} (\theta + ^{\circ}270) - \text{طـا} (\theta + ^{\circ}90) - \text{مـا} (\theta + ^{\circ}180)$

الحل

$\therefore \sin^2 + \cos^2 = 1$ لاي نقطة على دائرة الوحدة.

$$\therefore \sin^2 + \frac{9}{25} = 1 \quad \therefore \sin^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \sin = \frac{4}{5} \text{ حيث } \sin < 0 \quad \therefore \sin = -\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$1 \quad \text{ط} (\theta - 90^\circ) + \text{قا} (\theta - 90^\circ) = \text{ط} \frac{3}{5} + \text{قا} \frac{0}{5} = \frac{3}{5} = 2$$

$$2 \quad \text{ط} (\theta + 270^\circ) - \text{ط} (\theta + 90^\circ) - \text{قا} (\theta + 180^\circ)$$

$$= -\text{ط} (\theta + 90^\circ) - (\text{ط} \theta) - (-\text{قا} \theta) = -\text{ط} \theta - \text{قا} \theta + \text{ط} \theta = -\text{قا} \theta$$

$$= -\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{12}{60}$$

مثال 6

إذا كانت: θ من $\frac{\pi}{2} = \theta$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فأوجد قيمة كل من:

$$1 \quad \text{قا} (\theta - 180^\circ) \quad 2 \quad \text{قا} (\theta - 270^\circ) \quad 3 \quad \text{من} (\theta -) \quad 4 \quad \text{ط} (\theta - 180^\circ)$$

الحل

بفرض أن θ (د و ب) حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(كما في الشكل المقابل) وأن $\sin = -\frac{4}{5}$ (س، ص)

$$\therefore \sin = \text{من} \theta = -\frac{4}{5}, \quad \cos = \text{ط} \theta \text{ حيث } \cos < 0$$

$$\therefore \sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\therefore \cos^2 = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos = -\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$1 \quad \text{قا} (\theta - 180^\circ) = \text{ط} \theta = \frac{3}{5}$$

$$3 \quad \text{من} (\theta -) = \text{من} \theta = \text{س} = -\frac{4}{5}$$

$$4 \quad \text{ط} (\theta - 180^\circ) = \text{ط} (\theta + 180^\circ - 360^\circ) = \text{ط} (\theta + 180^\circ) = \text{ط} \theta = -\frac{3}{5}$$

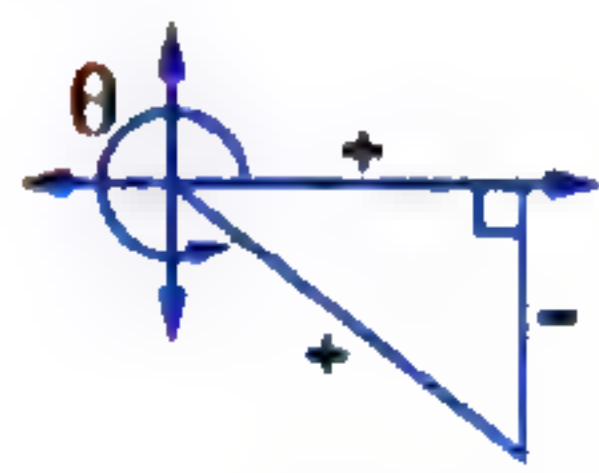
حاول بنفسك

إذا كان الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي والتي قياسها θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$

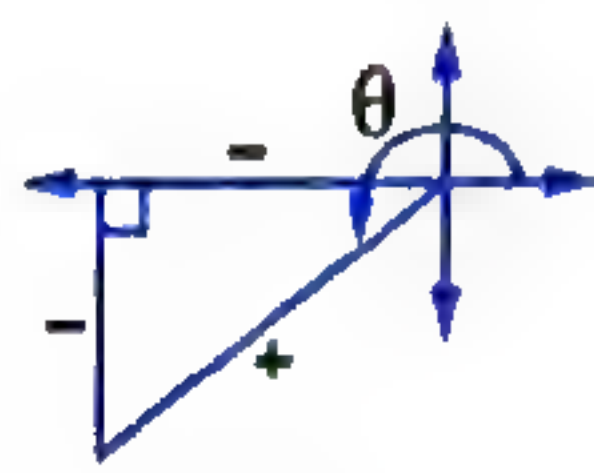
فأوجد قيمة: $13 \text{ من} (\theta - 270^\circ) + \text{ط} 225^\circ + \text{قا} 30^\circ + 12 \text{ ط} (\theta - 270^\circ)$

ملاحظة

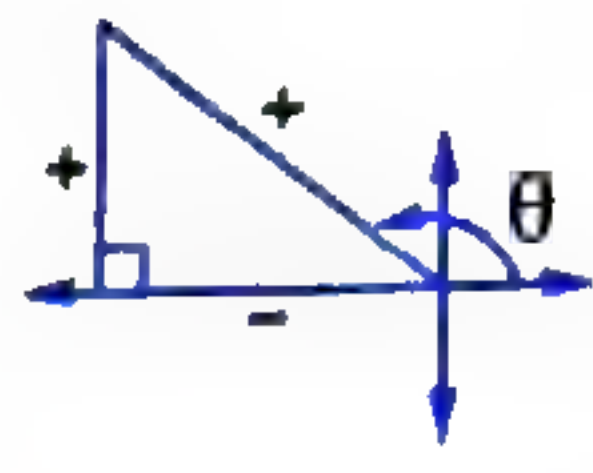
يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاوية مباشرة إذا رسمت الزاوية في وضعها القياسي ورسم المثلث القائم الخاص بها بالاستعانة بقيمة الدالة المثلثية المعطاة مع مراعاة الإشارات حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية كما يلي :



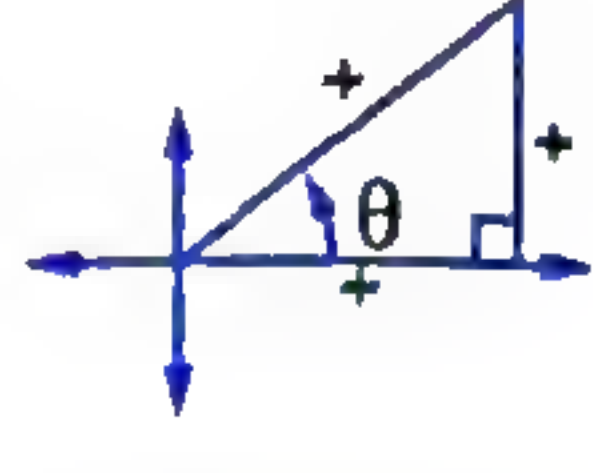
في الربع الرابع



في الربع الثالث



في الربع الثاني



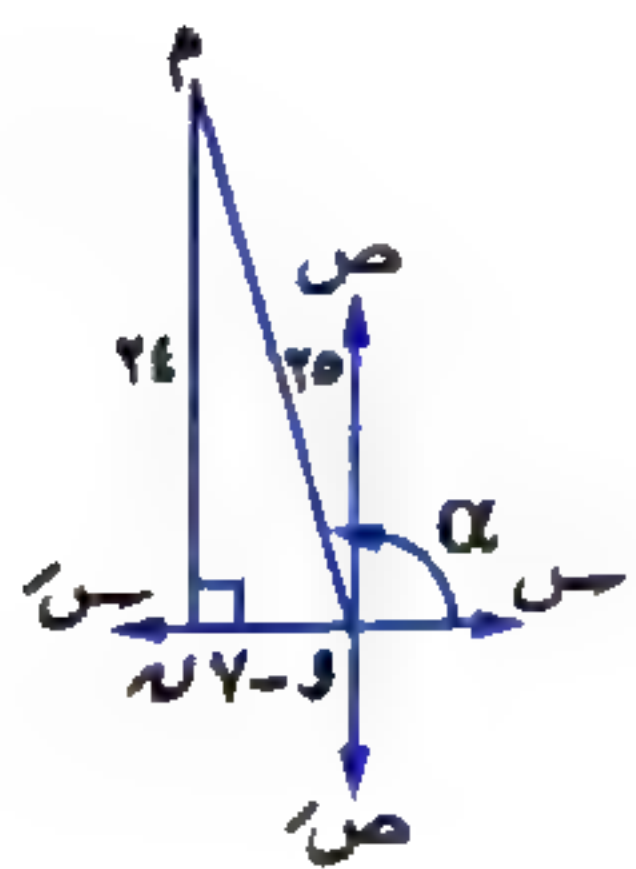
في الربع الأول

مثال ٧

إذا كانت : $\alpha = -\frac{\pi}{5}$ حيث α أصغر زاوية موجبة ، $\beta = \frac{3}{4}$ حيث β أكبر زاوية موجبة بحيث $0 \leq \beta \leq 360^\circ$

فأوجد قيمة : $\sin(\alpha + 180^\circ) \cos(\beta - 90^\circ) + (\alpha - 360^\circ) \sin(\beta - 180^\circ)$

الحل



$\therefore \alpha$ تقع في الربع الثاني أو الثالث.

$\therefore \alpha > 0$

$\therefore \alpha$ تقع في الربع الثاني.

$\therefore \alpha$ أصغر زاوية موجبة.

$$\therefore \alpha = -\frac{\pi}{5}$$

$\therefore \sin \alpha = \frac{24}{25}$ وحدة طول.

$$\therefore \cos \alpha = \frac{7}{25} \quad \because 25^2 = 7^2 + 24^2$$

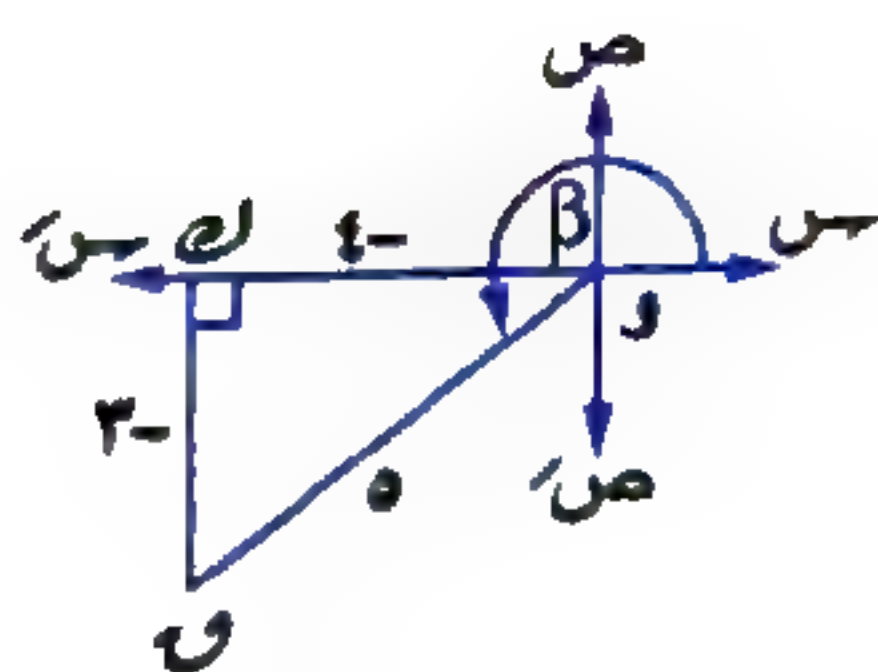
$\therefore \beta$ تقع في الربع الأول أو الثالث.

$\therefore \beta < 0$

$\therefore \beta$ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \beta$ أكبر زاوية موجبة.

$$\therefore \beta = \frac{3}{4}$$



$\therefore \sin \beta = \frac{3}{5}$ وحدة طول.

$$\therefore \cos \beta = -\frac{4}{5} \quad \because 5^2 = 3^2 + 4^2$$

\therefore المقدار = $\sin(\alpha + 180^\circ) \cos(\beta - 90^\circ) + (\alpha - 360^\circ) \sin(\beta - 180^\circ)$

$$= \sin \alpha \cos \beta + (\alpha - 360^\circ) \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - (\beta - 360^\circ) \sin \beta$$

$$= \frac{24}{25} \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - 360^\circ\right) \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - 360^\circ\right) \times \frac{3}{5}$$

ملاحظة

إذا كان : $\alpha = \beta$ ، $\alpha = \gamma$ ، $\alpha = \delta$ ، $\alpha = \epsilon$ ، $\alpha = \zeta$ ، $\alpha = \eta$

فان : $\alpha + \beta = 90^\circ$ حيث α ، β قياسا زاويتين حادتين موجبتين.

فمثلا إذا كان : $\alpha = 23^\circ$ فإن : $\alpha + 23^\circ = 90^\circ$ أي $\alpha = 67^\circ$

مثال

إذا كان : ما $(\theta + 28)^\circ =$ ما $(2 - \theta)^\circ$ أوجد قيمة واحدة لـ θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل

$$^{\circ}q. = ^{\circ}13 - \theta 2 + ^{\circ}28 + \theta 3 \therefore (^{\circ}13 - \theta 2) L = (^{\circ}28 + \theta 3) L \therefore$$

$$\begin{aligned} \circ \backslash_0 &= \theta \therefore & \circ \vee_0 &= \theta \circ \therefore & \circ \dot{\vee}_0 &= \circ \backslash_0 + \theta \circ \therefore \end{aligned}$$

لاحظ أنه

توجد قيم أخرى لـ θ تنحصر بين 0° ، 90° مثل $\theta = 49^\circ$ ، $\theta = 87^\circ$ ولإيجاد هذه القيم لابد من حل المثال باستخدام القانون العام كتعميم للملاحظة السابقة.

استنتاج القانون العام

١ إذا كان: $\alpha = \beta$ فإن: $\alpha = (\beta - 90^\circ)$

$$\theta_{\lambda} = \beta - \theta_{\cdot} + \alpha \therefore \quad \beta - \theta_{\cdot} = \alpha \therefore$$

$$\angle q. = \beta - \alpha \therefore$$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (٣٦٠°) على الزاوية ٩٠°

تنبیه هام جدا

عند الحل لا بد أن نبدأ بزاوية دالة الجيب α

٢ وينفس الطريقة يمكن استنتاج نفس القوانين إذا كان : $\alpha \neq \beta$

۳) إذا كان : $\alpha \neq \beta$ فإن :

$$(\beta - ^{\circ}27.) \vdash = \alpha \vdash \quad \text{, i} \quad (\beta - ^{\circ}9.) \vdash = \alpha \vdash$$

$$\beta - \textcircled{27} = \alpha \therefore \qquad \qquad \qquad \beta - \textcircled{9} = \alpha \therefore$$

$$\angle YV = \beta + \alpha \therefore \quad \angle 1 = \beta + \alpha \therefore$$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (٣٦٠) على الزاويتين ٩٠° ، ٢٧٠°

وبالتالي يمكن كتابة القانون العام لأي زاويتين α ، β كما يلي :

القانون العام لحل المعادلات على الصور $\alpha \equiv \beta$ أو $\alpha \equiv \beta + \pi$ أو $\alpha \equiv \beta + 2\pi$

١ إذا كان : $\alpha \equiv \beta$

فإن : $\alpha \equiv \beta$ أي أن $\alpha \equiv \beta + \pi$ حيث $\pi \in \mathbb{R}$

أي أن قياس زاوية الجيب \pm قياس زاوية جيب التمام $\alpha \equiv \beta + \pi$

٢ إذا كان : $\alpha \equiv \beta + \pi$

فإن : $\alpha \equiv \beta + \pi$ أي أن $\alpha \equiv \beta + \pi$ حيث $\pi \in \mathbb{R}$

$$\frac{\pi}{2} (1 + \pi) \neq \beta, \pi \neq \alpha,$$

٣ إذا كان : $\alpha \equiv \beta + 2\pi$

فإن : $\alpha \equiv \beta + 2\pi$ أي أن $\alpha \equiv \beta + 2\pi$ حيث $\pi \in \mathbb{R}$

$$\pi \neq \beta, \frac{\pi}{2} (1 + \pi) \neq \alpha,$$

مثال ٩

أوجد الحل العام للمعادلة : $\alpha \equiv \beta$ ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta + \pi \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta + \pi \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta + \pi \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

∴ الحل العام هو $\alpha \equiv \beta + \pi$ ، أي $\alpha \equiv \beta + \pi$ حيث $\pi \in \mathbb{R}$ عند $\pi = 0$:

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta + \pi$$

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : $\sin \theta = \sin 2\theta$
ثم أوجد : جميع قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، التي تحقق المعادلة.

مثال ١٠

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $\sin \theta = 1 - \theta$ ، حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ٢ $\sin \theta = \sqrt{3} + (\theta - \frac{\pi}{2})$ ، حيث $\theta \in [0, \pi]$

٣ $\sin \theta = 3 - \theta$ ، حيث $\theta \in [0, \pi]$

الحل

١ $\sin \theta = 1 - \theta$ $\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الثاني ، \therefore الزاوية الحادة التي جيبها $= \frac{1}{2}$ هي 30° ،

$\therefore \theta = 30^\circ$ ، $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (مرفوض لأن $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

\therefore مجموعة الحل $= \{30^\circ\}$

٢ $\sin \theta = \sqrt{3} + (\theta - \frac{\pi}{2})$ $\therefore \sin \theta = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (سالبة) $\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو الرابع

، \therefore الزاوية الحادة التي جيبها $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ هي 60° ،

$\therefore \theta = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$ ، $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ،

\therefore مجموعة الحل $= \{120^\circ, 240^\circ\}$

٣ $\sin \theta = 3 - \theta$ $\therefore \sin \theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin \theta = \frac{3}{4}$ $\therefore \sin \theta = \frac{3}{4}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الرابع

\therefore الزاوية الحادة التي جيب تمامها $= \frac{3}{4}$ قياسها 30° ،

$\therefore \theta = 30^\circ$ ، $\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ ،

أ، $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو الثالث

$\therefore \theta = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$ ، $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ،

\therefore مجموعة الحل $= \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

على الزوايا المنتسبة

10



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $42^\circ = \dots\dots\dots$

(أ) 42° (ب) 48° (ج) 48° (د) 48°

(٢) $90^\circ + \theta = \dots\dots\dots$

(أ) $90^\circ - \theta$ (ب) $\theta - 90^\circ$ (ج) $90^\circ + \theta$ (د) $270^\circ + \theta$

(٣) $\frac{105^\circ}{105^\circ} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{105^\circ}{105^\circ}$ (ب) 135° (ج) 15° (د) 90°

(٤) $\theta + \text{مـ} = (180^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ مـ (د) مـ

(٥) $\theta + \text{مـ} = (270^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ مـ (د) مـ

(٦) إذا كان θ حـ مثلثاً حاد الزوايا فإن : $\theta + \text{مـ} + \text{حـ} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ - (ب) صفر (ج) ١ (د) $\frac{1}{4}$

(٧) إذا كان θ هي قياس الزاوية في وضعها القياسي وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في (س ، -س) حيث $s < 0$ فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(أ) 45° (ب) 135° (ج) 225° (د) 315°

(٨) إذا كان : $\theta = -\frac{1}{4}$ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(أ) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330°

(٩) إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ حيث $\exists \theta$ فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(أ) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330°

(١٠) إذا كان θ حـ شكلاً رباعياً دائرياً وكان : $\theta = \frac{2}{5}$ فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{6}{5}$

$$(11) \quad \frac{\text{طا } (س + ٩٠)}{\text{طا } (س - ٩٠)} = \dots\dots\dots$$

(أ) ١- (ب) ١ (ج) طا (س + ٩٠) (د) طا (س + ٩٠)

$$(12) \quad \frac{\pi}{4} = س + ص : \text{فإن } \frac{ص - ما}{ص - ما} = \dots\dots\dots$$

(أ) ١= (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

$$(13) \quad \text{إذا كان : } س + ٩٠ = ٢ ، \text{ طا } ١ = \frac{١}{٣} \text{ فإن : طا } ٢ = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) ١ (د) ٢

$$(14) \quad \text{إذا كان : } ما = \theta ، \text{ ما } ٢ = \theta ، [\exists \theta] \frac{\pi}{4} \text{ فإن : ما } ٣ = \theta \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$(15) \quad \text{إذا كان : طا } \theta = \theta ٢ ، ٩٠ > \theta > ٠ ، \text{ فإن : ما } \theta + \theta ٢ = \theta \dots\dots\dots$$

(أ) ١ (ب) ١- (ج) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$

$$(16) \quad \text{إذا كان : ما } \alpha = \text{ما } \beta \text{ فإن : طا } (\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

(أ) ١ (ب) ١- (ج) غير معرف (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$$(17) \quad \text{إذا كان : ما } \theta ٢ = \text{ما } \theta ٤ \text{ حيث } \theta \text{ زاوية حادة موجبة فإن : طا } (\theta ٣ - ٩٠) = \dots\dots\dots$$

(أ) ١- (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ج) ١ (د) $\sqrt{٣}$

$$(18) \quad \text{إذا كان : ه ما } (\theta - ٩٠) = \epsilon ، ٩٠ > \theta > ٠ \text{ فإن : ما } \theta = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٢-}{٥}$ (ج) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

$$(19) \quad \text{إذا كانت : طا } ١ + (\theta + ٩٠) = ٠ \text{ حيث } ٩٠ > \theta > ٠ \text{ فإن : ما } \theta ٤ = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) ١-

$$(20) \quad \text{إذا كان : ما } (\theta + ٩٠) + \text{ما } (\theta ٢ - ٩٠) = ٠ \text{ حيث } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ فإن : ما } \theta ٢ = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$(21) \quad \text{إذا كان : ما } (\theta - ٢٧٠) = \frac{١}{٣} \text{ حيث } \theta \text{ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : } \theta = \dots\dots\dots$$

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (ج) ٢١٠ (د) ٣٣٠

$$(22) \quad \text{إذا كان : طا } \theta = \frac{٥-}{١٣} ، \text{ ما } \theta > ٠ \text{ فإن : طا } \theta = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{٥-}{١٣}$ (ج) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{١٣-}{٥}$

(٢٣) إذا كان : $\theta = \frac{1}{4}$ ، $\theta < 0$ ، فإن : $\theta = \dots$

(د) $^{\circ}330$

(ج) $^{\circ}210$

(ب) $^{\circ}150$

(أ) $^{\circ}30$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $\sin 150^{\circ}$	(٢) $\cos 210^{\circ}$	(٣) $\tan 240^{\circ}$	(٤) $\csc (-150^{\circ})$
(٥) $\tan 225^{\circ}$	(٦) $\cot \frac{11\pi}{6}$	(٧) $\sec 780^{\circ}$	(٨) $\csc (-90^{\circ})$
(٩) $\csc \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$	(١٠) $\cot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$	(١١) $\csc (-480^{\circ})$	(١٢) $\csc \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

- (١) $\sin 120^{\circ} + \tan 225^{\circ} + \cot 330^{\circ} + \csc 420^{\circ}$
- (٢) $\csc 390^{\circ} \sin (-60^{\circ}) + \csc 30^{\circ} \sin 120^{\circ}$
- (٣) $\sin 150^{\circ} \csc (-300^{\circ}) + \sin 930^{\circ} \tan 240^{\circ}$
- (٤) $\tan \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3} + \tan \frac{11\pi}{6} \cot \frac{11\pi}{6} + \tan \frac{25\pi}{6} \cot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{19\pi}{3}\right)$

أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

- (١) $\csc (-300^{\circ}) \sin 420^{\circ} - \csc 750^{\circ} \sin 660^{\circ} = \text{صفر}$
- (٢) $\sin 600^{\circ} \csc (-30^{\circ}) + \sin 150^{\circ} \csc (-240^{\circ}) = 1$
- (٣) $\csc 480^{\circ} \sin (-60^{\circ}) + \csc 300^{\circ} \sin (-120^{\circ}) = \text{صفر}$
- (٤) $\csc 150^{\circ} \tan 225^{\circ} + \csc 315^{\circ} \cot (-120^{\circ}) + \csc 210^{\circ} \cot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ فأوجد :

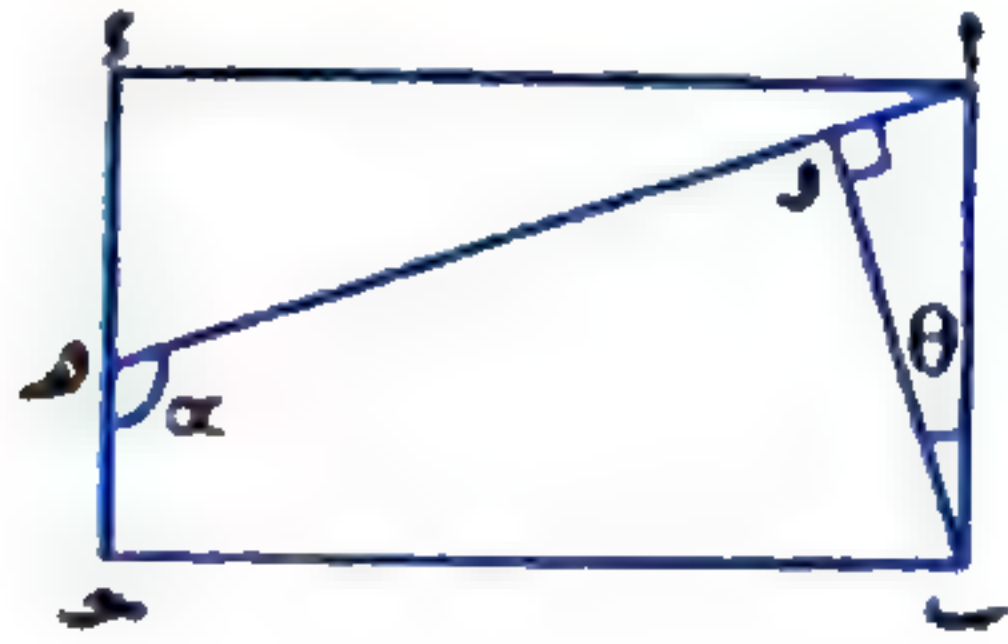
(١) $\sin (\theta + 180^{\circ})$	(٢) $\csc \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	(٣) $\tan (\theta - 360^{\circ})$
(٤) $\cot \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	(٥) $\csc (\pi + \theta)$	(٦) $\csc (\pi - \theta)$

إذا كانت الزاوية الموجهة التي قياسها θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي يمر بالنقطة $\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right)$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

(١) $\sin (\theta + 270^{\circ})$	(٢) $\csc (\theta + 270^{\circ})$	(٣) $\cot \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
(٤) $\tan \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	(٥) $\tan (\theta - 180^{\circ})$	(٦) $\cot (\theta -)$

إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة في الوضع القياسي ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة

في النقطة $P(x, y)$ فأوجد قيمة : $\csc (\theta - 90^{\circ}) + \tan (\theta - 90^{\circ}) \csc (\theta + 90^{\circ})$ «صفر»



(٤) في الشكل المقابل :

أ ب ح د مستطيل ، ط أ = θ

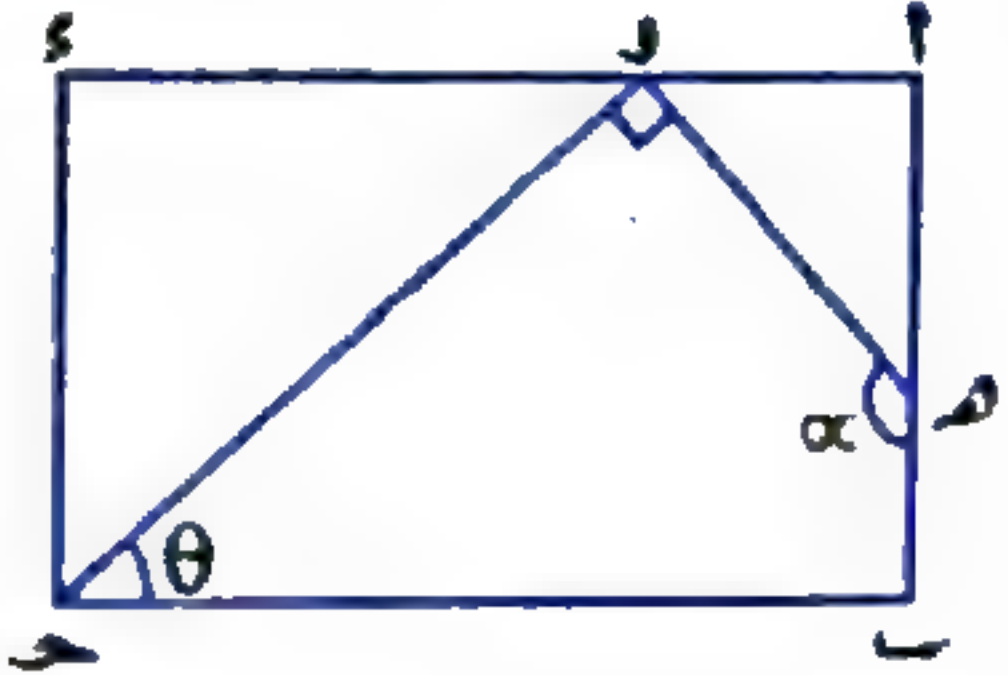
، و ب د \perp ح د فإن : ط أ = α =

(د) $\frac{2}{3}$

(ج) $\frac{1}{3}$

(ب) $\frac{2}{4}$

(أ) $\frac{1}{3}$



(٥) في الشكل المقابل :

أ ب ح د مستطيل فيه : ح أ = θ

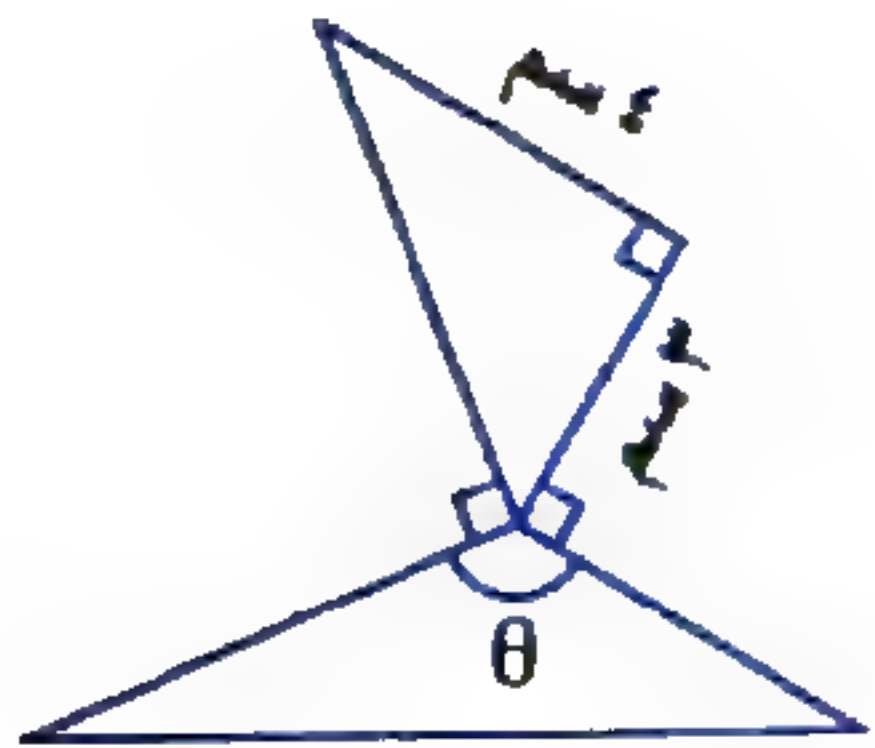
، و ب د \perp ح د فإن : ح أ = α =

(د) $\frac{2}{4}$

(ج) $\frac{2}{4}$

(ب) $\frac{4}{5}$

(أ) $\frac{2}{5}$



(٦) في الشكل المقابل :

ح أ = θ =

(ب) $\frac{2}{5}$

(أ) $\frac{2}{5}$

(د) $\frac{4}{5}$

(ج) $\frac{4}{3}$

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب ح د مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ ح ، و ب د \perp ح د

، و د ح \perp ب ح ، و ب د \perp ح د

، و (د ح د) = θ

، و د ح = ح د = ح د ، و ح د = ح د = ح د

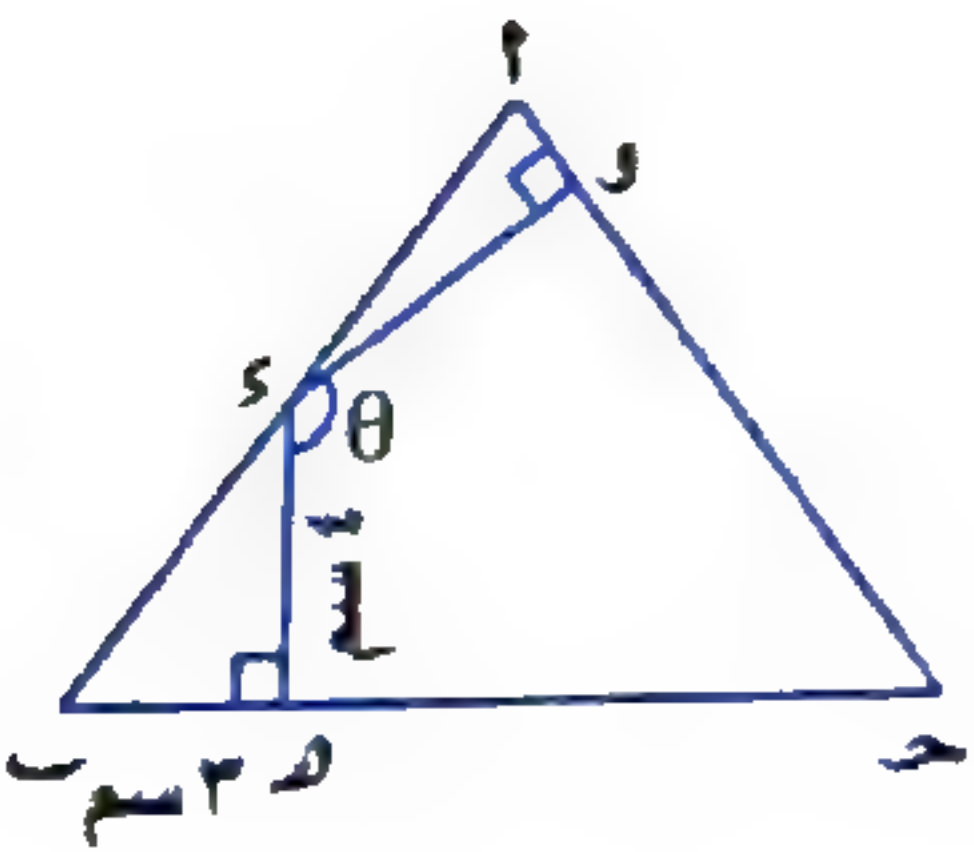
فإن : ح أ = θ =

(د) $\frac{4}{5}$

(ج) $\frac{4}{5}$

(ب) $\frac{2}{5}$

(أ) $\frac{2}{5}$



(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : ح د = ح د = ح د

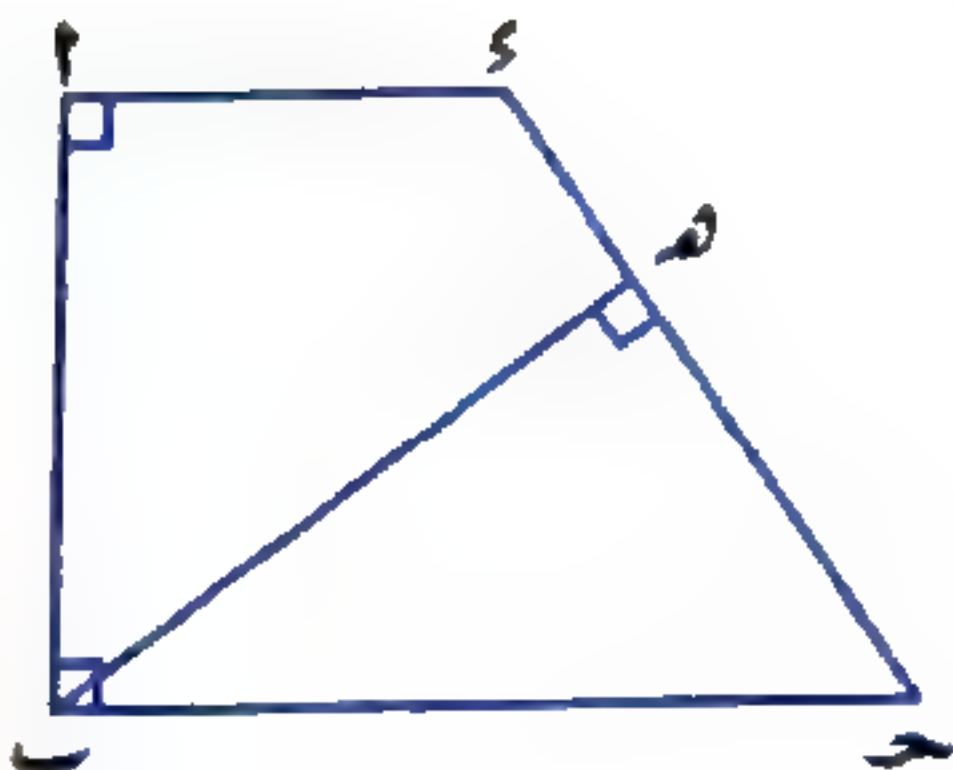
فإن : ط أ (د ح د) =

(د) $\frac{2}{4}$

(ج) $\frac{2}{4}$

(ب) $\frac{4}{3}$

(أ) $\frac{4}{3}$



أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

(٢) ح أ = θ = ح أ

(١) ح أ = θ = ح أ

١٣ أوجد قيم θ في كل من الحالات الآتية حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

(١) $\sin \theta = \sin(30^\circ + \theta)$	(٢) $\sin \theta = \sin(30^\circ + \theta)$
(٣) $\cos \theta = \cos(30^\circ + \theta)$	(٤) $\cos \theta = \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$
(٥) $\tan \theta = \tan(27^\circ + \theta)$	(٦) $\tan \theta = \tan(10^\circ + \theta)$
(٧) $\cot \theta = \cot(25^\circ + \theta)$	(٨) $\cot \theta = \cot(9^\circ + \theta)$
(٩) $\sec \theta = \sec(48^\circ + \theta)$	(١٠) $\sec \theta = \sec(2^\circ + \theta)$

١٤ أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ التي تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $\sin \theta = 1$	(٢) $\sin 2\theta = 1 - \theta$
(٣) $\cos 2\theta = (\theta - \frac{\pi}{4})$	(٤) $\tan 2\theta = (\theta - \frac{\pi}{4})$

١٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية علماً بأن $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

(١) $\sin 2\theta = 1 + \theta$	(٢) $\sin \theta = \sqrt{2} - \theta$
(٣) $\sin 2\theta = \sqrt{2} - \theta$	(٤) $\sin \theta = 1 + \theta$
(٥) $\sin 2\theta = \sqrt{2} + \theta$	(٦) $\sin \theta = 1 + \theta$
(٧) $\tan 2\theta = \theta$	(٨) $\frac{1}{\sin \theta} = \theta$

١٦ إذا كان : $\sin \theta = (\theta - \frac{\pi}{4})$ ، $\frac{1}{\sin \theta} = (\theta + \frac{\pi}{4})$ ،

فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ «...»

١٧ إذا كان : $\sin \theta = \sin(30^\circ + \theta)$ حيث $90^\circ > \theta > 0^\circ$

أوجد قيمة : $\sin 2\theta + \tan 2\theta + \cot 2\theta$ «...»

١٨ إذا كان : $1 = \frac{\sin(25^\circ - \theta)}{\sin(35^\circ - \theta)}$ فأوجد قيمة : θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

ثم أوجد قيمة : $\frac{\sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} + \sin(\theta - 180^\circ)$ «...»

١٩ إذا كان : $1 = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta}$ حيث $90^\circ > \theta > 0^\circ$ فأوجد قيمة : θ

ثم أوجد قيمة : $\sin(\theta - 180^\circ) + \sin(2\theta - 360^\circ) + \sin(\theta - 180^\circ)$ «...»

٢٠ إذا كان : $\theta = (15 - \theta)^\circ$ $\theta = (2 + \theta)^\circ$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ،

٢٠٠

فأوجد قيمة θ ثم أثبت أن : $\frac{1}{2} = \frac{(\theta + 270^\circ) \cos \theta + 1}{(\theta + 90^\circ) \cos \theta + 1}$

٢١ إذا كان : $\theta = \frac{2}{5}$ حيث $270^\circ > \theta > 90^\circ$

٢١٠

فأوجد قيمة المقدار : $\cos(\theta - 180^\circ) + \cos(\theta - 90^\circ) - \cos(\theta - 270^\circ)$

٢٢ إذا كان : $12 = \theta$ حيث $90^\circ > \theta > 270^\circ$

٢٢٠

أوجد قيمة : $13 \cos(\theta - 180^\circ) - 10 \cos \theta + 6 \cos 50^\circ + 50 \cos 150^\circ$

٢٣ إذا كان : $15 = \theta + 8$ ، $90^\circ > \theta > 180^\circ$ أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ

٢٣٠

ثم أوجد قيمة كل من : $2 \cos \theta$ ، $\cos(\theta + 1080^\circ)$

٢٤ إذا كان : $\theta = \frac{2}{2} = \frac{\pi}{2}$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، فأوجد قيمة θ ثم :

(١) أوجد قيمة : $\frac{(\theta - 270^\circ) \cos \theta - 1}{(\theta + 270^\circ) \cos \theta + 1}$

(٢) أثبت أن : $\frac{(\theta - 270^\circ) \cos \theta - 1}{(\theta + 90^\circ) \cos \theta} = \theta$

٢٤٠

٢٥ إذا كانت θ (-٥ لـ ، -١٢ لـ) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها

القياسي مع دائرة الوحدة ، $270^\circ > \theta > 180^\circ$

٢٥٠

أوجد قيمة : $\cos(\theta - 90^\circ) \cos(\theta + 90^\circ) + 12 \cos(\theta + 270^\circ)$

٢٦ إذا كان : $12 = \theta - 5 = 0$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $\frac{\pi}{2}$

أوجد قيمة كل من : $\cos(\theta + 270^\circ)$ ، $\cos(270^\circ - \theta)$ ، $\cos(\theta + 270^\circ)$

ثم أثبت أن : $\cos(\theta - 270^\circ) \cos(\theta + 270^\circ) \times \cos(\theta + 270^\circ) \times \cos(\theta + 270^\circ) = \cos 90^\circ$

٢٧٠

٢٧ إذا كانت : $\alpha = \frac{9}{20}$ حيث $90^\circ > \alpha > 180^\circ$ أوجد قيمة : $20 \cos \alpha - 4 \cos \alpha$

٢٨ إذا كان : $\alpha = \frac{2}{4}$ حيث α أصغر زاوية موجبة ، $\frac{0}{12} = \beta$ حيث $270^\circ > \beta > 180^\circ$

٢٨٠

أوجد الدوال المثلثية لكل من الزاويتين α ، β ثم أوجد قيمة : $\alpha \cos \beta - \beta \cos \alpha$

٢٩ إذا كان : $\alpha = \frac{2}{5}$ حيث $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $12 = \beta - 5 = 0$ حيث $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $\frac{\pi}{2}$

٢٩٠

أوجد قيمة : $\alpha \cos \beta + \beta \cos \alpha$

٣٠ إذا كان : $25^\circ \leq \alpha \leq 24^\circ$ ، حيث $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، $\beta = 12^\circ + \alpha$ ،

حيث β أكبر زاوية موجبة ، $[\exists \beta , 0^\circ , 26^\circ]$ أوجد قيمة :

(١) $\sin(\alpha + 18^\circ) + \sin(\beta - 18^\circ)$

(٢) $\cos(\alpha + 18^\circ) \sin(\beta - 9^\circ) - \cos(\alpha + 26^\circ) \sin(\beta - 26^\circ)$

(٣) $\cos(\alpha + 9^\circ) \sin(\beta + 27^\circ) \sin(\alpha - 27^\circ) \cos(\beta + 27^\circ)$

$\frac{1}{6}, \frac{8}{12}, \frac{18}{30}$

٣١ إذا كان الضلع النهائي للزاوية التي قياسها $(\theta - 9^\circ)$ يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ ،

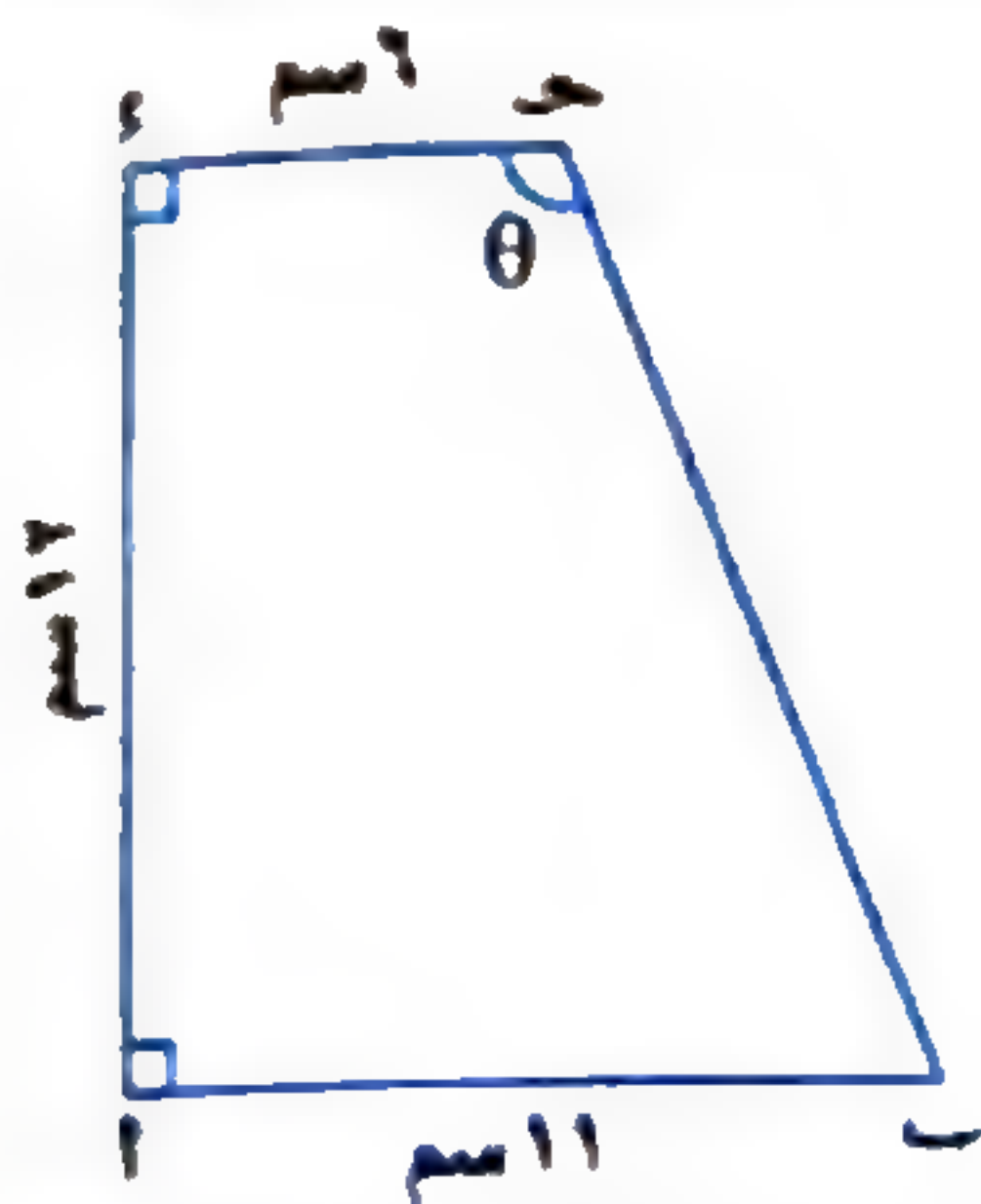
فأوجد الدوال المثلثية للزاوية θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ،

٣٢ في الشكل المقابل :

أ ب ح د شبه منحرف فيه : $\angle D = \angle C = 90^\circ$

، $AD = 6$ سم ، $BC = 12$ سم ، $AB = 11$ سم

أوجد : θ

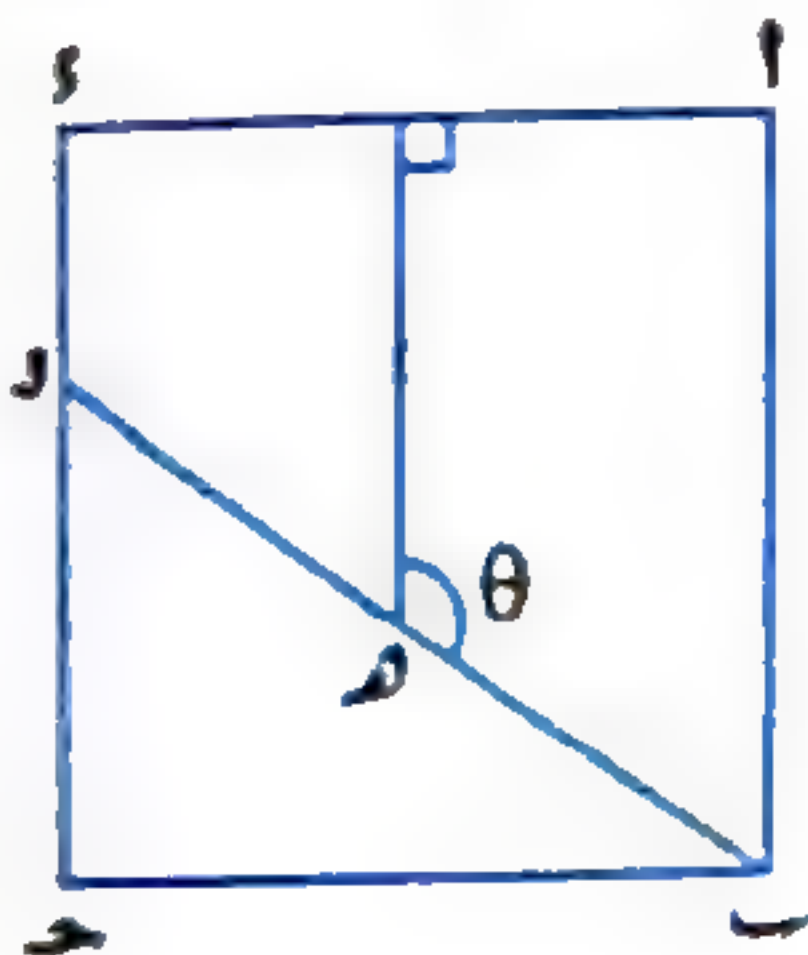


$\frac{12}{13}$

٣٣ في الشكل المقابل :

أ ب ح د مربع فيه : $\angle D = \angle C = 90^\circ$

أوجد : θ



$\frac{\sqrt{13}}{2}$

اكتشف الخطأ

٣٤ في إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزيد إيجاد قيمة : $(\frac{\pi}{2} - \theta)$

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

إجابة كريم

$(\frac{\pi}{2} - \theta + \pi) = (\frac{\pi}{2} - \theta)$

$(\theta + \frac{\pi}{2}) =$

$\theta =$

إجابة زياد

$[(\theta - \frac{\pi}{2}) -] = (\frac{\pi}{2} - \theta)$

$(\theta - \frac{\pi}{2}) =$

$\theta = (\theta -) =$

تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل

٣٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $45^\circ \times 46^\circ \times 47^\circ \times \dots \times 135^\circ =$

(أ) صفر

(ب) ١ -

(ج) ١

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د)

$$(٢) \text{ ما } ٧٥^\circ \times \text{منا } ١٢^\circ \times \text{قا } ١٥^\circ \times \text{قا } ٧٨^\circ = \dots\dots\dots$$

- (١) $\sqrt[3]{2} + 1$ (ب) $1 - \sqrt[3]{2}$ (ج) ٢ (د) ١

(٣) إذا كانت النقاط ٢، ب، ح على شبكة تربيعية حيث أ (٠، ٠)، ب (٤، ١)، ح (٠، ٢) -

فإن : ما (د ب أ ح) =

- (١) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{2}{4}$ (ج) $\frac{4}{17\sqrt{2}}$ (د) $\frac{4-}{17\sqrt{2}}$

$$(٤) \dots\dots\dots = \frac{١^\circ \text{ قا} \times ٢^\circ \text{ قا} \times \dots \times ٨٨^\circ \text{ قا} \times ٨٩^\circ \text{ قا}}{١^\circ \text{ قا} \times ٢^\circ \text{ قا} \times \dots \times ٨٨^\circ \text{ قا} \times ٨٩^\circ \text{ قا}}$$

- (١) صفر (ب) ١- (ج) ١ (د) ٩٠

$$(٥) \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } (\theta + \pi ٦٠) + \text{منا } (\theta + \pi ٩٠)}{\text{منا } (\theta + \frac{\pi ٩}{٢}) - \text{ما } (\theta + \frac{\pi ٥}{٢})}$$

- (١) ٢ (ب) ١ (ج) صفر (د) ١-

$$(٦) \text{ إذا كان : } \frac{\pi}{٢} = \text{س} ٧ \text{ فإن : } \frac{\text{ما } ٢ \text{ س}}{\text{منا } ٤ \text{ س}} + \frac{\text{طا } ٢ \text{ س}}{\text{منا } ٥ \text{ س}} = \dots\dots\dots$$

- (١) ٢- (ب) ١- (ج) ١ (د) ٢

(٧) إذا كان : س + ص = ٣٠ فإن :

$$\text{أولاً : طا (س + ٢ ص) طا (٢ س + ص) = \dots\dots\dots}$$

- (١) ١- (ب) ١ (ج) ما (س - ص) (د) منا (س - ص)

$$\text{ثانياً : ما (٣ س + ٢ ص) + ما (٩ س + ٨ ص) = \dots\dots\dots}$$

- (١) صفر (ب) ١ (ج) منا س (د) منا ص

(٨) إذا كان : د (س) = ما ٢ س

$$\text{فإن : د (هـ) + د (} \frac{\pi}{٢} \text{ + هـ) + د (} \pi \text{ + هـ) + د (} \frac{\pi ٣}{٢} \text{ + هـ) + \dots}$$

$$+ \text{د (} \pi ٩٩ \text{ + هـ) + د (} \pi \frac{١٩٩}{٢} \text{ + هـ) = \dots\dots\dots}$$

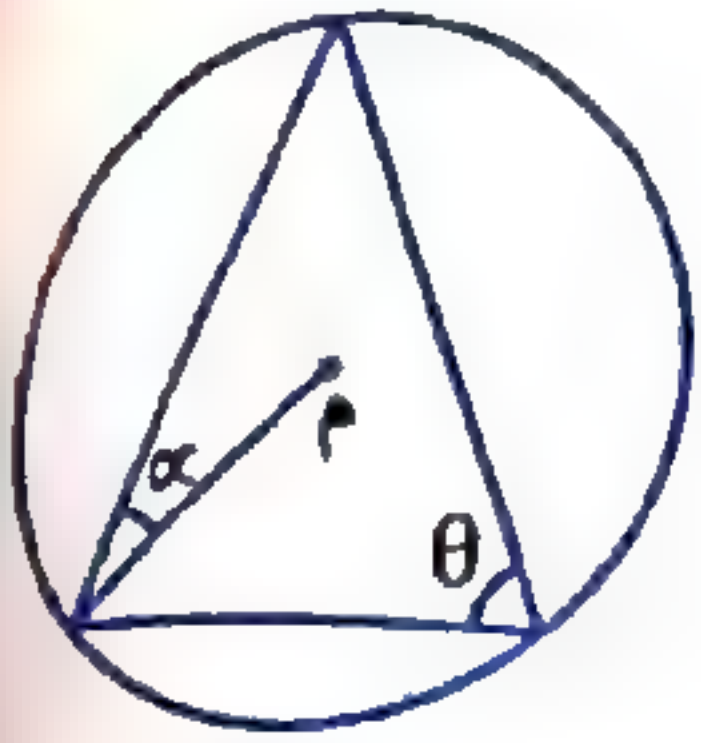
- (١) ١ (ب) صفر (ج) ٩٩ (د) ١٠٠

(٩) إذا كانت : منا ٢ = θ فإن : $\theta = \dots\dots\dots$ حيث $\exists \text{ ص}$

- (١) $\pi \sqrt{2}$ (ب) $\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) $\pi \sqrt{2}$ (د) $\pi (1 + \sqrt{2})$

$$(١٠) \text{ عدد حلول المعادلة : طا س = } \sqrt[3]{2} - \text{ حيث } ٠ \leq \text{س} \leq \pi ١٥ \text{ هو } \dots\dots\dots$$

- (١) ٢ (ب) ٤ (ج) ١٥ (د) ٣٠



(١١) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م

فإن : $\theta = \dots$

(د) α ما

(ج) α ما

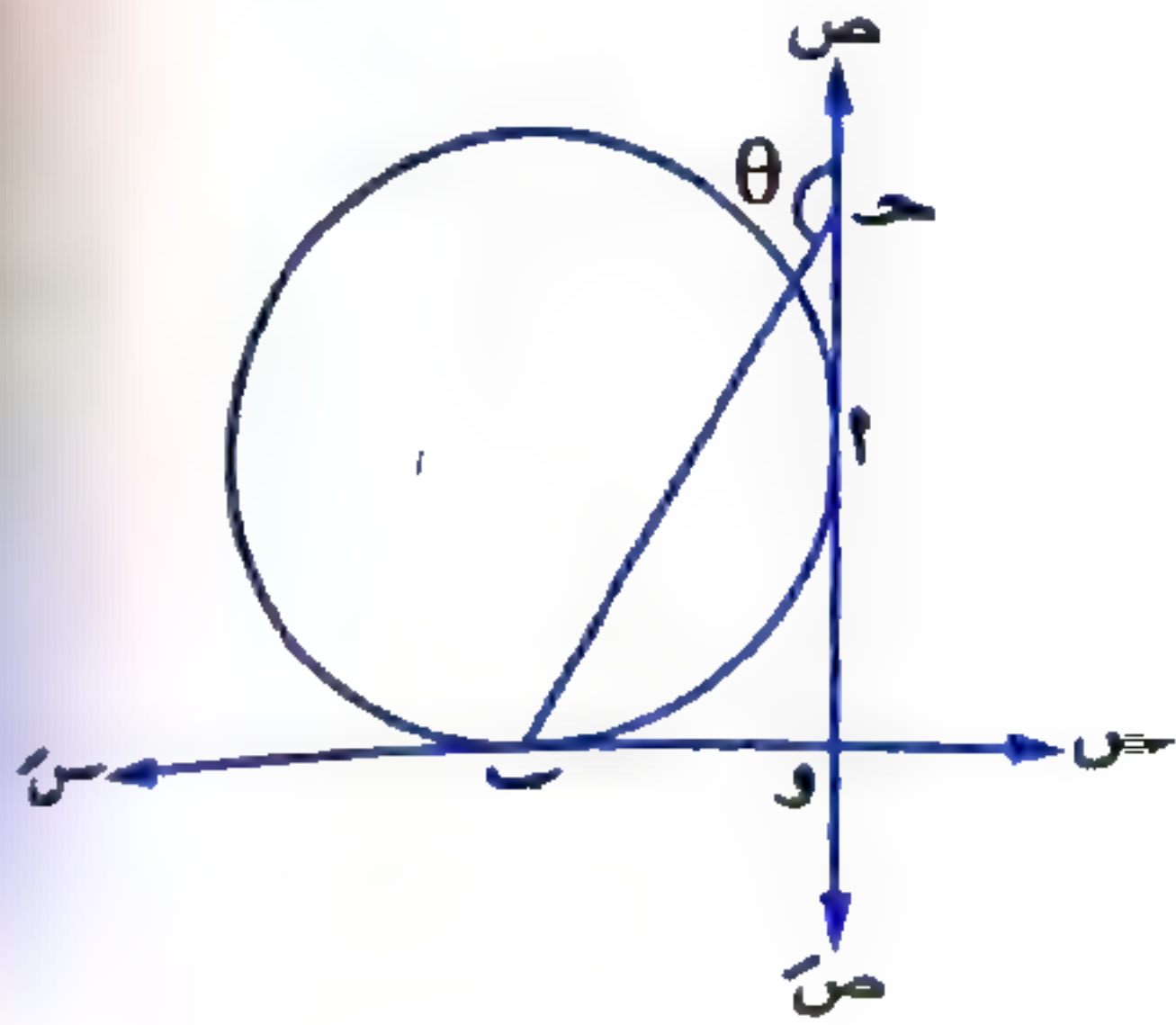
(ب) α ما

(أ) α ما

(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : $(3, 0)$ ، $(4, 0)$ حـ

فإن : $\theta = \dots$



(ب) $\frac{2}{4}$

(أ) $\frac{4}{0}$

(د) $\frac{2}{4}$

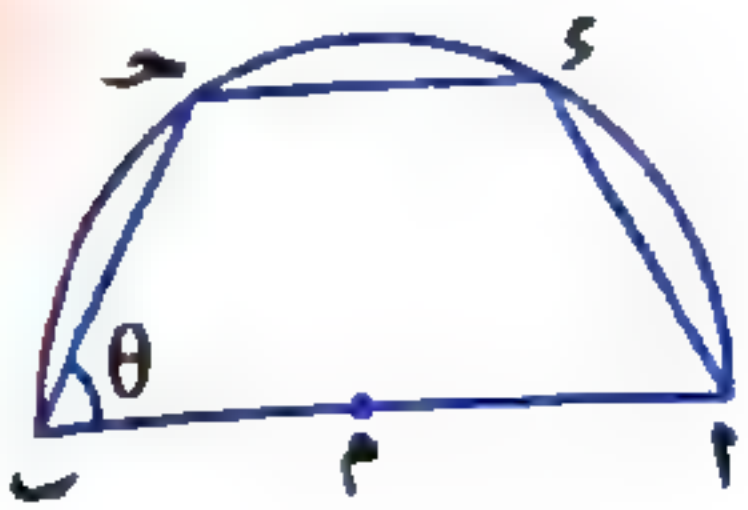
(ج) $\frac{2}{0}$

(١٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : \overline{AB} قطرًا في نصف دائرة م

$12 = \theta$ ،

فإن : $\dots = (د \text{ و } ح)$



(د) $\frac{12}{13}$

(ج) $\frac{0}{13}$

(ب) $\frac{0}{13}$

(أ) $\frac{12}{13}$

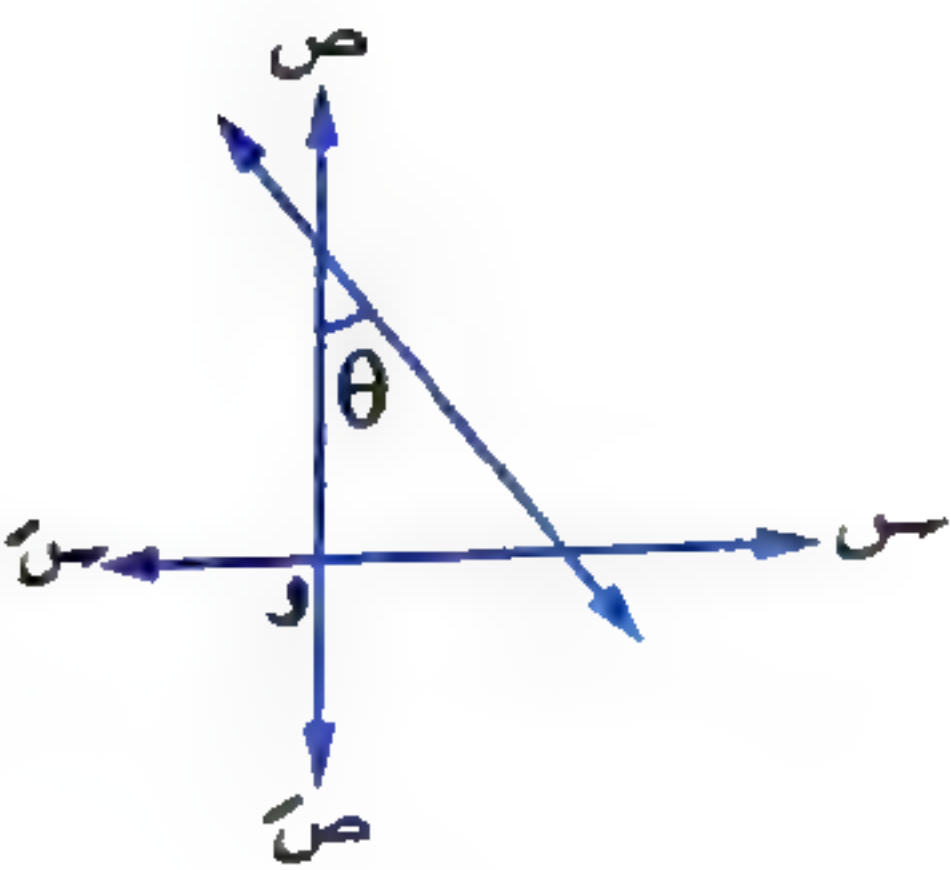
(١٤) في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي

$\text{ص} = \frac{2}{4}\text{ح} + 5$ ، θ زاوية حادة تتكون

من تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات

فإن : \dots

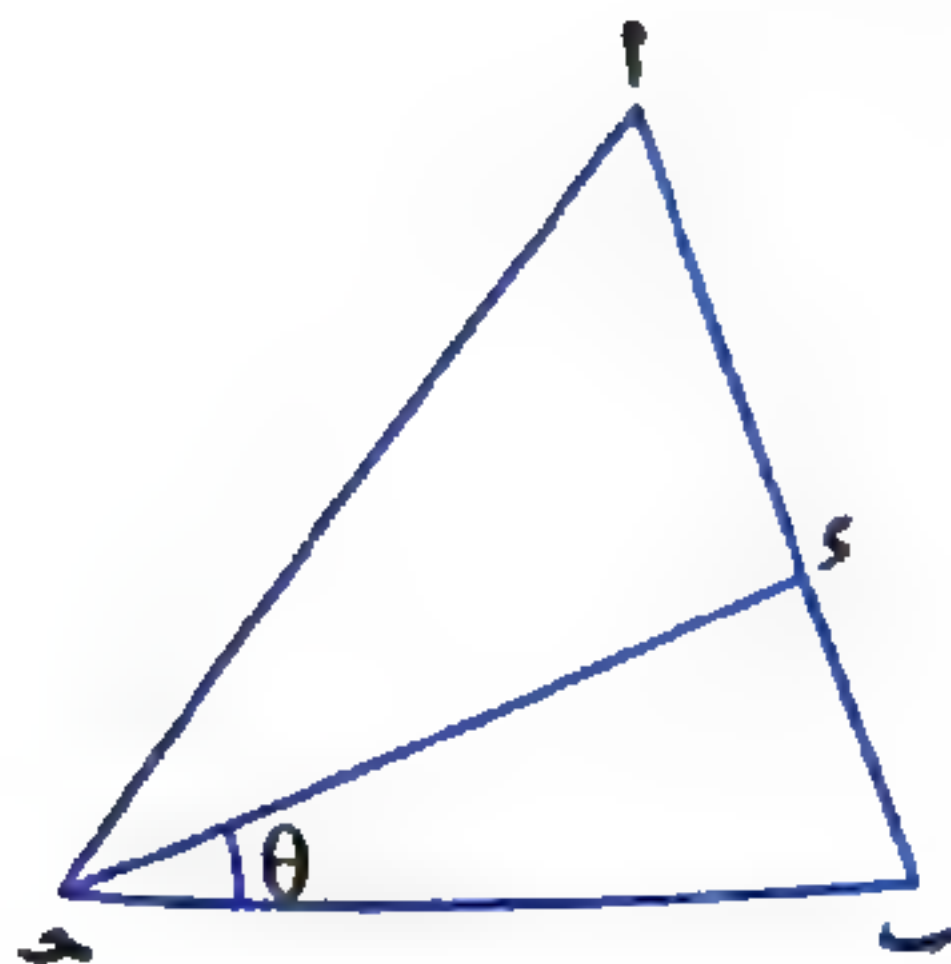


(أ) $\theta = \frac{2}{4}$ (ب) $\theta = \frac{4}{3}$ (ج) $\theta = \frac{4}{3}$ (د) $\theta = \frac{2}{0}$

(١٥) في الشكل المقابل :

\overline{AB} حـ مثلث متساوي الأضلاع ، $\overline{AB} \cap \overline{AC} = \overline{P}$ بحيث $\angle 2 = \angle 3$

فإن : $\theta = \dots$



(د) $\frac{2}{0}$

(ج) $\frac{3}{0}$

(ب) $\frac{3}{4}$

(أ) $\frac{2}{3}$

٣٦ \overline{AB} حـ مثلث منفرج الزاوية في حـ ، ما $\frac{2}{0} = \dots$ فأوجد : ما $(1 + 2 + 3)$ حـ

$\frac{2}{0}$

٣٧ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $20^\circ + 40^\circ + 60^\circ + \dots + 160^\circ + 180^\circ$

(٢) $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 358^\circ + 359^\circ$

«١-»

«صفر»



5

التمثيل البياني للدوال المثلثية

أولاً دالة الجيب د : د (θ) = ما

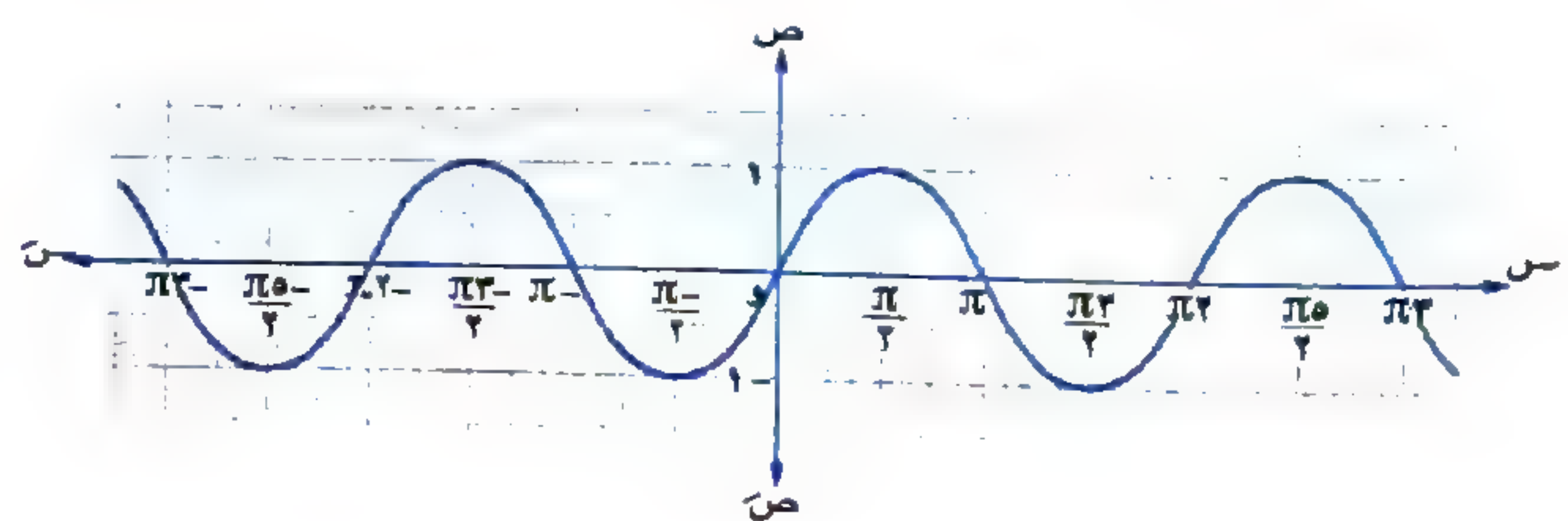
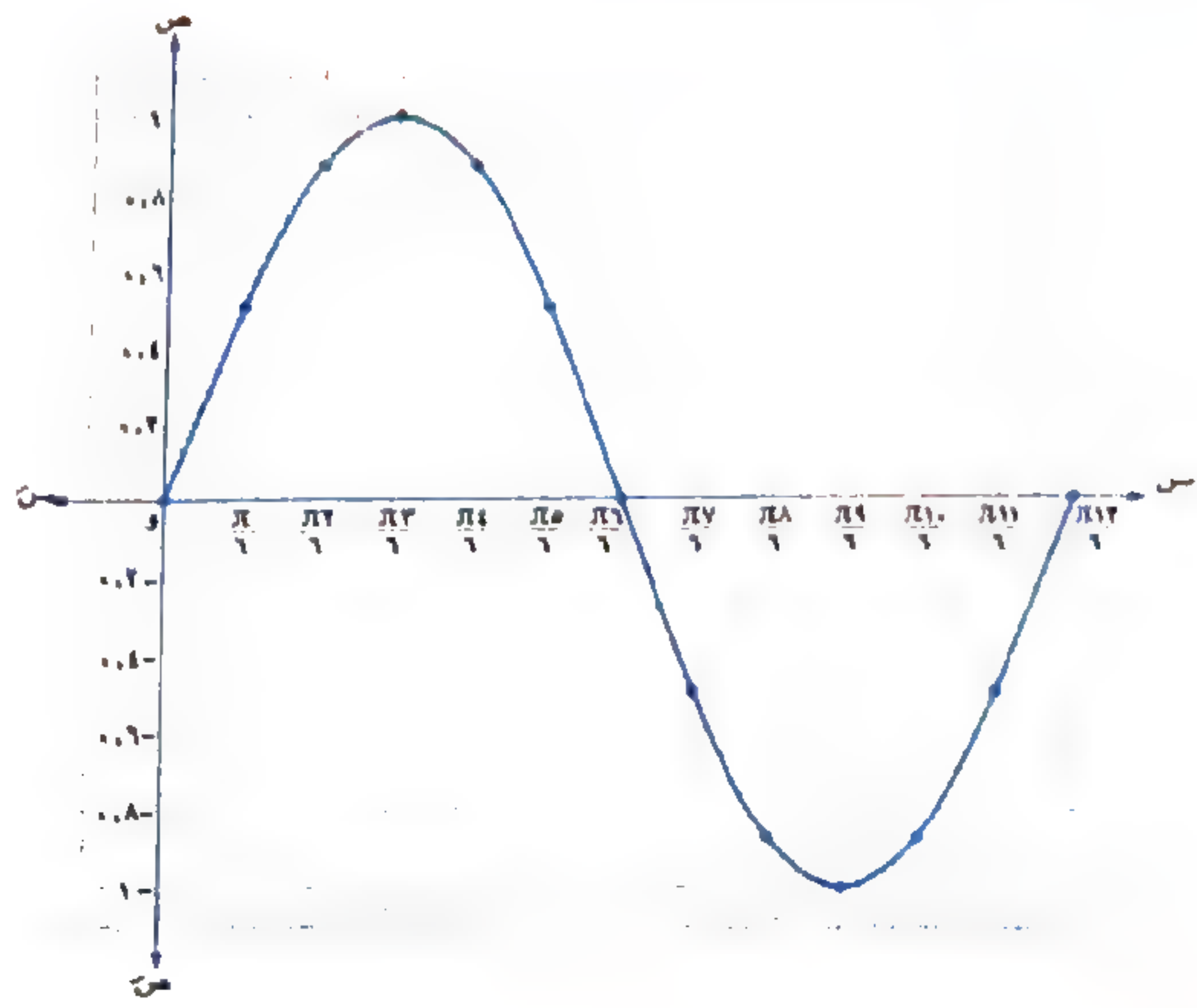
لتمثيل الدالة د : د (θ) = ما بيانياً نكوّن جدولاً من بعض قيم θ الخاصة حيث $θ ∈ [0, 2π]$ وقيم ما المناظرة لها.

θ	0	$\frac{π}{6}$	$\frac{π}{3}$	$\frac{π}{2}$	$\frac{2π}{3}$	$\frac{5π}{6}$	π	$\frac{7π}{6}$	$\frac{4π}{3}$	$\frac{3π}{2}$	$\frac{5π}{3}$	$\frac{11π}{6}$	$2π$
ما	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0

نعين جميع النقاط التي حصلنا عليها في الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د في الفترة $[0, 2π]$

ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها $2π$ (أي 360°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر في الفترات $[0, 2π]$ ، $[2π, 4π]$ ، $[4π, 6π]$ ، ... وكذلك في الفترات $[2π, 0]$ ، $[4π, 2π]$ ، $[6π, 4π]$ ، ... ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلي :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة الجيب د : د (θ) = ما θ

١ مجال دالة الجيب هو $[-\infty, \infty]$

٢ القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وتحدث عندما $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وتحدث عندما $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

٣ مدى الدالة $[-1, 1]$

٤ الدالة دورية ودورتها 2π (أي ٣٦٠°)

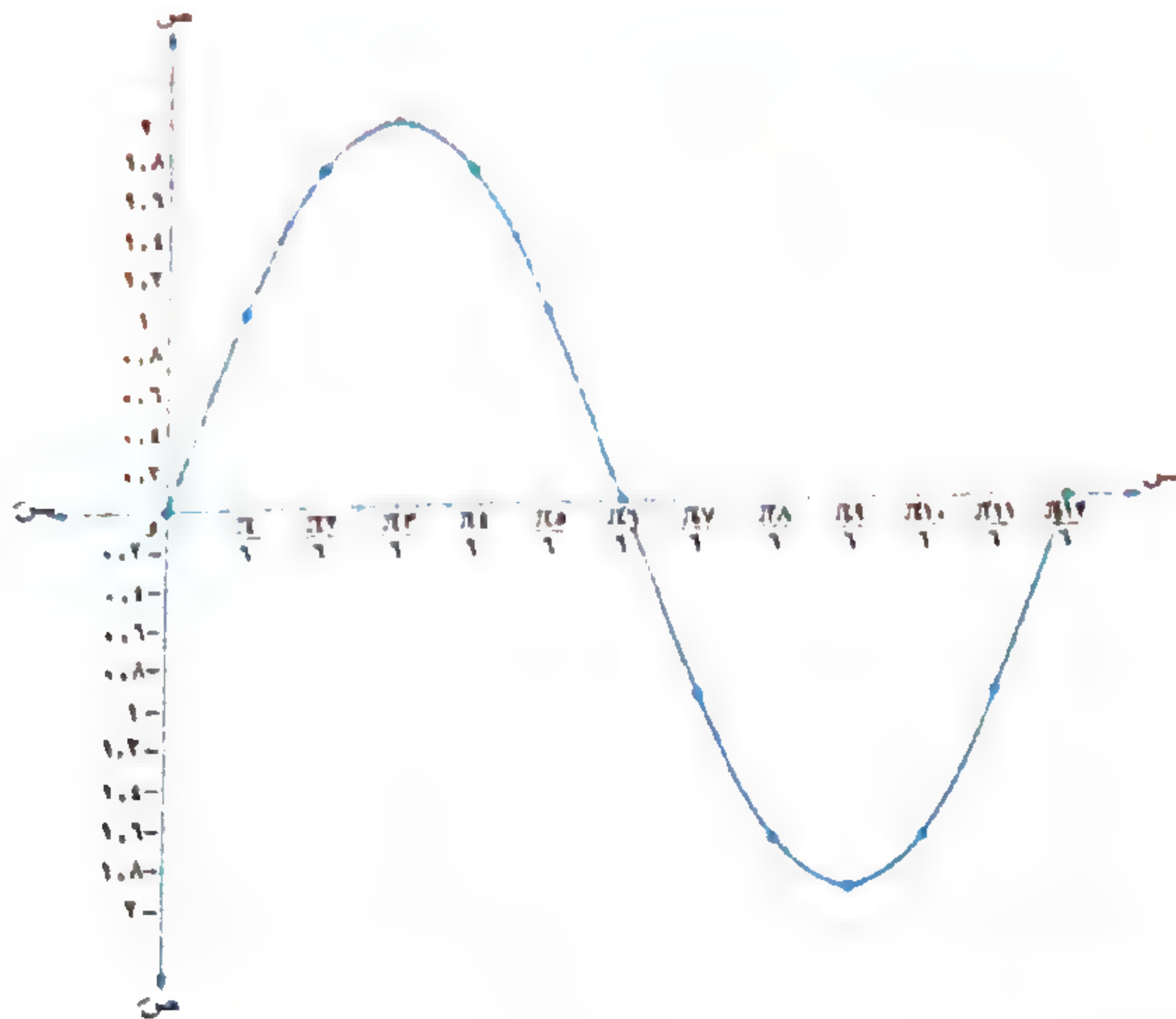
مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : $y = \sin \theta$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومداها واذكر دورتها.

الحل

θ	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ص	٠	١	١,٧	٢	١,٧	١	٠	-١	-١,٧	-٢	-١,٧	-١	٠



القيمة العظمى للدالة = ٢ ، القيمة الصغرى للدالة = -٢

مدى الدالة $[-2, 2]$

دورة الدالة 2π (أي ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : $y = \cos \theta$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$ ومن الرسم أوجد :

١ القيم العظمى والصغرى للدالة.

٢ مدى الدالة.

٣ دورة الدالة.

ثانياً دالة جيب التمام د : د (θ) = مَآ θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = مَآ θ بيانياً نكوّن جدولاً من بعض قيم θ الخاصة حيث $θ \in [0, \pi/2]$ وقيم مَآ θ المناظرة لها

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
مَآ θ	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1

نعيّن جميع النقط التي حصلنا عليها في الجدول

على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل

على منحنى الدالة د في الفترة $[0, \pi/2]$

ونلاحظ أن

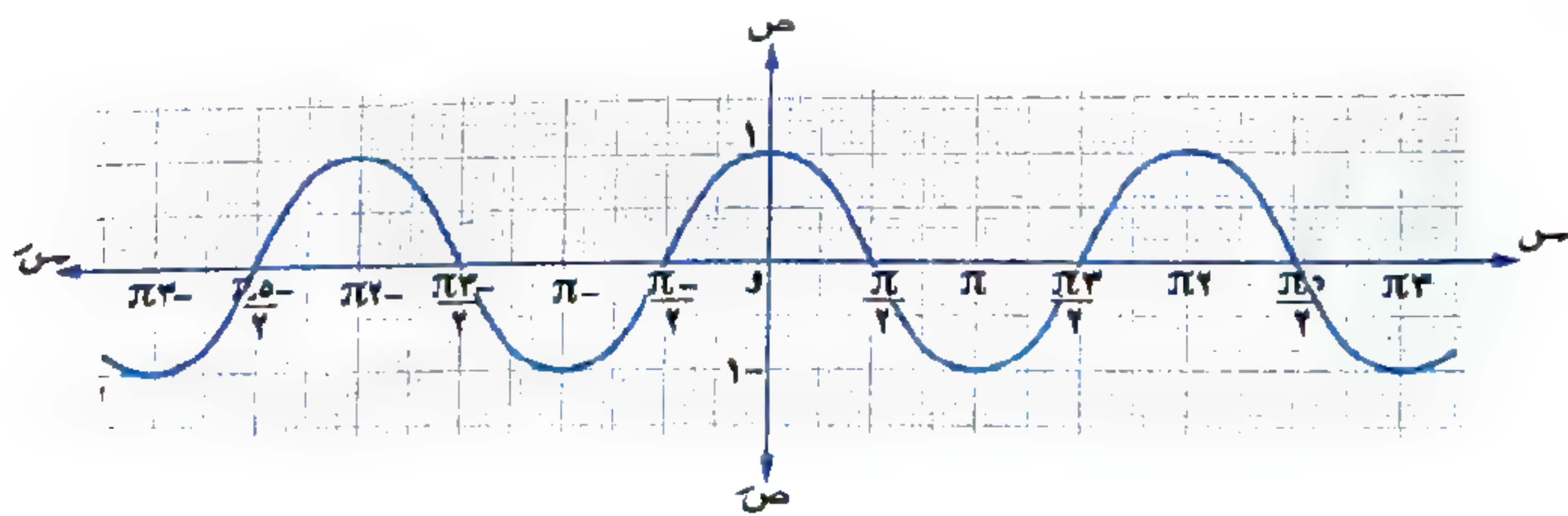
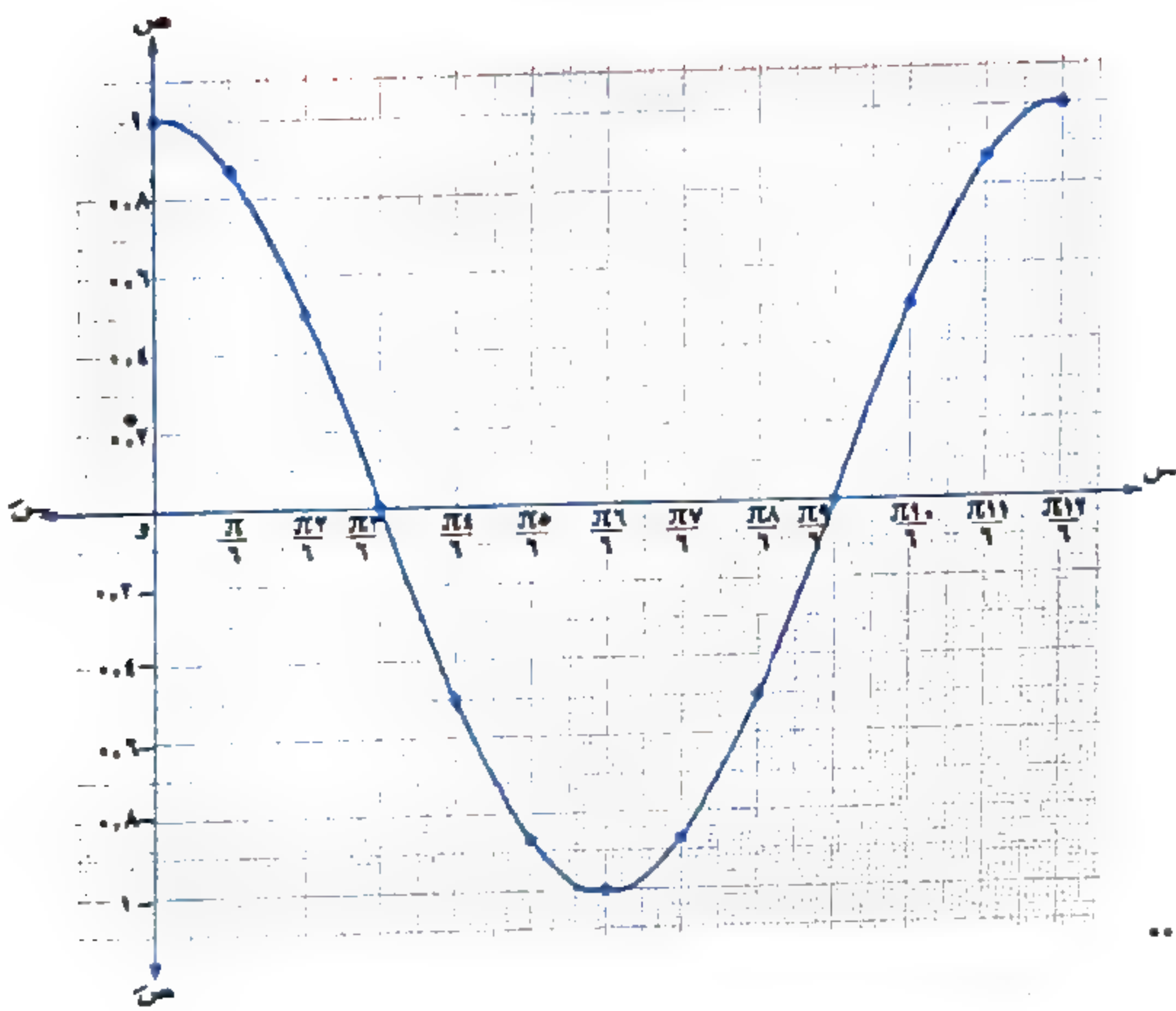
الدالة دورية ودورتها 2π (أي 360°) حيث إن

منحنى هذه الدالة يتكرر في الفترات

$[0, \pi/2]$ ، $[\pi/2, \pi]$ ، $[\pi, 3\pi/2]$ ، ...

وكذلك في الفترات $[\pi/2, \pi]$ ، $[0, \pi/2]$ ، $[\pi, 3\pi/2]$ ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلي :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة جيب التمام د : د (θ) = مَآ θ

١ مجال دالة جيب التمام هو $[-\infty, \infty]$

٢ القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وتحدث عندما $\theta = \pi/2$ حيث $\exists \pi/2 \in \mathbb{R}$

• القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وتحدث عندما $\theta = \pi/2 + \pi$ حيث $\exists \pi/2 \in \mathbb{R}$

٤ الدالة دورية ودورتها 2π (أي 360°)

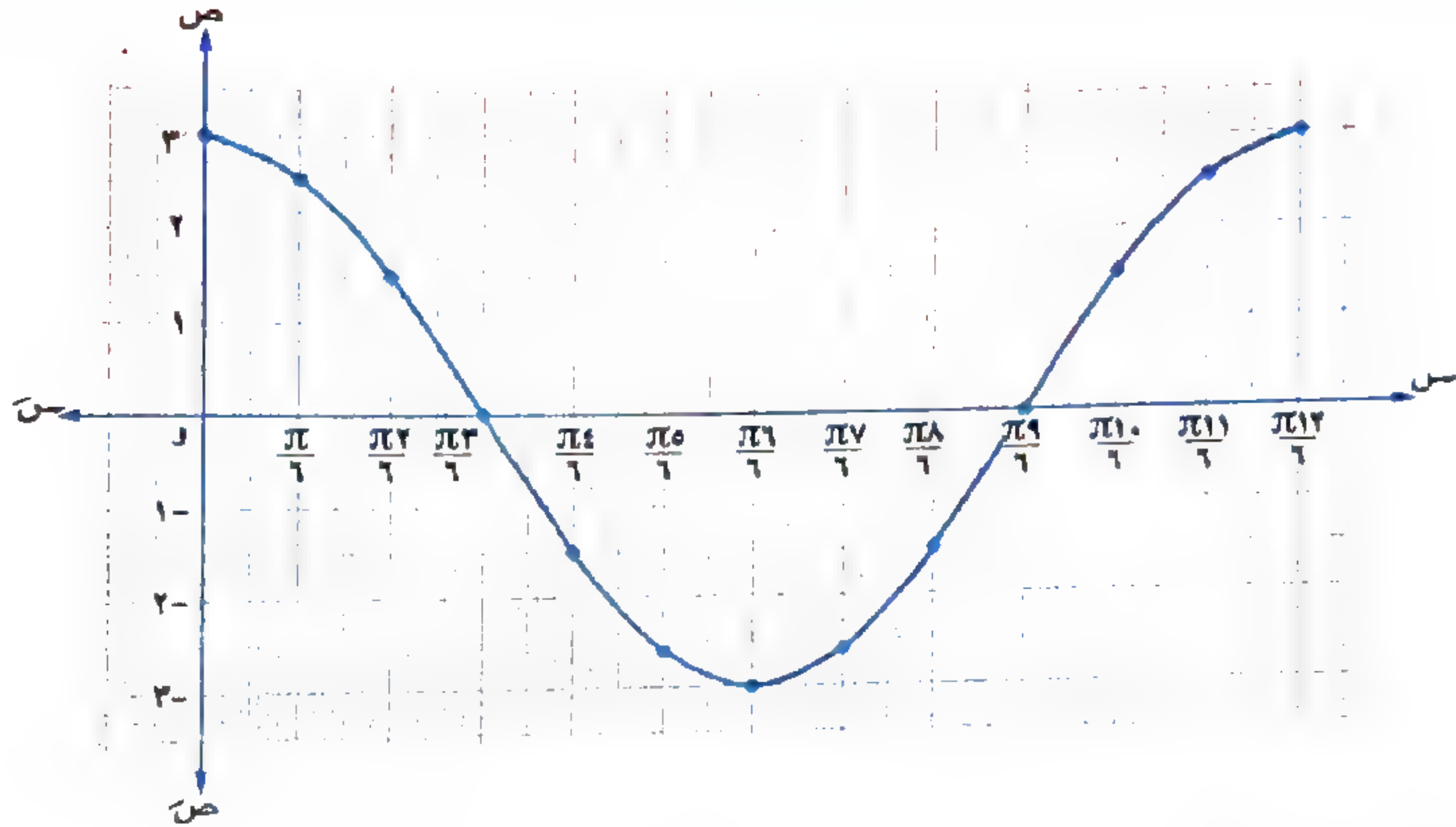
٣ مدى الدالة $[-1, 1]$

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة $y = \cos \theta$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$ ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها.

الحل

θ	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ص	٣	٢,٦	١,٥	٠	١,٥-	٢,٦-	٣-	٢,٦-	١,٥-	٠	١,٥	٢,٦	٣



- القيمة العظمى للدالة = ٣ ، القيمة الصغرى للدالة = ٣-
- مدى الدالة = $[-3, 3]$
- دورة الدالة = 2π (أي ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة $y = \sin \theta$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$ ومن الرسم استنتج :

- القيم العظمى والصغرى للدالة.
- مدى الدالة.
- دورة الدالة.

ملاحظة

كل من الدالتين : $y = \sin \theta$ ، $y = \cos \theta$ دالة دورية دورتها $\frac{2\pi}{\omega}$ ومداهما $[-1, 1]$ حيث ω موجبة.
فمثلاً الدالة $y = \sin(2\theta)$ مداهما $[-1, 1]$ ودورتها $\frac{2\pi}{2} = \pi$

مثال ٣

استخدام التكنولوجيا

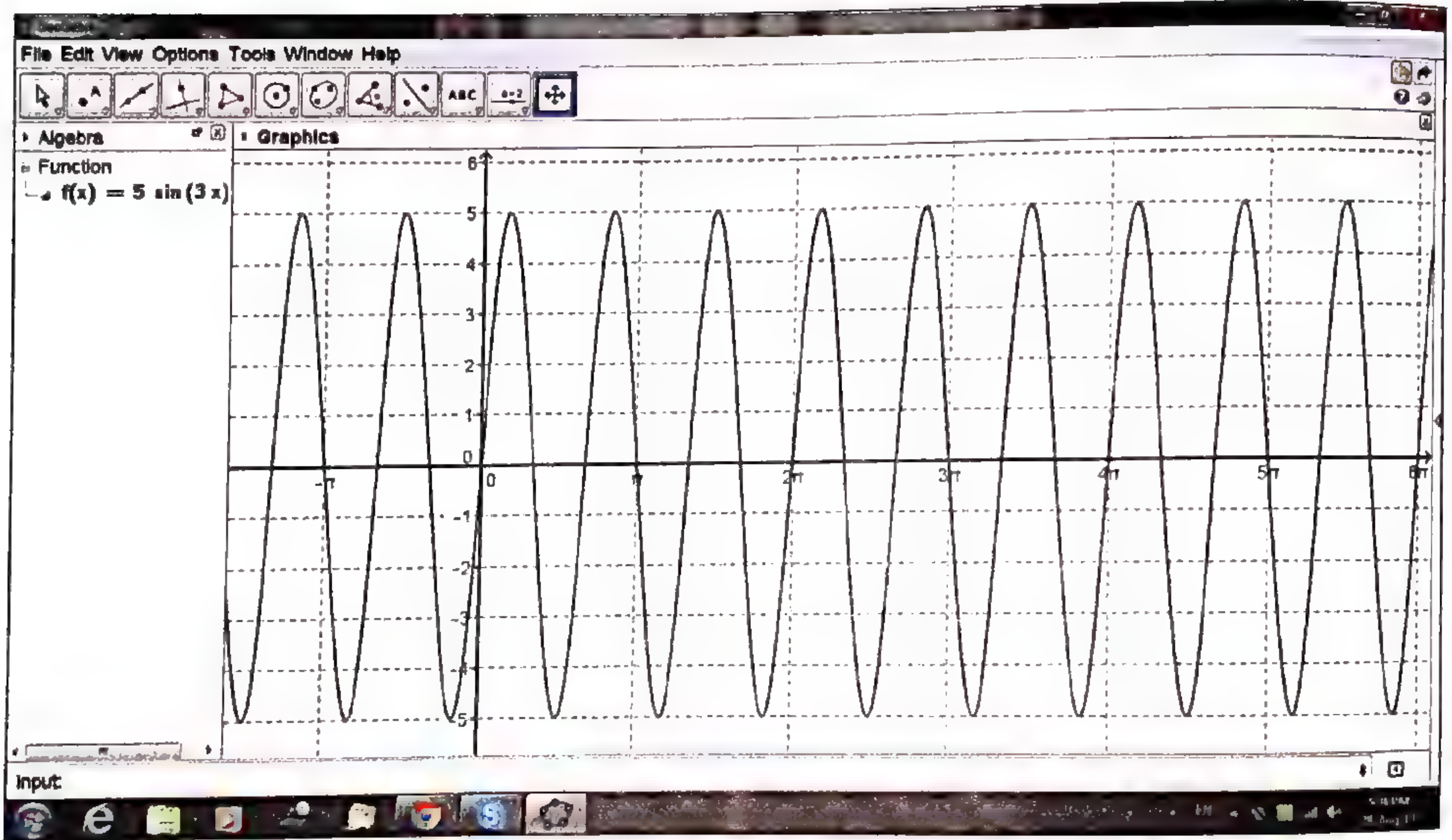
- باستخدام أحد برامج الكمبيوتر الرسومية مثل بيانياً الدالة $y = \sin 3\theta$ ومن الرسم أوجد :
- مدى الدالة.
 - القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.
 - دورة الدالة.

الحل

سوف نستخدم برنامج GeGebra الذي تستطيع تنزيله مجاناً من الموقع www.geogebra.org

١ اكتب في شريط الإدخال (input) صيغة الدالة كالآتي : $Y = 5 \sin(3x)$

٢ اضغط زر الإدخال (Enter) في جهازك وسوف يظهر لك الشكل البياني للدالة كما في الشكل التالي :



- القيمة العظمى $y = 5$ ، القيمة الصغرى $y = -5$

- مدى الدالة $[-5, 5]$

- دورة الدالة $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|}$ أي ١٢٠°

ملاحظة :

يمكن رسم الدالة $y = \sin 3\theta$ (بالمثال السابق) حيث : $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ بدون استخدام جهاز الكمبيوتر كما يلي :

$$\therefore 0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ \quad \therefore 0^\circ \leq 3\theta \leq 360^\circ$$

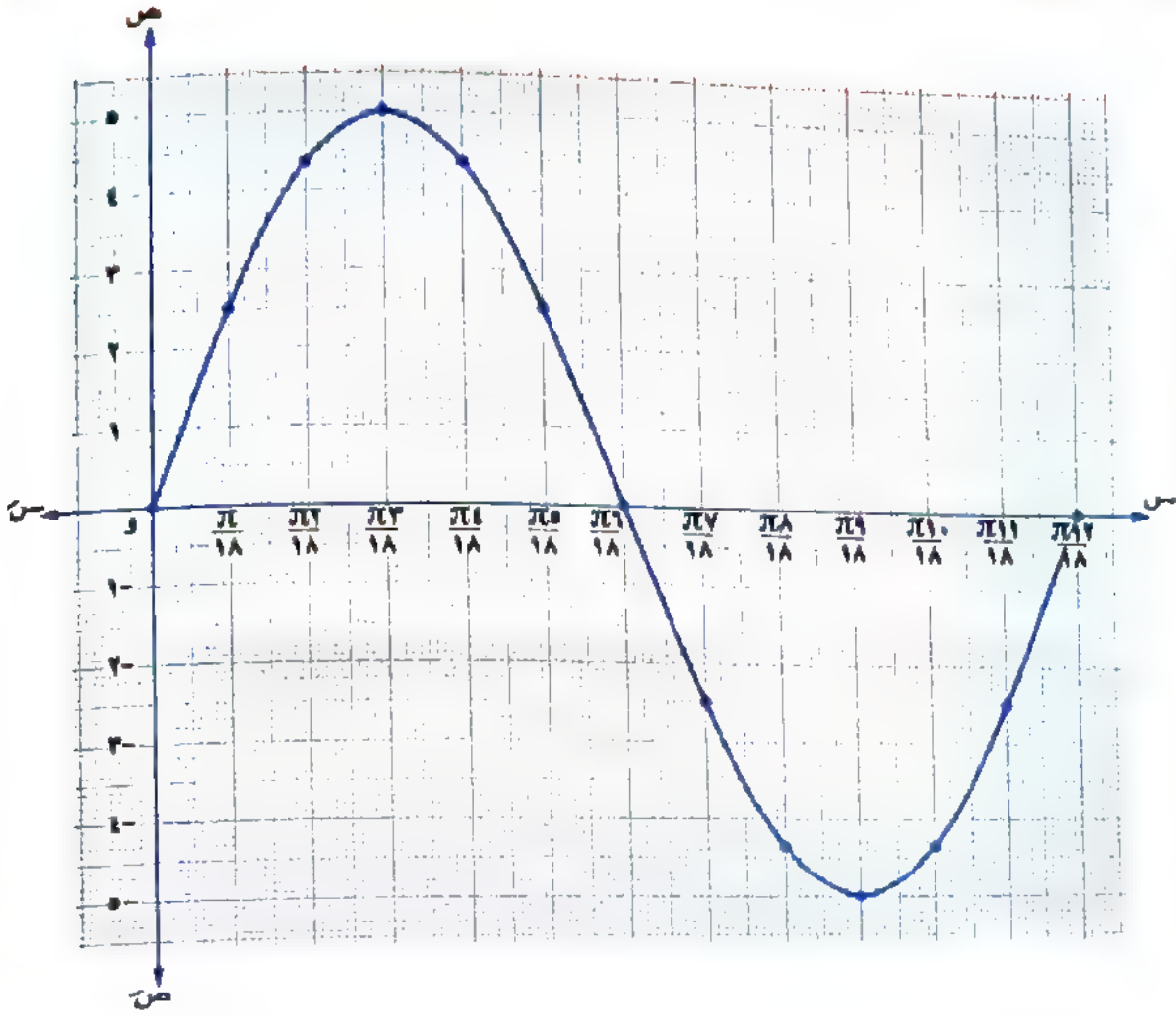
بإعطاء 3θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة : $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, \dots, 360^\circ$

نحصل على قيم θ بالقسمة على ٣ وهي : $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, \dots, 120^\circ$

وهي تكافئ : $0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \frac{3\pi}{18}, \frac{4\pi}{18}, \dots, \frac{12\pi}{18}$

ثم نكوّن الجدول الآتي :

$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$	θ
.	٢,٥-	٤,٢-	٥-	٤,٢-	٢,٥-	.	٢,٥	٤,٢	٥	٤,٢	٢,٥	.	ص = ٥ ما ٢ θ



وهذا الشكل يمثل دورة واحدة للدالة
ص = ٥ ما ٢ θ والتي يمكن تكرارها
للحصول على الشكل الذي ظهر لنا عند
تمثيلها باستخدام الكمبيوتر.



على التمثيل البياني للدوال المثلثية

11

من أسئلة الكتاب المدرس

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة $y = \sin(\theta)$ هو

- (أ) $\{ -1, 1 \}$ (ب) $[-1, 1]$ (ج) $[-1, 1)$ (د) $[-\infty, \infty]$

(٢) إذا كانت $y = \sin(\theta)$ فإن مدى الدالة هو

- (أ) $\{ 0, 1 \}$ (ب) $[-1, 1]$ (ج) $[-1, 0]$ (د) $[0, 1]$

(٣) القيمة العظمى للدالة $y = \sin(\theta)$ هي

- (أ) ٤ (ب) ١ (ج) صفر (د) ∞

(٤) القيمة الصغرى للدالة $y = \sin(\theta)$ هي

- (أ) ٥ (ب) صفر (ج) -5 (د) -7

(٥) الدالة $y = \sin(\theta)$ دالة دورية ودورتها تساوي

- (أ) 2π (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٦) الشكل المقابل يمثل دورة واحدة لمنحنى دالة مثلثية :

$y = \sin(\theta)$ فإن قاعدة الدالة هي

(أ) $y = \sin 2\theta$

(ب) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

(ج) $y = \sin 2\theta$

(د) $y = \sin \theta$

(٧) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة مثلثية :

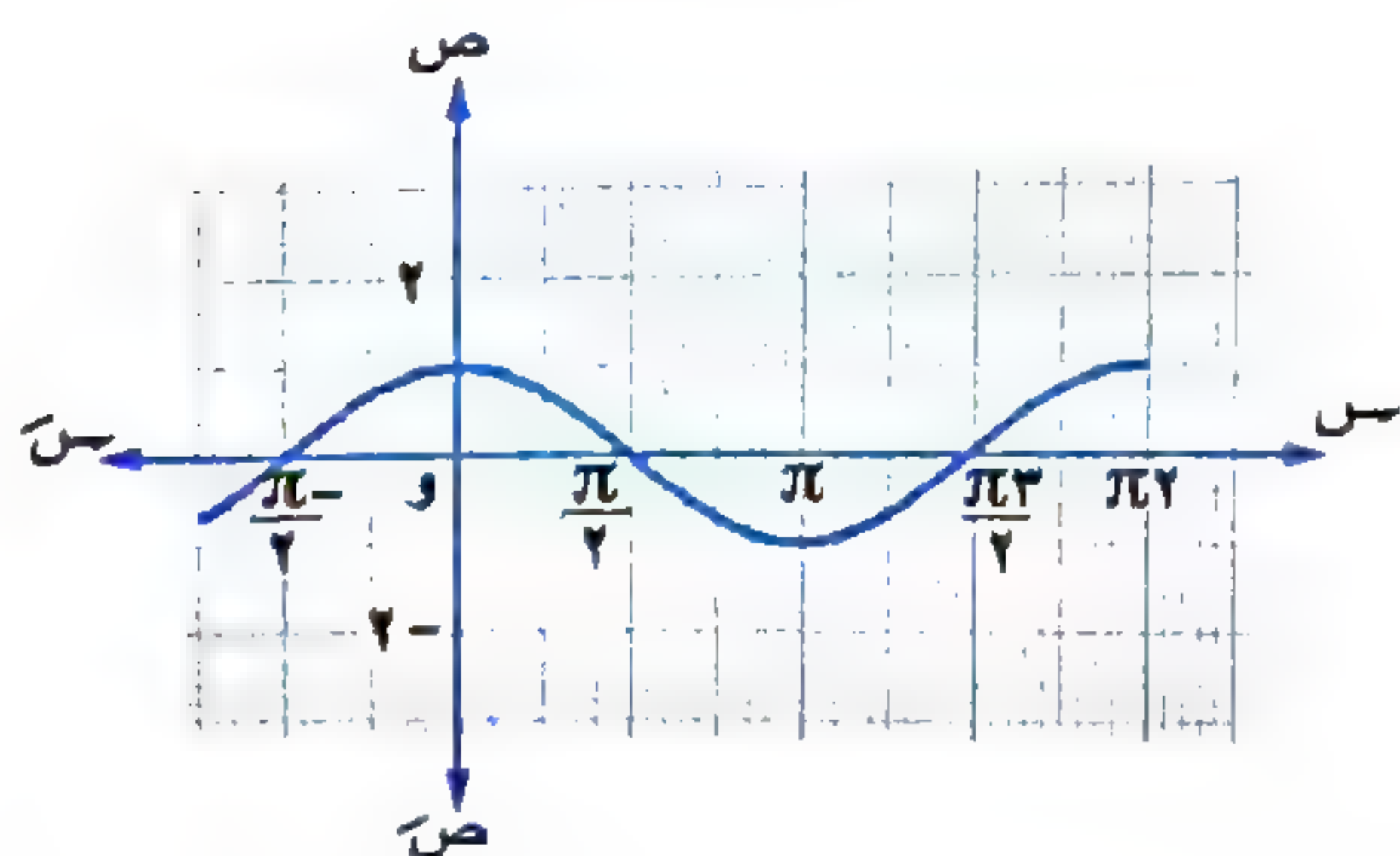
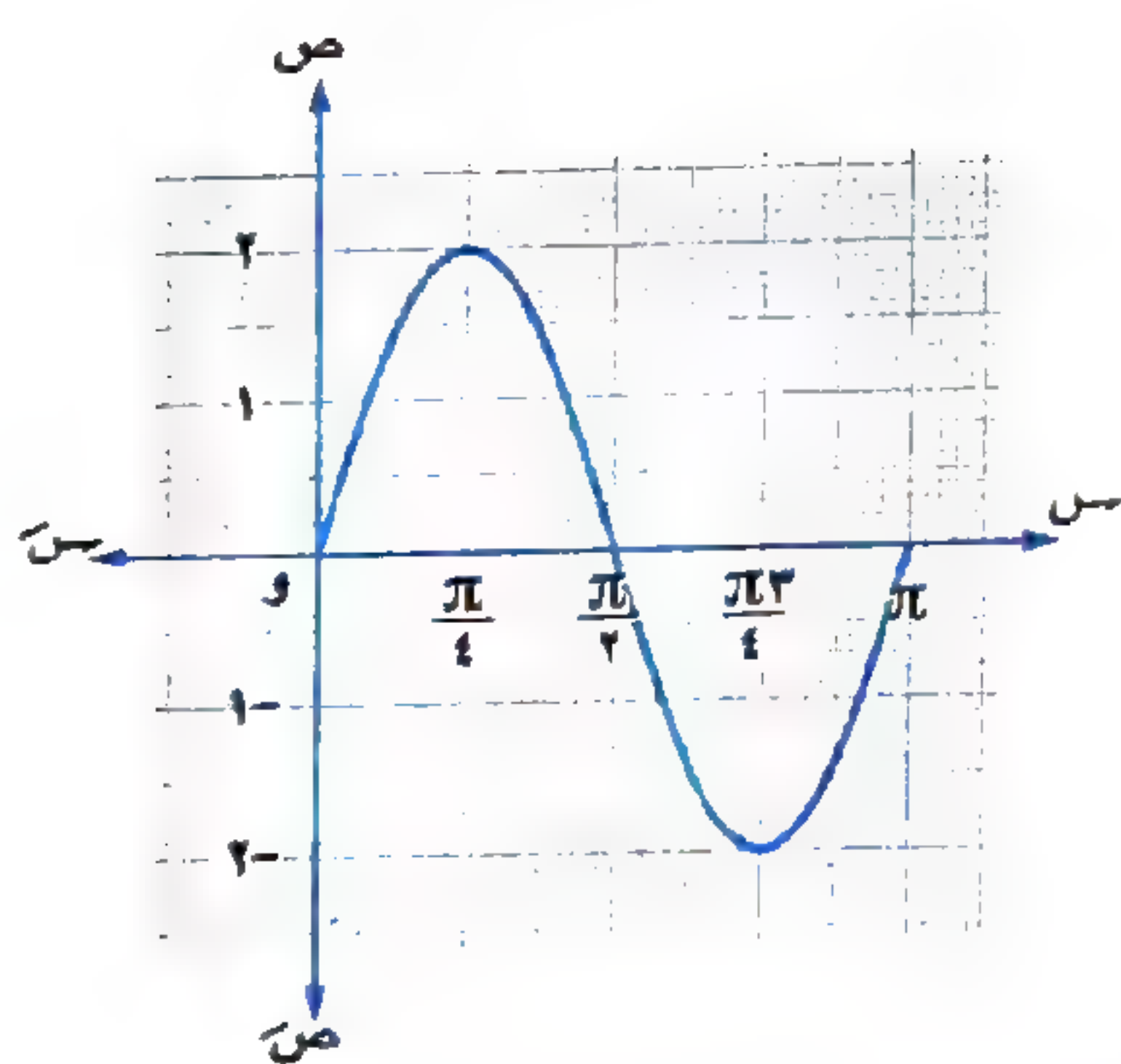
$y = \sin(\theta)$ فإن قاعدة الدالة هي

(أ) $y = \sin \theta$

(ب) $y = \sin 2\theta$

(ج) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

(د) $y = \sin 2\theta$



أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدة لكل من الدوال الآتية :

- (١) $y = \sin \frac{\theta}{3}$ (٢) $y = \sin \frac{\theta}{2}$ (٣) $y = \sin 2\theta$

٣ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

- (١) ص = ٤ ما θ حيث $\theta \in [0, \pi/2]$
- (٢) ص = ٤ ما θ حيث $\theta \in [\pi/2, \pi]$
- (٣) ص = ٢ ما θ حيث $\theta \in [\pi/2, \pi/2 -]$
- (٤) ص = ٢ ما θ حيث $\theta \in [\pi/2, \pi/2 -]$

٤ ارسم الشكل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

- (١) ص = ٢ ما θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$
- (٢) ص = ٥ ما θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

٥ مثل كلاً من الدالتين ص = ٤ ما θ ، ص = ٢ ما θ باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد :

- (١) مدى الدالة.
- (٢) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.

تقيس مستويات عليا من التفكير

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان : $m = \frac{2 - \sin x}{3}$ فإن :
- (أ) $1 \geq m \geq \frac{1}{3}$ (ب) $3 \geq m \geq \frac{2}{3}$ (ج) $3 \geq m \geq 1$ (د) $4 \geq m \geq 2$
- (٢) الدالة ص = ما $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند $x =$
- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi - 2}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) صفر
- (٣) الدالة د : د (س) = ما (ب س) دالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{3}$ فإن : ب =
- (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) ٣ (د) ٦
- (٤) إذا كانت النقطتان (س_١ ، ما س_١) ، (س_٢ ، ما س_٢) تقعان على منحنى الدالة د : د (س) = ما س فإن أكبر قيمة للمقدار (ما س_١ - ما س_٢) =
- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) ١٨٠°

(٥) إذا كانت الدالة $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $0 < d \leq 1$ دالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{4}$ ومداها $[-1, 1]$ فإن $\frac{1}{d} = \dots$

- (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{4}$

(٦) إذا كان الشكل المقابل يوضح

منحنى $y = \sin x$

فإن $|\sin x| + |\cos x| = \dots$

(أ) 1

(ب) π

(٧) إذا كان الشكل المقابل يوضح

منحنى $y = 2 \sin \frac{x}{4}$

فإن الإحداثي السيني

لنقطة x يساوى \dots

(أ) $\frac{\pi}{4}$

(ب) π

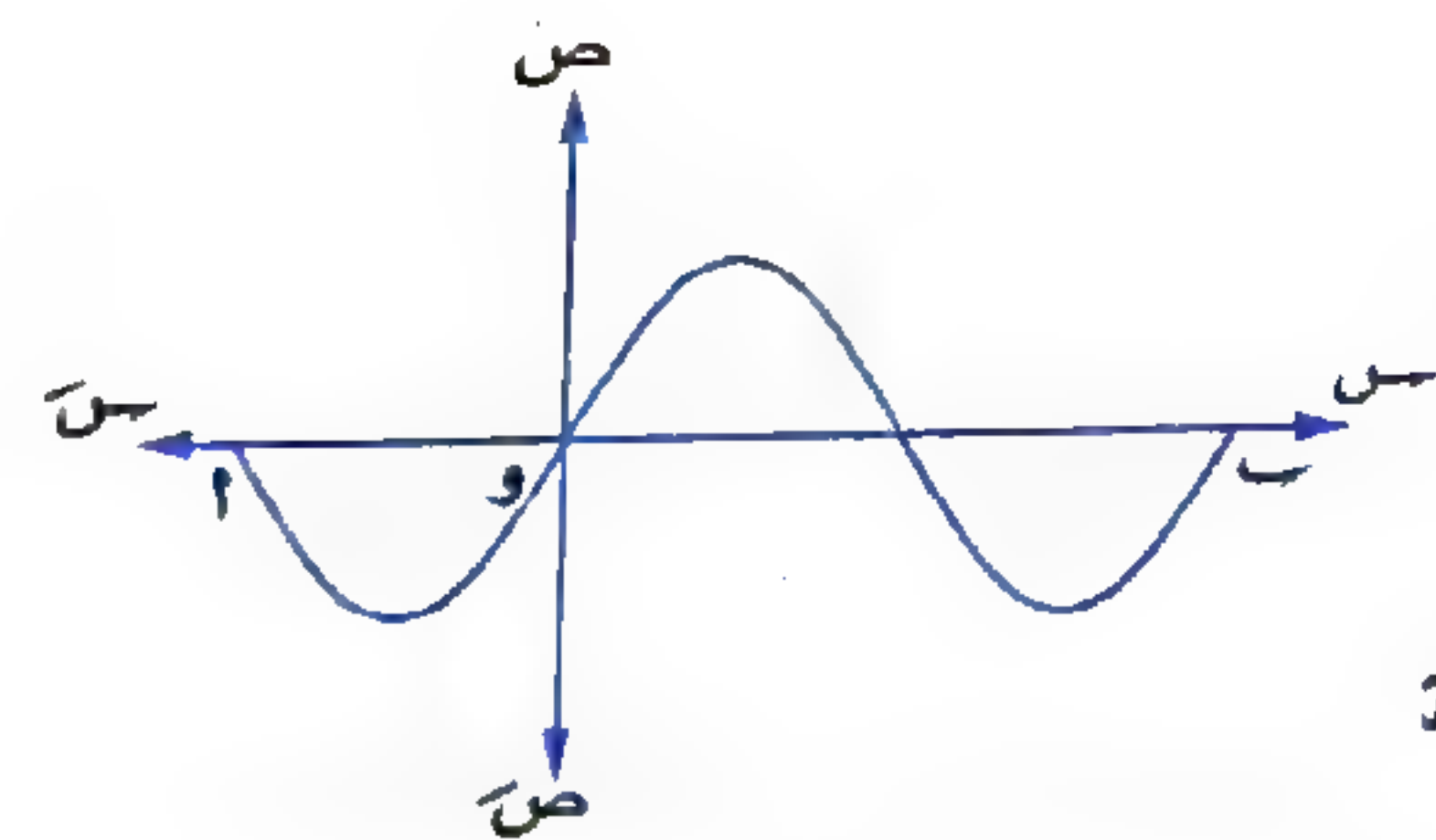
(٨) في الشكل المقابل :

إذا كانت $y = \sin x$

فإن $1 - \sin x = \dots$

(أ) π

(ب) π



(أ) π

(ب) π

(٩) عدد مرات تقاطع المنحنى $y = 3 \sin x$ مع محور السينات في الفترة $[0, 2\pi]$ يساوى \dots

- (أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

6

* نعلم أنه : إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{4}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة θ إذا علمنا قيمة θ

فمثلاً إذا كانت $\theta = 30^\circ$ فإن : $\sin \theta = \frac{1}{2}$

* هناك صورة أخرى تستخدم فى إيجاد قيمة θ إذا علمت قيمة $\cos \theta$: $\cos \theta = \frac{1}{4}$

فمثلاً إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{4}$ فإن : $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{4}) = 75.52^\circ$

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التى تحقق كلاً مما يأتى :

١ $\sin \theta = 0.6438$ ٢ $\cos \theta = 0.4517$

الحل

١ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

\sin^{-1} 0 6 4 3 8 =

فيظهر على الشاشة العدد $40^\circ 4' 32.75''$

$\therefore \theta = 40.74^\circ$

٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

\cos^{-1} 0 4 5 1 7 =

فيظهر على الشاشة $63^\circ 8' 49.9''$

$\therefore \theta = 63.14^\circ$

لاحظ

إننا استخدمنا الآلة الحاسبة لأن قيم الدالة المثلثية ليست من الدوال الخاصة أو المنتسبة إليها.

الدوال : $\theta = \sin^{-1} x$ ، $\theta = \cos^{-1} x$ ، $\theta = \tan^{-1} x$ تعرف بأنها الدوال العكسية للدوال المثلثية الأساسية وهذه الدوال تنتج قيمة وحيدة للمتغير θ لكل قيمة للمتغير x وتعين قيمة θ داخل نطاق محدد حسب خواص كل دالة

ولذلك فإن الآلة الحاسبة تأخذ فترات معينة تنتمي إليها θ بحيث يكون للدوال المثلثية دوالاً عكسية وهي كالتالي :

$$\begin{aligned} & \bullet \sin^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ حيث } x \in [-1, 1] \\ & \bullet \cos^{-1} x \in [0, \pi] \text{ حيث } x \in [-1, 1] \\ & \bullet \tan^{-1} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ حيث } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

فمثلاً $\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = -30^\circ$ أى $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ (قيمة وحيدة)

$\cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 60^\circ$ أى $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ (قيمة وحيدة)

وبالتالى فإنه عند حساب θ حيث $\theta = \sin^{-1} x$ ، $\theta = \cos^{-1} x$ ، $\theta = \tan^{-1} x$

نستخدم الآلة مباشرة ويكون الحل قيمة وحيدة

أما عند حساب θ حيث $0 < \theta < 360^\circ$ ، $\theta = \sin^{-1} x$ ، $\theta = \cos^{-1} x$ ، $\theta = \tan^{-1} x$

نتبع الخطوات كما بالمثال التالى.

مثال ٢

إذا كان : $0^\circ < \theta < 360^\circ$ فأوجد θ التى تحقق كلاً مما يأتى :

١ $\cos \theta = 0.8177$ ، ٢ $\tan \theta = -8.6421$

الحل

١ $\therefore \cos \theta = 0.8177 > 0$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى جيب تمامها 0.8177 ، وذلك بكتابة $\cos^{-1} 0.8177$ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :



$\therefore \cos^{-1} 0.8177 = 35.81^\circ$

\therefore الربع الأول : $\theta = 35.81^\circ$ ، الربع الرابع : $\theta = 360^\circ - 35.81^\circ = 324.19^\circ$

٢ $\therefore \theta = -8.6421 \dots$ (سالبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التي ظل تمامها $|-8.6421|$

وذلك بكتابة $\tan^{-1} 8.6421$ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتي من اليسار :

SHIFT tan 8 6 4 2 1 \tan^{-1} = 0.111

$\therefore \theta = -8.6421 \dots = -62.6^\circ$

\therefore الربع الثاني : $\theta = 180^\circ - 62.6^\circ = 117.4^\circ$

، الربع الرابع : $\theta = 360^\circ - 62.6^\circ = 297.4^\circ$

حاول بنفسك

أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ التي تحقق أن :

٣ $\cos \theta = -0.9115$

٢ $\tan \theta = 0.4695$

١ $\sin \theta = 0.8$

مثال ٣

إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ فأوجد : θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل

\therefore النقطة $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ تقع في الربع الثاني.

\therefore الزاوية الموجهة التي قياسها θ تقع في الربع الثاني.

$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}$

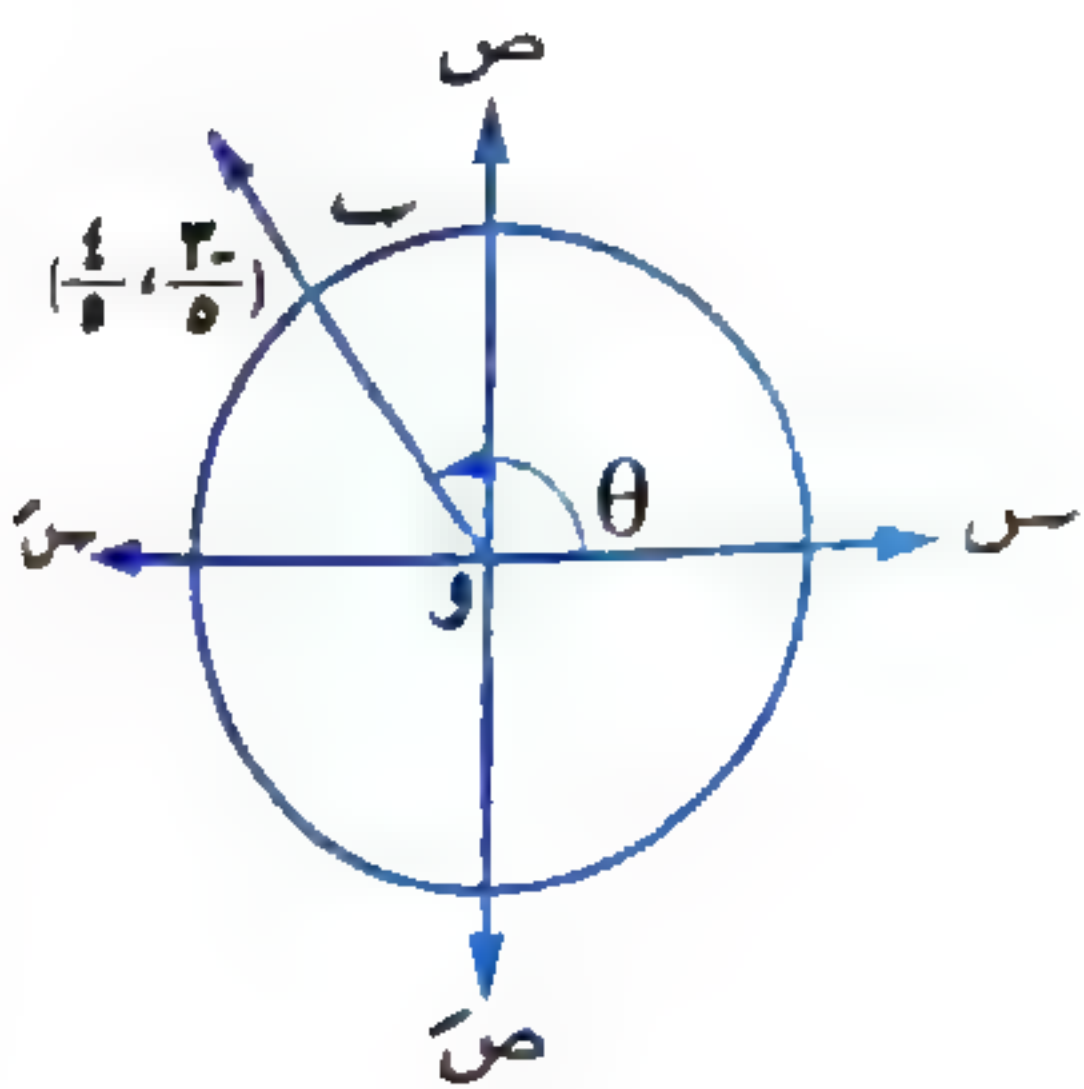
$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{4}{5}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد $\cos^{-1} \frac{4}{5}$

SHIFT sin $\frac{4}{5}$ = 0.111

$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{4}{5} = 36.87^\circ$

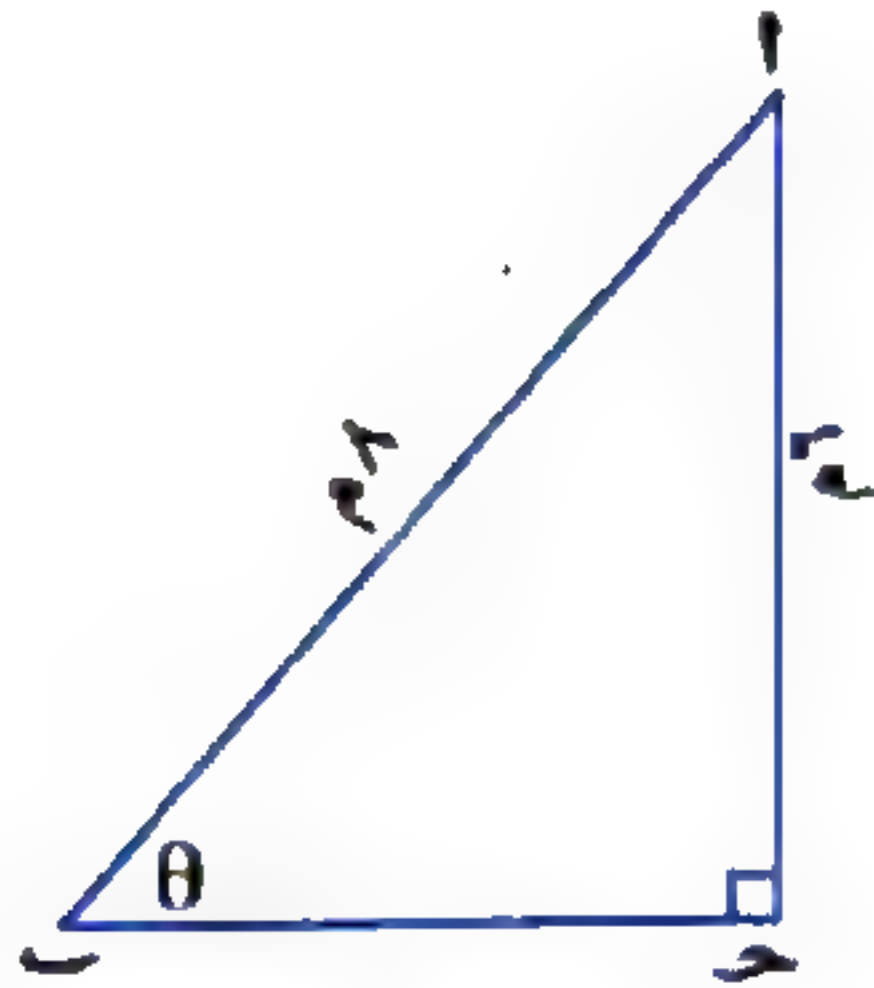
$\therefore \theta = 360^\circ - 36.87^\circ = 323.13^\circ$



مثال ٤

سلم طوله ٨ أمتار يستند على جدار رأسي وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوي ٦ أمتار. فابعد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأرض.

الحل



السلم يصنع مع الحائط الرأسى والأرض الأفقية مثلثاً قائم الزاوية وليكن ΔABC القائم الزاوية فى C

$$\therefore \sin \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

حيث: $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \frac{3}{4}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد $\theta = \sin^{-1} \frac{3}{4}$



$$\therefore \theta \approx 48.59^\circ$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{180} \times 48.59^\circ \approx 0.848 \text{ راديان}$$

\therefore قياس زاوية ميل السلم على الأرض ≈ 0.848 راديان.

ملحظة

في المثال السابق :

$\theta = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ يمكن إيجاد θ بالراديان مباشرةً باستخدام الآلة الحاسبة كالتالى :

١ اضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين لتحويل الآلة من النظام الستيني (Deg) إلى النظام الدائري (Rad)



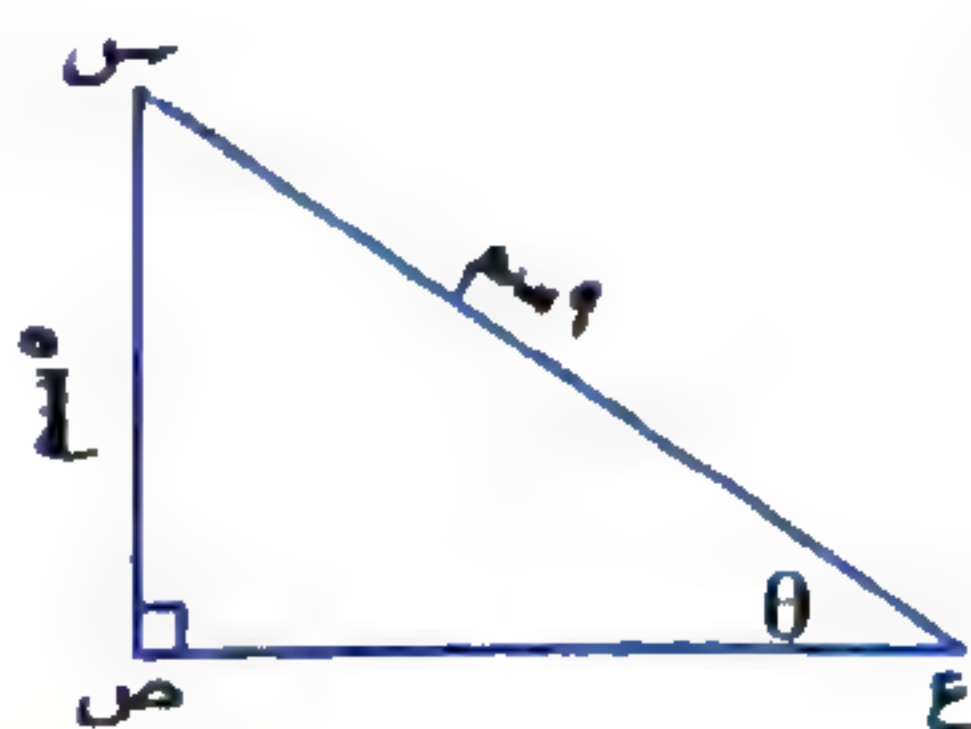
٢ أوجد θ بالراديان مباشرةً بالضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين



$$\therefore \theta \approx 0.848 \text{ راديان}$$

حاول بنفسك

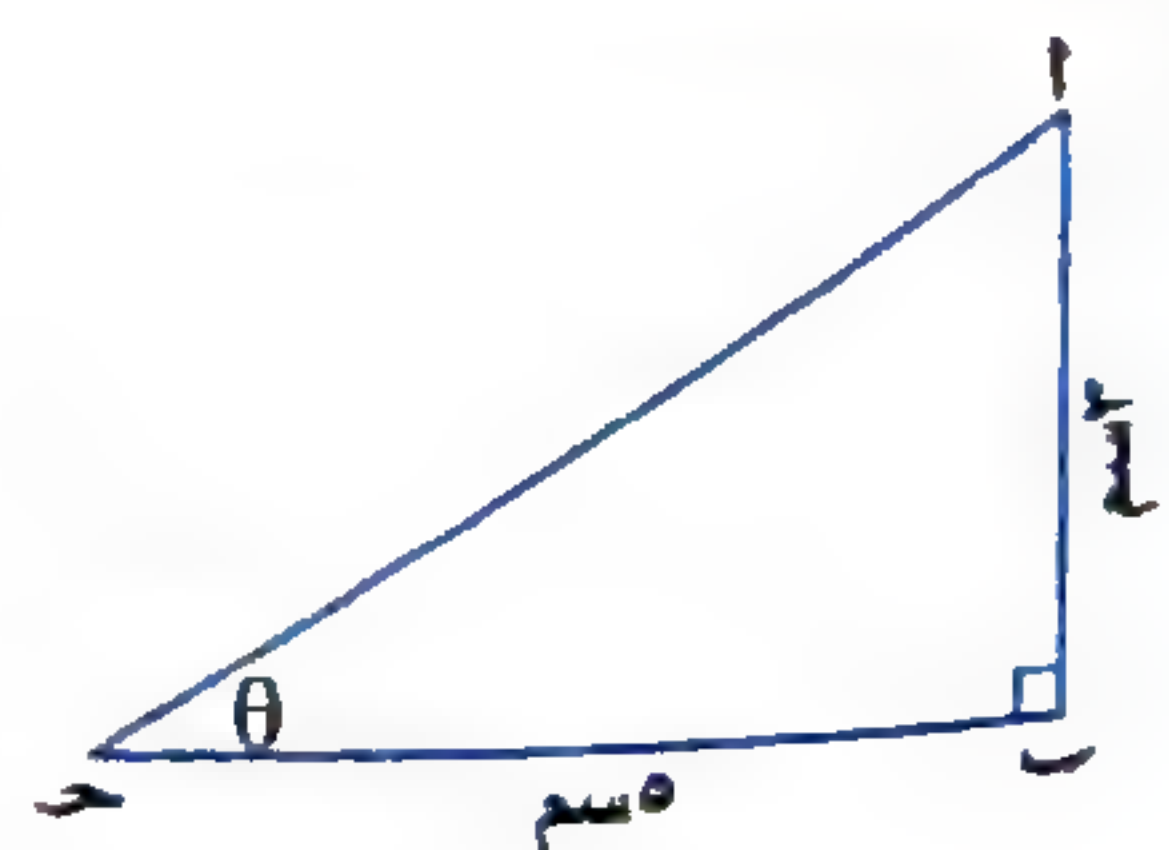
أوجد θ بالراديان فى كل من المثلثات القائمة الآتية :



٣



٢



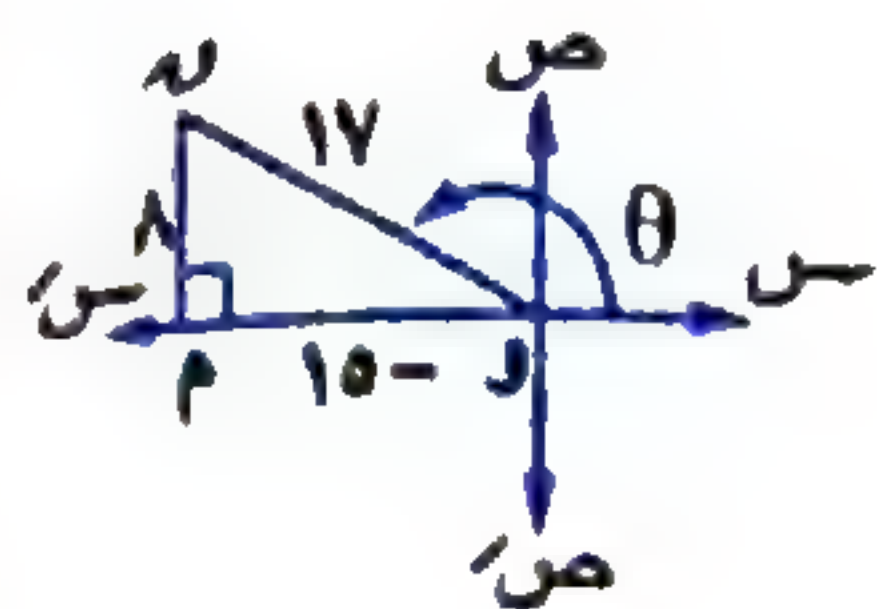
١

مثال 5

إذا كان : $\frac{\Delta}{17} = \theta$ حيث $^\circ 180 > \theta > ^\circ 90$

فاوجد θ لأقرب ثانية ثم أوجد باقى الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

الحل



$$\therefore \theta = \theta = \frac{\Delta}{17} = 21^\circ \text{ و } 28^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{\Delta}{17}$$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى.

$$\therefore \theta > 90^\circ > 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - 21^\circ = 159^\circ \text{ و } 28^\circ$$

\therefore نعتبر أن $m = 8$ وحدة طول ، و $n = 17$ وحدة طول

$$\therefore \theta = \frac{\Delta}{17}$$

فيكون (باستخدام نظرية فيثاغورس) و $m = 15$ وحدة طول وله إشارة سالبة

$$\therefore \theta = \frac{15}{17} = \frac{m}{n} = \theta \text{ ، } \frac{8}{15} = \frac{\Delta}{15} = \theta$$

$$\text{فأ } \theta = \frac{17}{8} = \frac{n}{m} = \theta \text{ ، فأ } \theta = \frac{17}{15} = \frac{n}{m} = \theta \text{ ، فأ } \theta = \frac{15}{8} = \frac{m}{n} = \theta$$

حاول بنفسك

إذا كان : $\frac{1}{4} = \theta$ ، $^\circ 270 \geq \theta \geq ^\circ 360$

أوجد : θ لأقرب ثانية. 1 أوجد قيمة كل من : θ ، θ ، θ 2

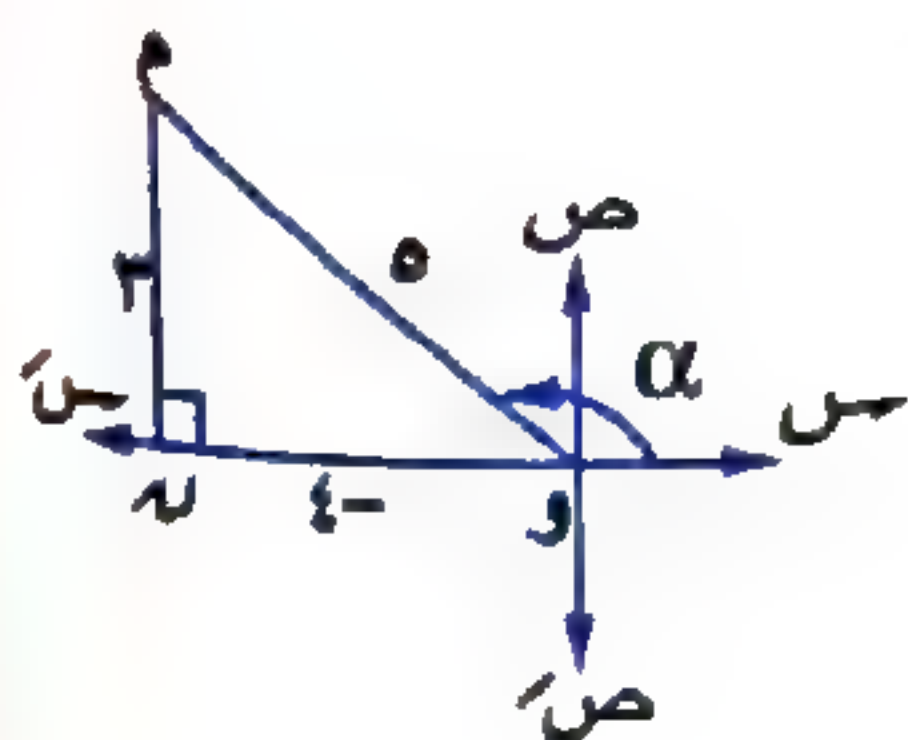
مثال 6

إذا كان : $\frac{2}{5} = \alpha$ حيث $^\circ 180 > \alpha > ^\circ 90$ ، $\frac{12}{5} = \beta$ حيث $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\theta = \theta = (\alpha - 180^\circ) \text{ و } (\beta - 180^\circ) \text{ و } \alpha$$

أوجد : θ لأقرب دقيقة حيث $^\circ 90 > \theta > ^\circ$

الحل

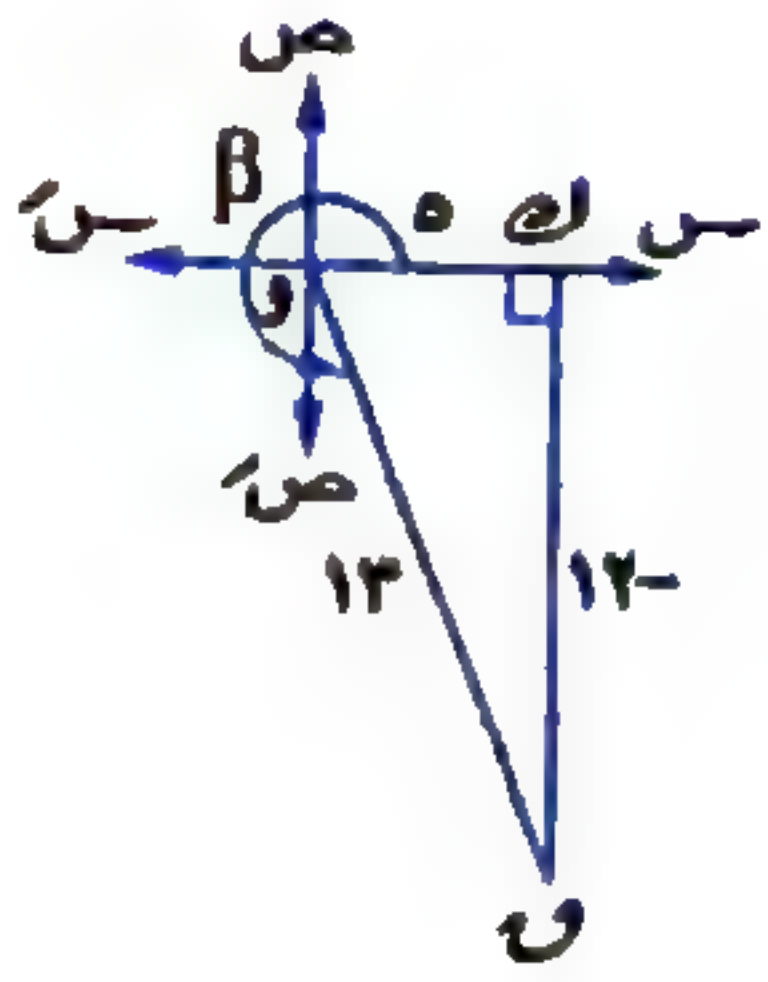


$$\therefore (n) = 16 = 13 - 3 = 16$$

\therefore و $n = 4$ وحدة طول وإشارته سالبة.

$$\therefore (n) = 169 = 12 + 5 = 169$$

\therefore و $n = 13$ وحدة طول.



$$\therefore \theta = \alpha - (180^\circ - \beta) = \alpha - 180^\circ + \beta$$

$$= \alpha - 180^\circ + \beta$$

$$\frac{12}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} \times \frac{2}{5} = \alpha - 180^\circ + \beta$$

$\therefore 0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول.

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : $\theta = 10.48^\circ$

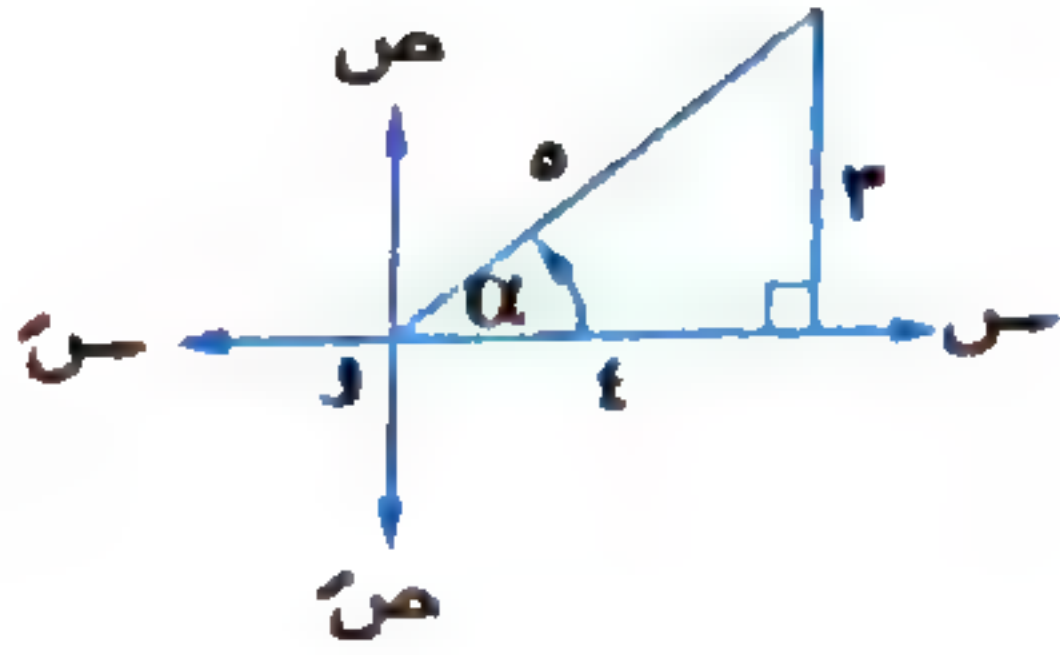
مثال ٧

إذا كان : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ حيث $2 = (\alpha - 180^\circ)$

، $180^\circ < \beta < 90^\circ$ حيث $0 = 12 - (\beta + 90^\circ)$

أوجد قيمة θ حيث : $\theta = \alpha - 180^\circ + \beta$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$

الحل



$$\therefore 2 = (\alpha - 180^\circ) \quad \therefore 2 = \alpha - 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 2 + 180^\circ$$

$$\text{كذلك : } 0 = 12 - (\beta + 90^\circ)$$

$$\therefore 12 = \beta + 90^\circ$$

$$\therefore \beta = 12 - 90^\circ$$

$$\theta = \alpha - 180^\circ + \beta = (2 + 180^\circ) - 180^\circ + (12 - 90^\circ)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{12} \times \frac{2}{5} = \alpha - 180^\circ + \beta$$

$$\therefore \theta > 0$$

$\theta \in$ الربع الثالث.

$$\therefore \theta = 180^\circ + 7.42^\circ$$

$$= 187.42^\circ$$

$\therefore \theta \in$ الربع الثاني.

$$\therefore \theta = 180^\circ - 7.42^\circ$$

$$= 172.58^\circ$$

على إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

12

من أسئلة الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فإن $\theta = \dots$
- (٢) إذا كان $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $90^\circ > \theta > 18^\circ$ فإن $\theta = \dots$
- (٣) إذا كان $\theta = 2$ ، $27^\circ > \theta > 36^\circ$ فإن $\theta = \dots$
- (٤) $\theta = 0,7$ فإن $\theta = \dots$
- (٥) $\theta = (0,6)$ فإن $\theta = \dots$
- (٦) إذا كان $\theta = 0,436$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن $\theta = \dots$
- (٧) إذا كان $\theta = 1,8$ وكانت $90^\circ \geq \theta \geq 36^\circ$ فإن $\theta = \dots$
- (١) 60° (ب) 120° (ج) 240° (د) 300°
- (١) 30° (ب) 120° (ج) 150° (د) 210°
- (١) 30° (ب) 300° (ج) 230° (د) 150°
- (١) $44^\circ 25' 47''$ (ب) $44^\circ 25' 47''$ (ج) $44^\circ 25' 47''$ (د) $44^\circ 25' 47''$
- (١) $36,87^\circ$ (ب) $143,13^\circ$ (ج) $216,87^\circ$ (د) $323,13^\circ$
- (١) $64^\circ 9'$ (ب) $115^\circ 51'$ (ج) $244^\circ 9'$ (د) $295^\circ 51'$
- (١) $60^\circ 57'$ (ب) $119^\circ 4'$ (ج) $240^\circ 57'$ (د) $299^\circ 4'$

أوجد بالقياس الستيني قياس أصغر زاوية موجبة θ تحقق كلاً من :

- (١) $\theta = 0,6$ (٢) $\theta = 0,7865$ (٣) $\theta = 2,4577$
- (٤) $\theta = 0,8227$ (٥) $\theta = 0,4652$ (٦) $\theta = 0,526$
- (٧) $\theta = 3,6318$ (٨) $\theta = 1,4612$ (٩) $\theta = 1,0478$
- (١٠) $\theta = 2,5466$ (١١) $\theta = 3,07$ (١٢) $\theta = 2,9811$

إذا كان $90^\circ > \theta > 36^\circ$ فأوجد θ التي تحقق كلاً مما يأتي :

- (١) $\theta = 0,86603$ (٢) $\theta = 0,4752$ (٣) $\theta = 1,2576$
- (٤) $\theta = 1,5417$ (٥) $\theta = 0,642$ (٦) $\theta = 2,015$
- (٧) $\theta = 1,8715$ (٨) $\theta = 2,7012$ (٩) $\theta = 2,1456$

٤ إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب
 فأوجد : ب (د θ) حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ عندما :

(١) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (٢) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (٣) $\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$

٥ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستيني في كل شكل من الأشكال الآتية :



٦ إذا كان : $\frac{1}{2} = \theta$ وكانت $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$:

(١) احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية. (٢) أوجد قيمة كل من : $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\cot \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\csc \theta$

٧ أ ب ح مثلث فيه $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 45^\circ$ ، $\angle C = 105^\circ$ ، فأوجد لأقرب دقيقة : (د ح) $\sin A$ ، $\cos A$ ، $\tan A$ ، $\cot A$ ، $\sec A$ ، $\csc A$

٨ إذا كان : $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتي تحقق :

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cot \theta = \frac{1}{2}$ ، $\sec \theta = \frac{1}{2}$ ، $\csc \theta = \frac{1}{2}$

٩ إذا كان : $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتي تحقق :

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cot \theta = \frac{1}{2}$ ، $\sec \theta = \frac{1}{2}$ ، $\csc \theta = \frac{1}{2}$

١٠ إذا كان : $\frac{\pi}{2} = \theta$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، $\theta \in [0, \pi]$

أوجد قيمة α لأقرب دقيقة إذا كان :

$\alpha = \sin^{-1}(\sin \theta)$ ، $\alpha = \cos^{-1}(\cos \theta)$ ، $\alpha = \tan^{-1}(\tan \theta)$ ، $\alpha = \cot^{-1}(\cot \theta)$ ، $\alpha = \sec^{-1}(\sec \theta)$ ، $\alpha = \csc^{-1}(\csc \theta)$

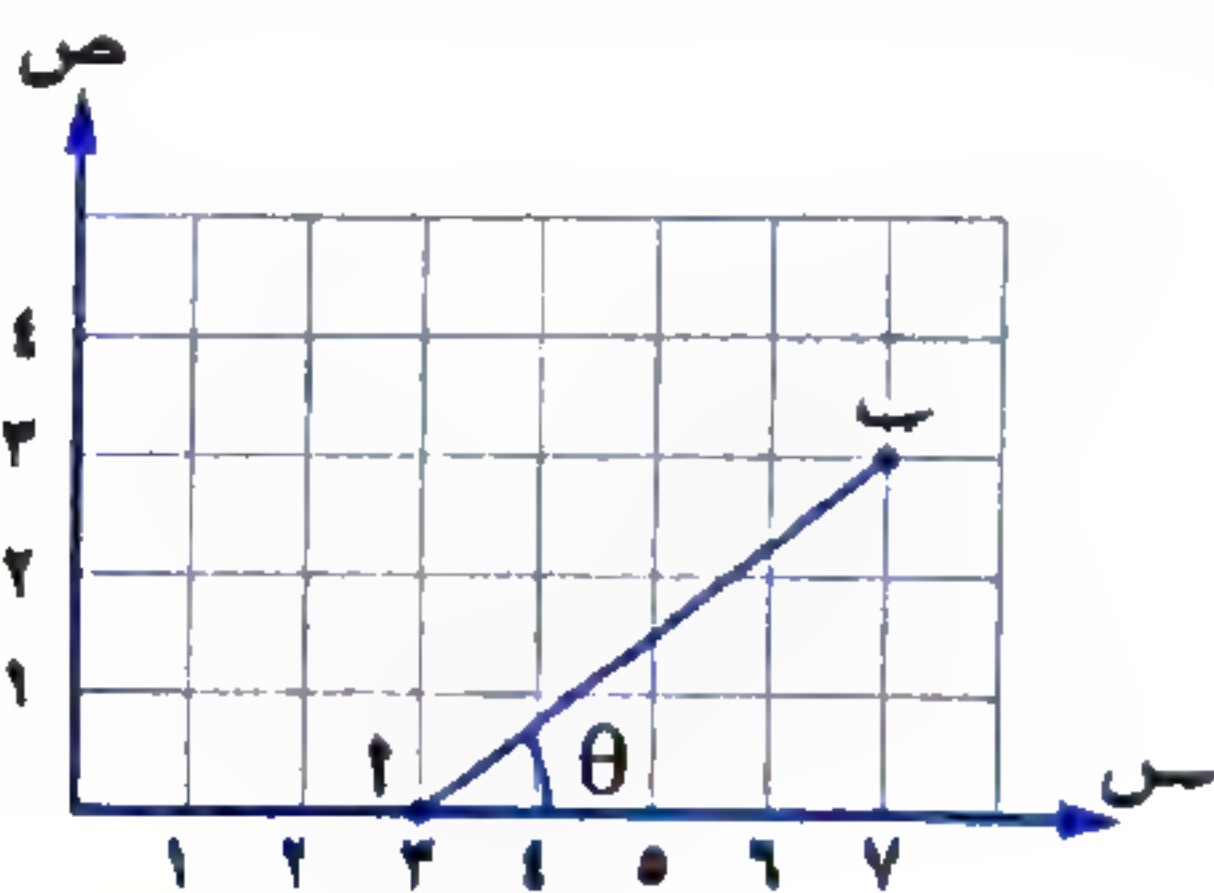
١١ إذا كان : $\frac{\pi}{2} = \alpha$ حيث $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ أوجد θ من المعادلة :

$\sin \alpha = \sin \theta$ ، $\cos \alpha = \cos \theta$ ، $\tan \alpha = \tan \theta$ ، $\cot \alpha = \cot \theta$ ، $\sec \alpha = \sec \theta$ ، $\csc \alpha = \csc \theta$

١٢ الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين

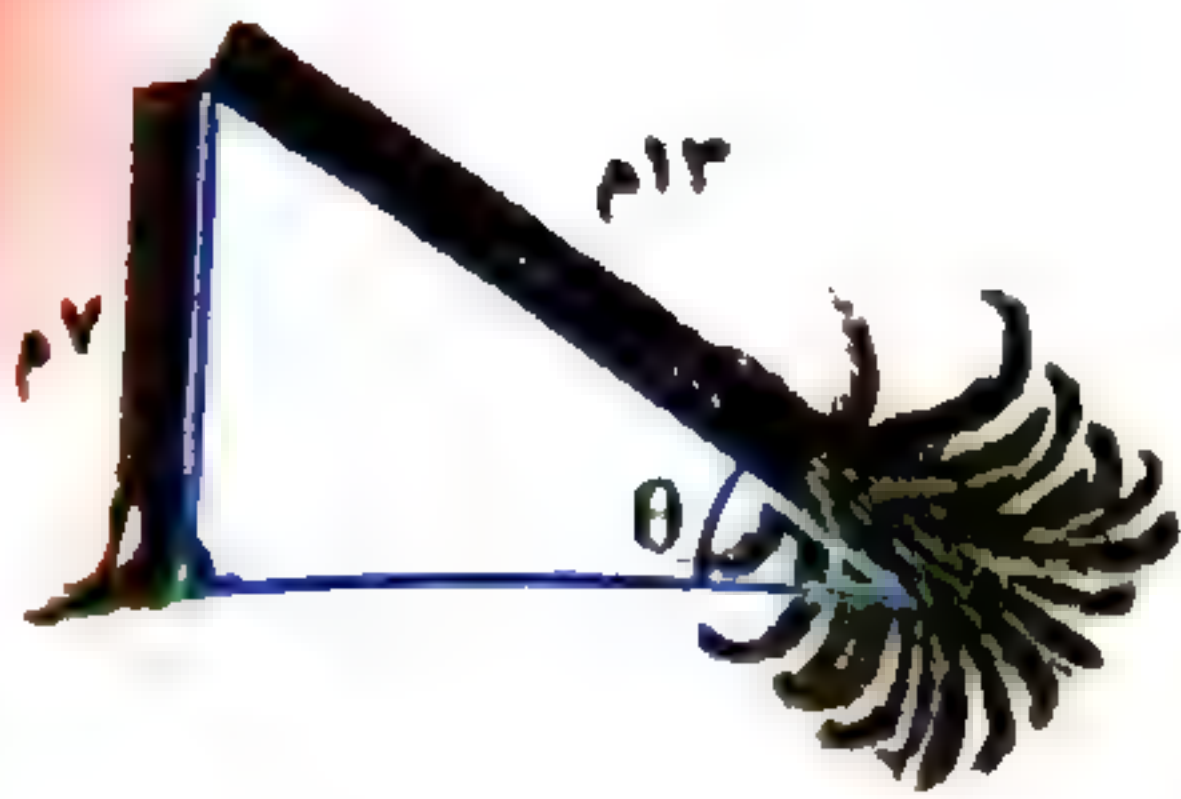
النقطتين أ (٠ ، ٣) ، ب (٣ ، ٧)

أوجد قياس الزاوية المحصورة بين \overline{AB} ومحور السينات.



«٢٦٥٢١٢»

اكتشف الخطأ



١٣ بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا ، بحيث تأخذ الشكل المجاور ، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار ، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هي الزاوية التي يصنعها الجزء المائل مع الأفقى ، فأوجد θ بالتقدير الستينى .

إجابة عمر

$$\therefore \frac{13}{7} = \theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \frac{13}{7} \therefore \theta \approx 66.4^\circ$$

إجابة كريم

$$\therefore \frac{13}{7} = \theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \frac{13}{7} \therefore \theta \approx 22.4^\circ$$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

$$\sin(\angle A) = \dots$$

$$(أ) \sin^{-1} \frac{3}{4} \quad (ب) \sin^{-1} \frac{4}{3} \quad (ج) \tan^{-1} \frac{3}{4} \quad (د) \tan^{-1} \frac{4}{3}$$

$$(٢) \sin(\angle A) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} \dots$$

$$(أ) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (ب) \frac{1}{2} \quad (ج) 30^\circ \quad (د) 60^\circ$$

$$(٣) \cos(\angle A) = \text{صفر} \dots$$

$$(أ) 1 \quad (ب) -1 \quad (ج) \frac{\pi}{2} \quad (د) \text{صفر}$$

(٤) فى الشكل المقابل :

$$\sin(\angle A) = \left(\frac{5}{12} \right)^{-1} \dots$$

$$(أ) \frac{5}{12} \quad (ب) \frac{12}{5} \quad (ج) \frac{12}{13} \quad (د) 13$$

(٥) فى الشكل المقابل :

$$\angle A + \angle B = \text{متوازى أضلاع مساحته} = 40^\circ \text{ سم}^2 \text{ فإن : } \angle A = \dots$$

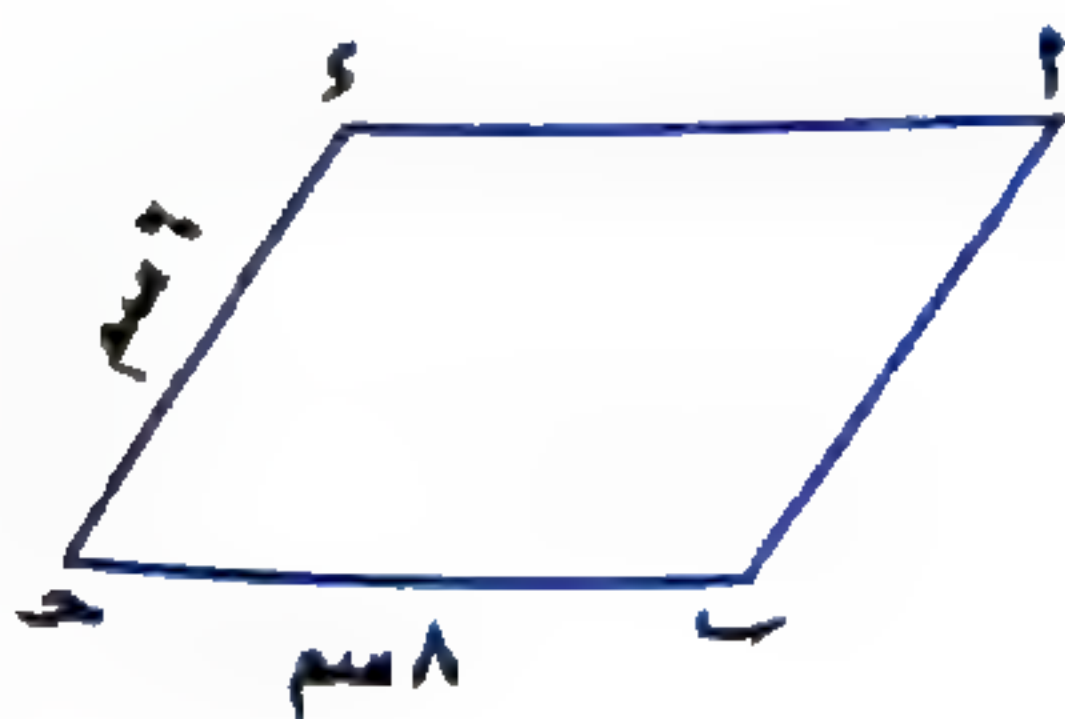
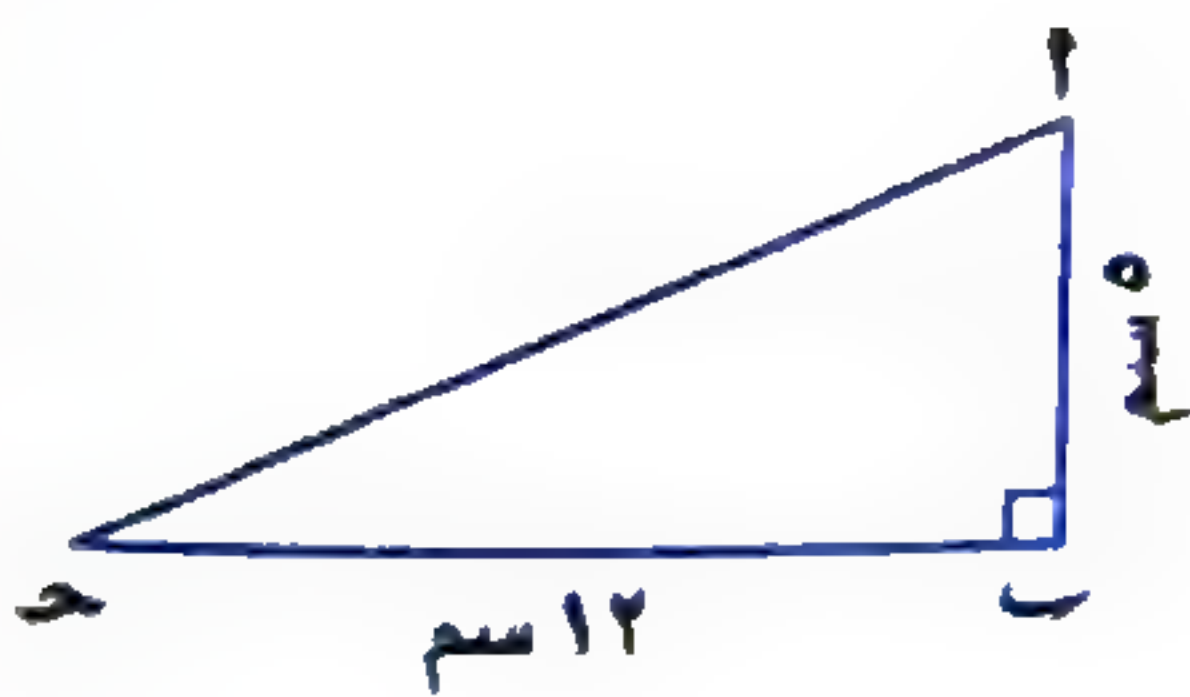
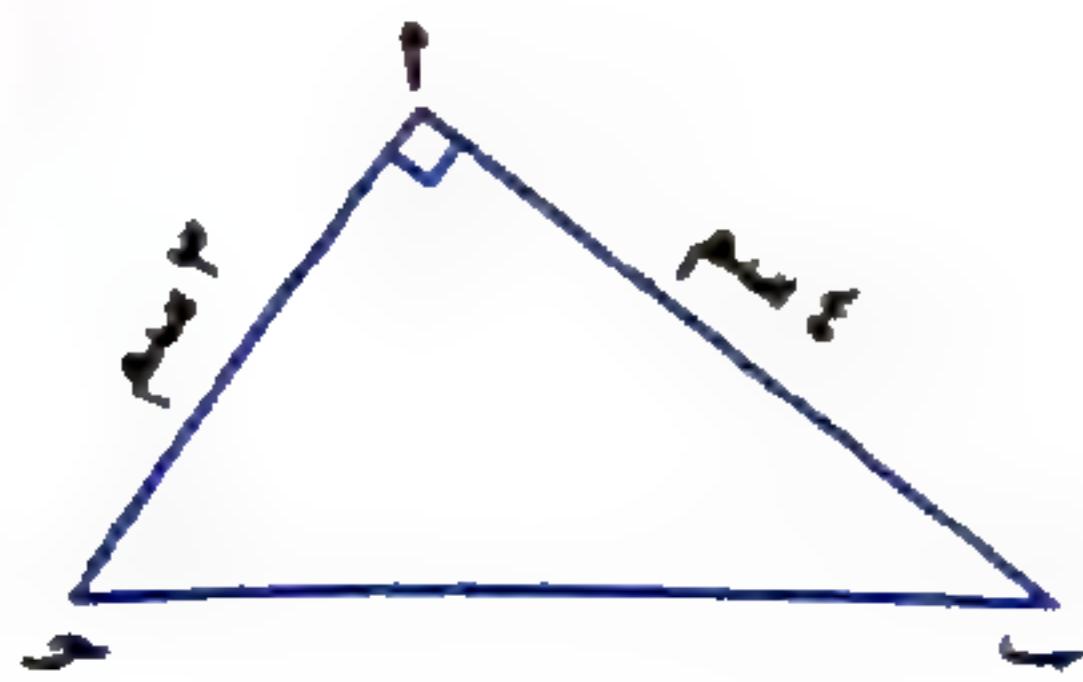
$$(أ) 37^\circ \quad (ب) 56^\circ \quad (ج) 52^\circ \quad (د) 34^\circ$$

$$(٦) \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$$

$$(أ) \frac{\pi}{3} \quad (ب) \frac{\pi}{2} \quad (ج) \frac{\pi}{4} \quad (د) \frac{\pi}{6}$$

$$(٧) \sin^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{1}{2} = \dots$$

$$(أ) \text{صفر} \quad (ب) \frac{\pi}{4} \quad (ج) \frac{\pi}{2} \quad (د) \pi$$



تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها 200°

٢٠٤٩.

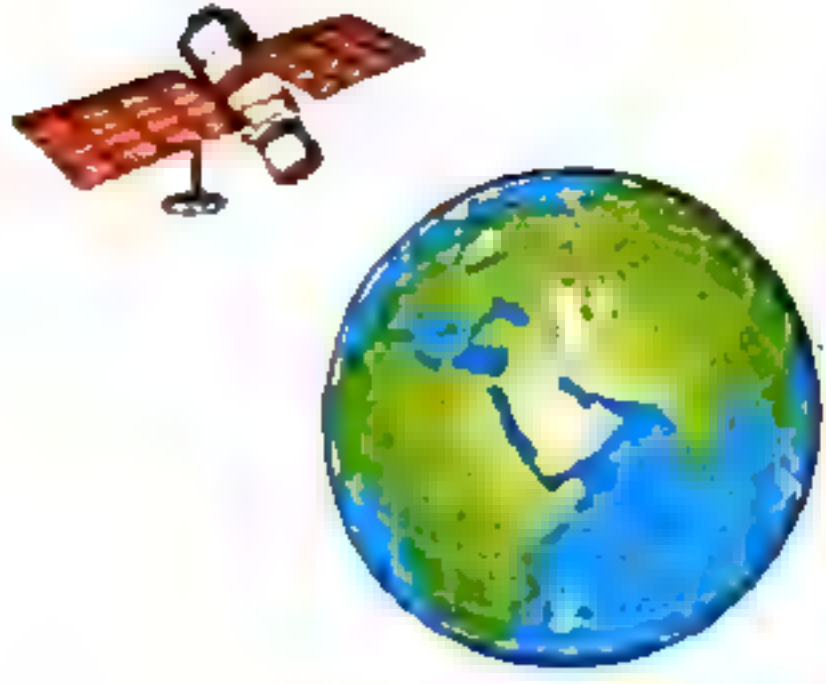
ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى.

٢ كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم ؟

« ٢٠ سم »

٣ قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات ، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم ، فأوجد سرعته بالكيلومتر فى الساعة.

« ٩٤٢٤,٧٨ كم/س »



٤ قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة

كاملة كل ٣ ساعات ، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريباً ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم.

فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقرباً الناتج لأقرب كيلومتر.

« ٢٠٩٤٤ كم »



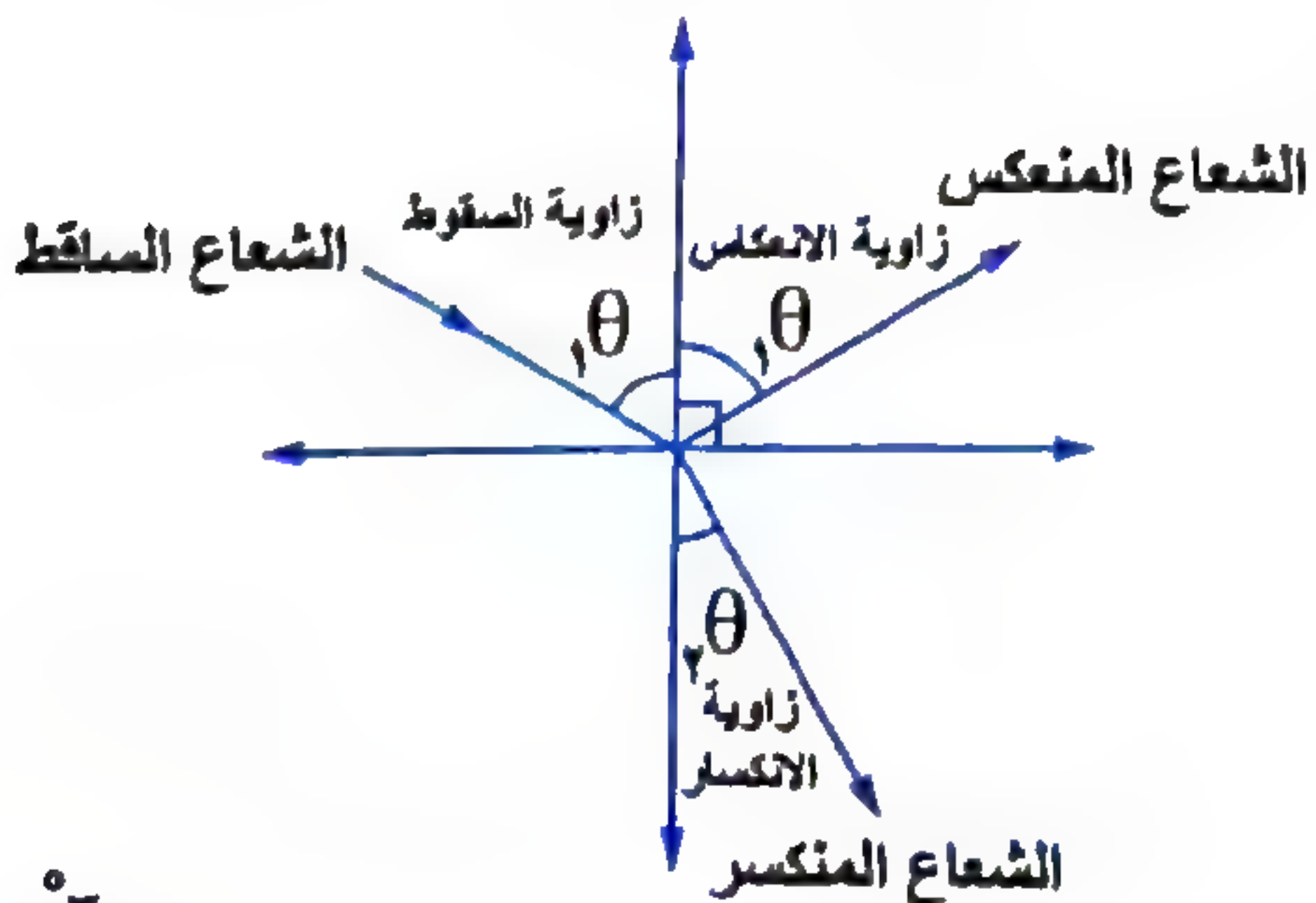
٥ تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها ، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل 15° لكل ساعة.

(١) أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

(٢) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ راديان ؟

(٣) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم ، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص

بعد مرور ١٠ ساعات. « ١,٠٥ ، ٨ ساعات ، ٢٠ سم »



٢٠٠.

٦ عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف ،

فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور :

إذا كان $\theta_1 = \theta_2$ ،

كانت $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ ، فأوجد قياس زاوية θ_3 ،



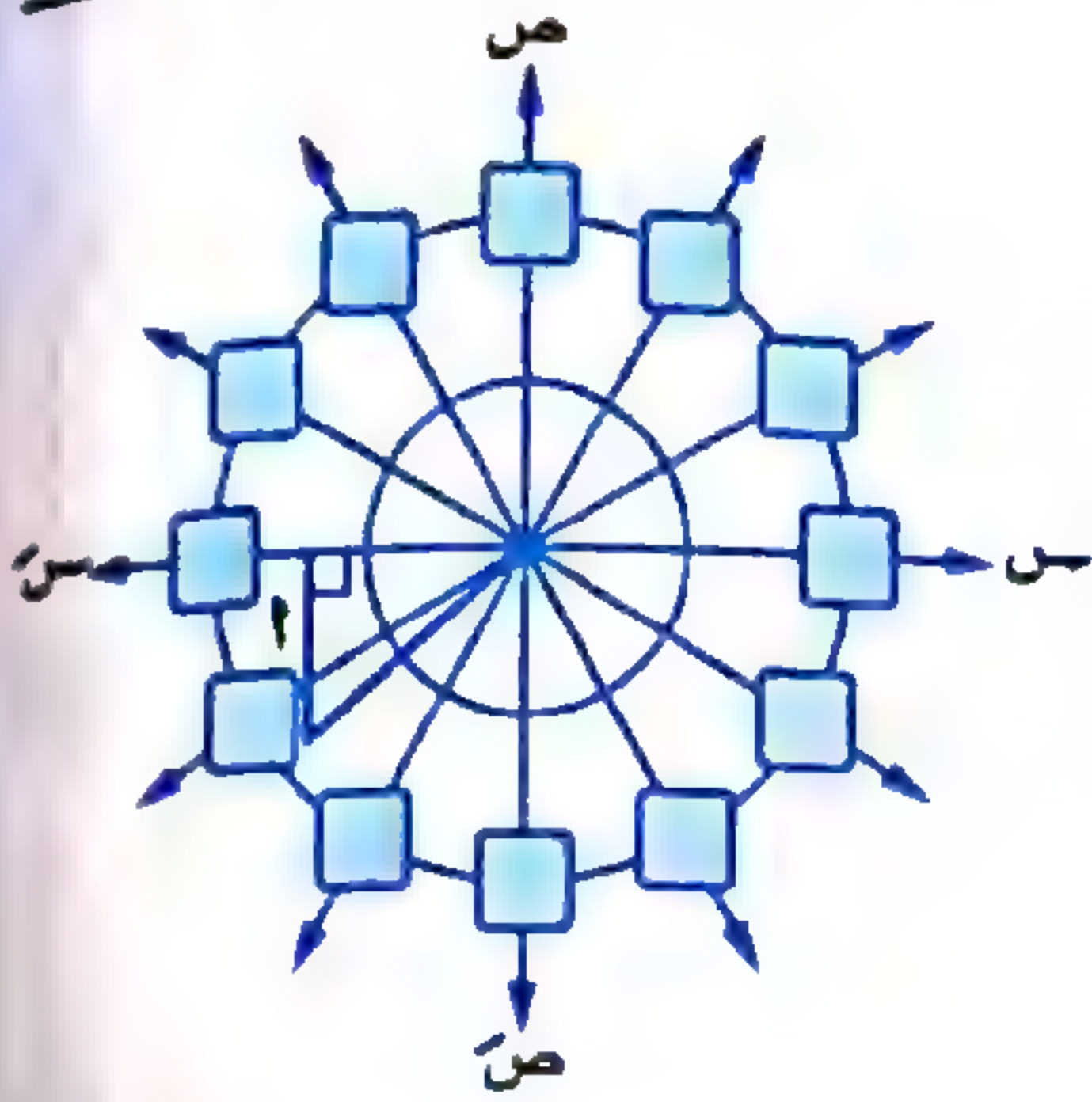
٧ عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كان قياس زاوية

ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل :

(١) ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى ، بحيث تكون الزاوية ١٣٢°

فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم ١ ، ثم أوجد قيمة ١ لأقرب سنتيمتر.



٨ تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى ، وهى عبارة عن

عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ طول نصف قطره

١٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى

الوضع القياسى $\frac{\pi}{5}$:

(١) ارسم الزاوية التى قياسها $\frac{\pi}{5}$ فى الوضع القياسى.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة ١

ثم أوجد قيمة ١ بالمتر لأقرب رقمين عشريين.

٨,٤٩ متر.

٩ يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعاً نتيجة حركة المد والجزر ، بحيث

لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار ، وكانت حركة المد والجزر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة $f = 6 \sin(15^\circ t) + 10$ حيث t هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعاً لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة.

(١) أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.

(٢) ارسم مخططاً بيانياً يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجزر أثناء اليوم.

(٣) أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء.



١٠ سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن

سطح الأرض يساوى ٣ أمتار

فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأفقى.



١١ توجد لعبة التزلج فى مدينة الألعاب ، فإذا كان ارتفاع إحدى

اللاعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة

مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية

بالدرجات لأقرب جزء من ألف.



١٢ يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ مترًا

وارتفاعه ٨ أمتار ، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى

زاوية قياسها θ أوجد θ بالتقدير الستينى.

٧٤٦١

ثانياً

الهندسة



التشابه.

الوحدة الثالثة

نظريات التناسب في المثلث.

الوحدة الرابعة

التشابه

3 الوحدة



فى نهاية الوحدة

• تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة.

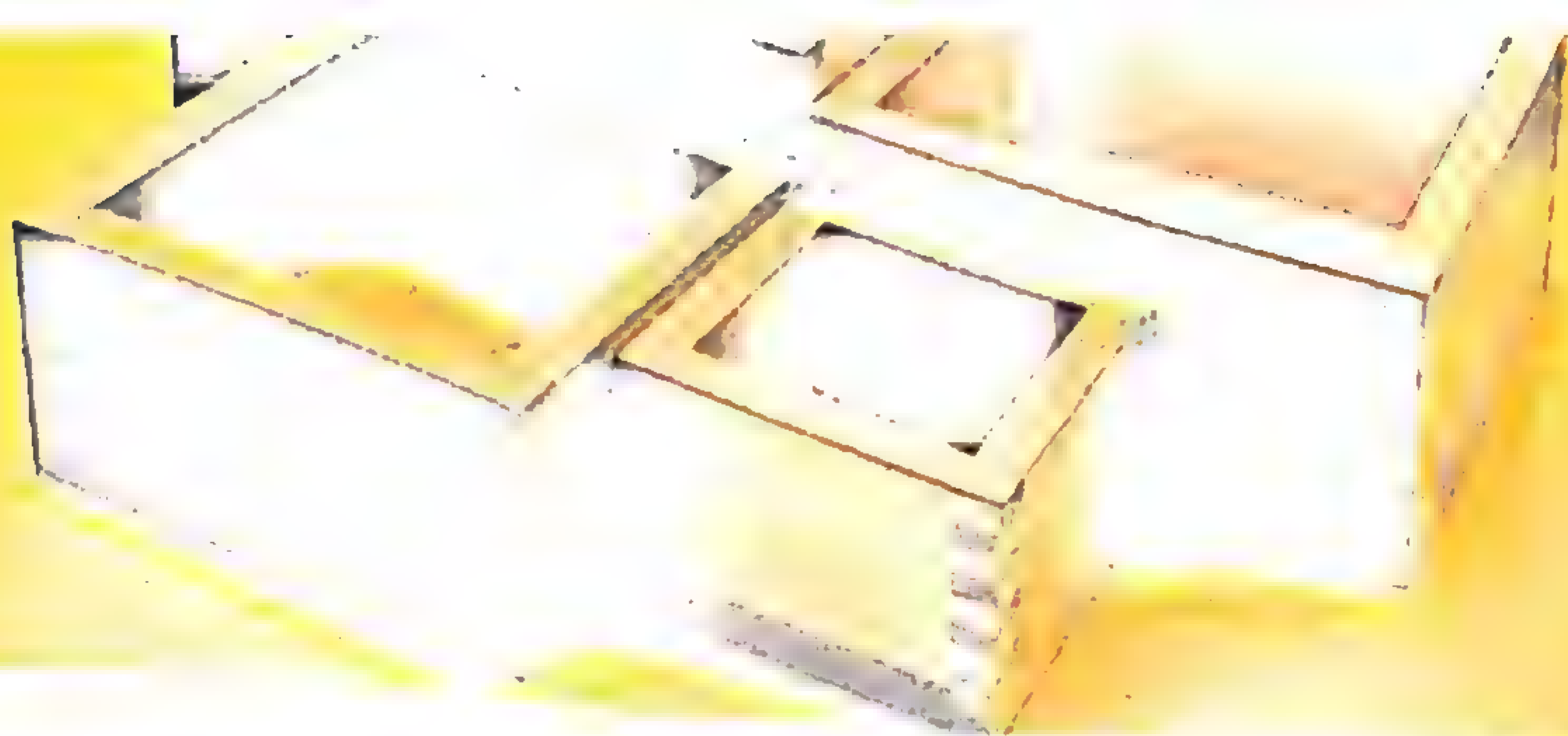
دروس الوحدة

- 1 تشابه المضلعات.
- 2 تشابه المثلثات.
- 3 العلاقة بين مساحتي سطحين مضلعين متشابهين.
- 4 تطبيقات التشابه في الدائرة.

نواتج التعلم

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يستدعي ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية عن موضوع التشابه.
- يستخدم معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.
- يتعرف مسلمة التشابه «إذا طابقت زاويتان في مثلث نظيرتيهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».
- يعرف أنه إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.
- يعرف أنه إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين ، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.
- يحل تمارين وتطبيقات رياضية على حالات تشابه المثلثات.
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على : «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يشابهان».
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على : «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين».
- يستخدم تشابه المثلثات في القياس غير المباشر.
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على : «النسبة بين مساحتي سطحين مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على : «النسبة بين مساحتي سطحين مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين وترين متقاطعين في دائرة.
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- يتعرف العلاقة بين طول مماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- ينمذج ويحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات في الدائرة.



تشابه المضلعات

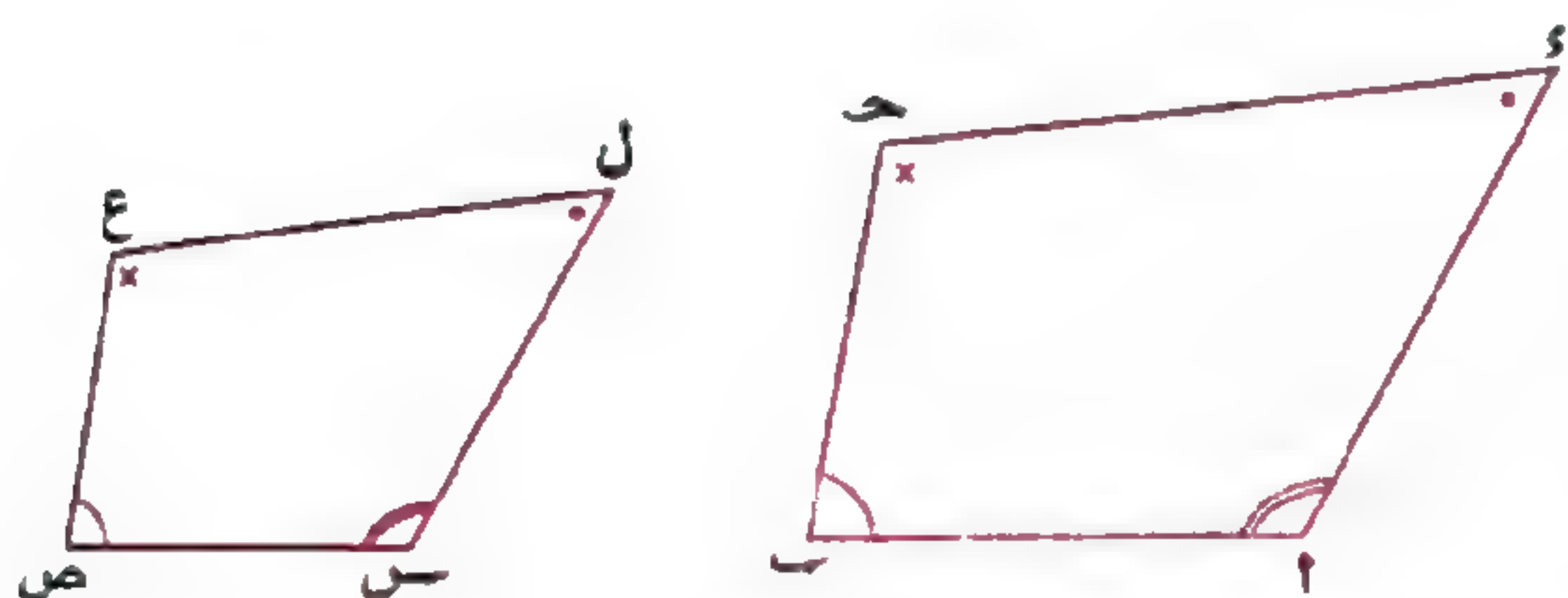
1
الدرس

تعريف

يُقال لمضلعين M_1 ، M_2 (لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً :

١ تساوى قياسات الزوايا المتناظرة. ٢ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

وفى هذه الحالة نكتب : المضلع $M_1 \sim$ المضلع M_2 لتعنى أن : المضلع M_1 يشابه المضلع M_2



ففى الشكل المقابل إذا كان :

$$١ \quad \angle (د س) = \angle (د ح) ، \angle (د ص) = \angle (د ع)$$

$$\angle (د ح) = \angle (د ع) ، \angle (د ل) = \angle (د س)$$

$$٢ \quad \frac{د س}{د ح} = \frac{د ع}{د ل} = \frac{د ح}{د ع} = \frac{د ل}{د س}$$

فإن : المضلع $د س ح ع \sim$ المضلع $د ح ع ل$

ملاحظة

يُفضل عند كتابة المضلعين المتشابهين أن نكتبهما بنفس ترتيب رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل استنتاج الزوايا المتساوية فى القياس وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع.

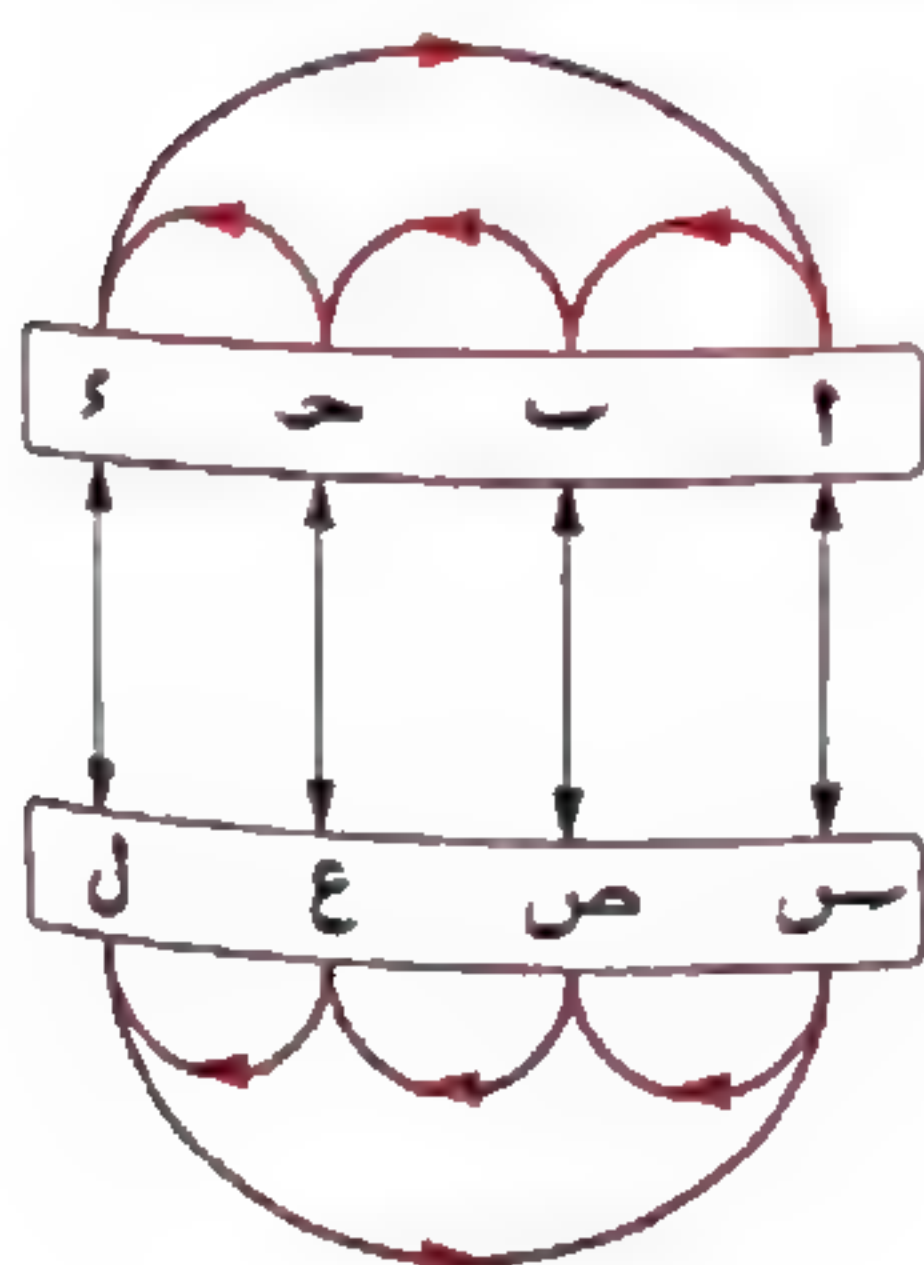
فمثلاً إذا كتبنا أن المضلع $د س ح ع \sim$ المضلع $د ح ع ل$

فإننا نستنتج مباشرة أن :

$$١ \quad \angle (د س) = \angle (د ح) ، \angle (د ص) = \angle (د ع)$$

$$\angle (د ح) = \angle (د ع) ، \angle (د ل) = \angle (د س)$$

$$٢ \quad \frac{د س}{د ح} = \frac{د ع}{د ل} = \frac{د ح}{د ع} = \frac{د ل}{د س}$$



ملاحظة ٢

إذا كان المضلع $أ ب ح د$ ~ المضلع $س ص ع ل$ فإن :

$$\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ح}{ع} = \frac{د}{ل} = ك$$

حيث : $ك < صفر$ (نسبة التشابه أو معامل التشابه) حيث : $ك < صفر$

فإذا كان معامل تشابه المضلع $أ ب ح د$ للمضلع $س ص ع ل$ $ك = ل$

فإن معامل تشابه المضلع $س ص ع ل$ للمضلع $أ ب ح د$ $ل = ك$

ملاحظة ٣

ليكن $ك$ معامل تشابه المضلع $م$ للمضلع $م$

إذا كان : $ك < ١$ فإن : المضلع $م$ هو تكبير للمضلع $م$ وتسمى $ك$ نسبة التكبير

إذا كان : $ك > ١$ فإن : المضلع $م$ هو تصغير للمضلع $م$ وتسمى $ك$ نسبة التصغير

إذا كان : $ك = ١$ فإن : المضلع $م$ يطابق المضلع $م$

وبصفة عامة : يمكن استخدام معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

ملاحظة ٤

لكي يتشابه مضلعان يجب أن يتحقق شرطا التشابه معاً ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر.

فمثلاً

- ليس جميع المستطيلات متشابهة فبرغم تساوى قياسات زواياها المتناظرة (كل = ٩٠°) إلا أن أطوال أضلاعها المتناظرة يمكن أن تكون غير متناسبة.
- كذلك ليس جميع المعينات متشابهة فبرغم أن أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة إلا أن زواياها المتناظرة يمكن أن تكون غير متساوية القياس.

ملاحظة ٥

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين ، بينما ليس من الضروري أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين.

ملاحظة ٦

المضلعان المشابهان لمضلع ثالث متشابهان.

أى أنه

إذا كان المضلع $م$ ~ المضلع $م$ ~ المضلع $م$ ،
فإن : المضلع $م$ ~ المضلع $م$ ~ المضلع $م$



الحل

∴ المضلع أ ب ح د ~ المضلع س ص ع ل ∴ $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ح}{ع} = \frac{د}{ل} =$ معامل التشابه.

$$\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ح}{ع} = \frac{د}{ل} = \frac{2,1}{1,4} = \frac{3}{2}$$

∴ معامل التشابه = $\frac{3}{2}$ (المطلوب أولاً)

$$أ = \frac{2,1 \times 3}{1,4} = 4,5 \text{ سم} ، ح = \frac{2,1 \times 1,8}{1,4} = 2,7 \text{ سم} ، ل = \frac{2 \times 1,4}{2,1} = 2 \text{ سم}$$

∴ المضلع أ ب ح د ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\angle (أ د س) = \angle (ب د ص) ، \angle (ب د ص) = \angle (د ح ص) ، \angle (د ح ص) = \angle (د ع ل) ، \angle (د ع ل) = \angle (د ل س)$

$$\angle (د س) = 70^\circ ، \angle (ب د) = 65^\circ ، \angle (د ع) = 135^\circ$$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي الداخلة = 360°

$$\angle (د ل) = \angle (د ع) = (135^\circ + 65^\circ + 70^\circ) - 360^\circ = 90^\circ$$

(المطلوب ثانياً)

ملاحظة

في المثال السابق نلاحظ أن :

∴ المضلع أ ب ح د ~ المضلع س ص ع ل

$$\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ح}{ع} = \frac{د}{ل} = \text{معامل التشابه}$$

$$= \frac{أ + ب + ح + د}{س + ص + ع + ل} \quad (\text{من خواص التناسب})$$

$$\frac{\text{محيط المضلع أ ب ح د}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{12,3}{8,2} = \frac{3}{2} = \text{معامل التشابه.}$$

أي أن

النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما.

مثال ٣

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتيمترات والآخر محيطه ٤٨ سم أوجد أطوال أضلاع المضلع الآخر.

الحل

بفرض أن المضلع أ ب ح د هـ ~ المضلع أ ب ح د هـ

$$\frac{\text{محيط المضلع أ ب ح د هـ}}{\text{محيط المضلع أ ب ح د هـ}} = \frac{أ}{أ} = \frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح} = \frac{د}{د} = \frac{هـ}{هـ} = 1$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{48}{22} = \frac{48}{10+8+6+5+3} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب ح د هـ}}{\text{محيط المضلع أ ب ح د هـ}}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{أ}{10} = \frac{ب}{8} = \frac{ح}{6} = \frac{د}{5} = \frac{هـ}{3} \therefore \frac{3}{2} = \frac{أ}{10} = \frac{ب}{8} = \frac{ح}{6} = \frac{د}{5} = \frac{هـ}{3}$$

$$\therefore أ = 15 \text{ سم} ، ب = 12 \text{ سم} ، ح = 9 \text{ سم} ، د = 7,5 \text{ سم} ، هـ = 4,5 \text{ سم}$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

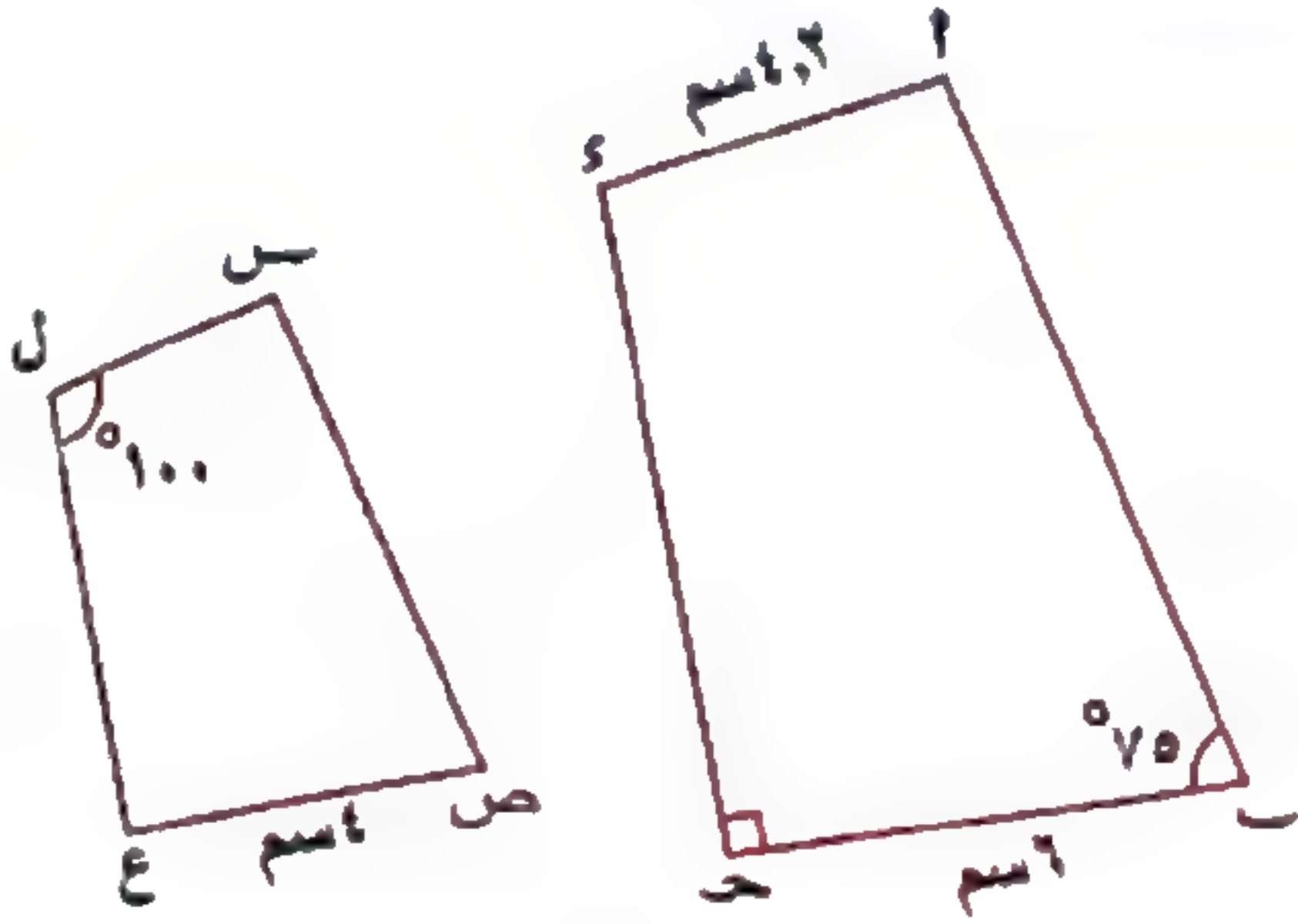
في الشكل المقابل :

المضلع أ ب ح د هـ ~ المضلع س ص ع ل

١ احسب : و (د س) ، طول س ل

٢ إذا كان محيط المضلع أ ب ح د هـ يساوي ٢٥,٨ سم

احسب محيط المضلع : س ص ع ل



مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٥ سم ، أ ح = ٨ سم
أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له إذا كان :

١ معامل التشابه = ٢,٤
٢ معامل التشابه = ٠,٧

الحل

∴ المثلث المطلوب تكبير للمثلث أ ب ح

$$\therefore \frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ح} = \text{معامل التشابه}$$

١ ∴ معامل التشابه لـ = ٢,٤ > ١

وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أ ب ح

$$\therefore \frac{س}{٤} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٨} = ٢,٤$$

$$\therefore س = ٩,٦ = ٢,٤ \times ٤ \text{ سم} ، ص = ١٢ = ٢,٤ \times ٥ \text{ سم} ، ع = ١٩,٢ = ٢,٤ \times ٨ \text{ سم}$$

(وهو المطلوب)

٢ ∴ معامل التشابه لـ = ٠,٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث أ ب ح وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أ ب ح :

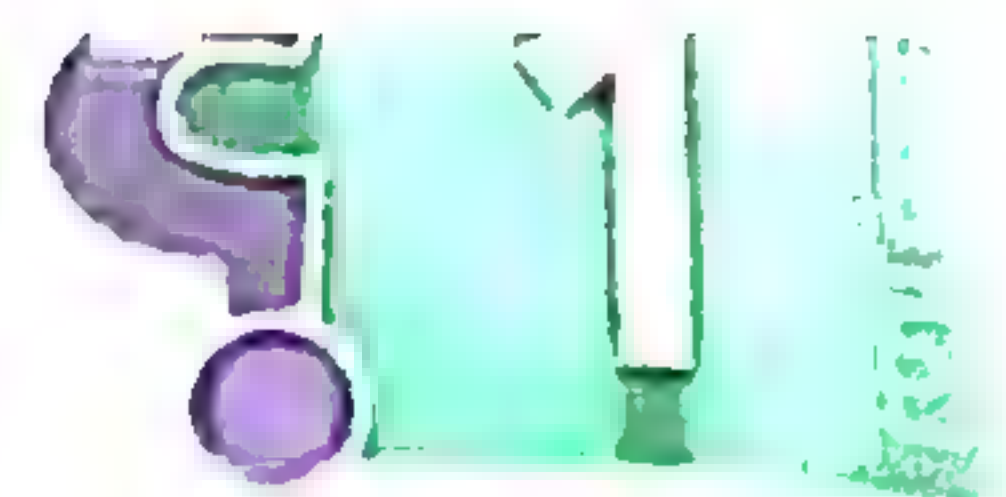
$$\therefore \frac{س}{٨} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤} = \text{معامل التشابه} = ٠,٧$$

$$\therefore س = ٥,٦ = ٠,٧ \times ٨ \text{ سم} ، ص = ٣,٥ = ٠,٧ \times ٥ \text{ سم} ، ع = ٢,٨ = ٠,٧ \times ٤ \text{ سم}$$

(وهو المطلوب)



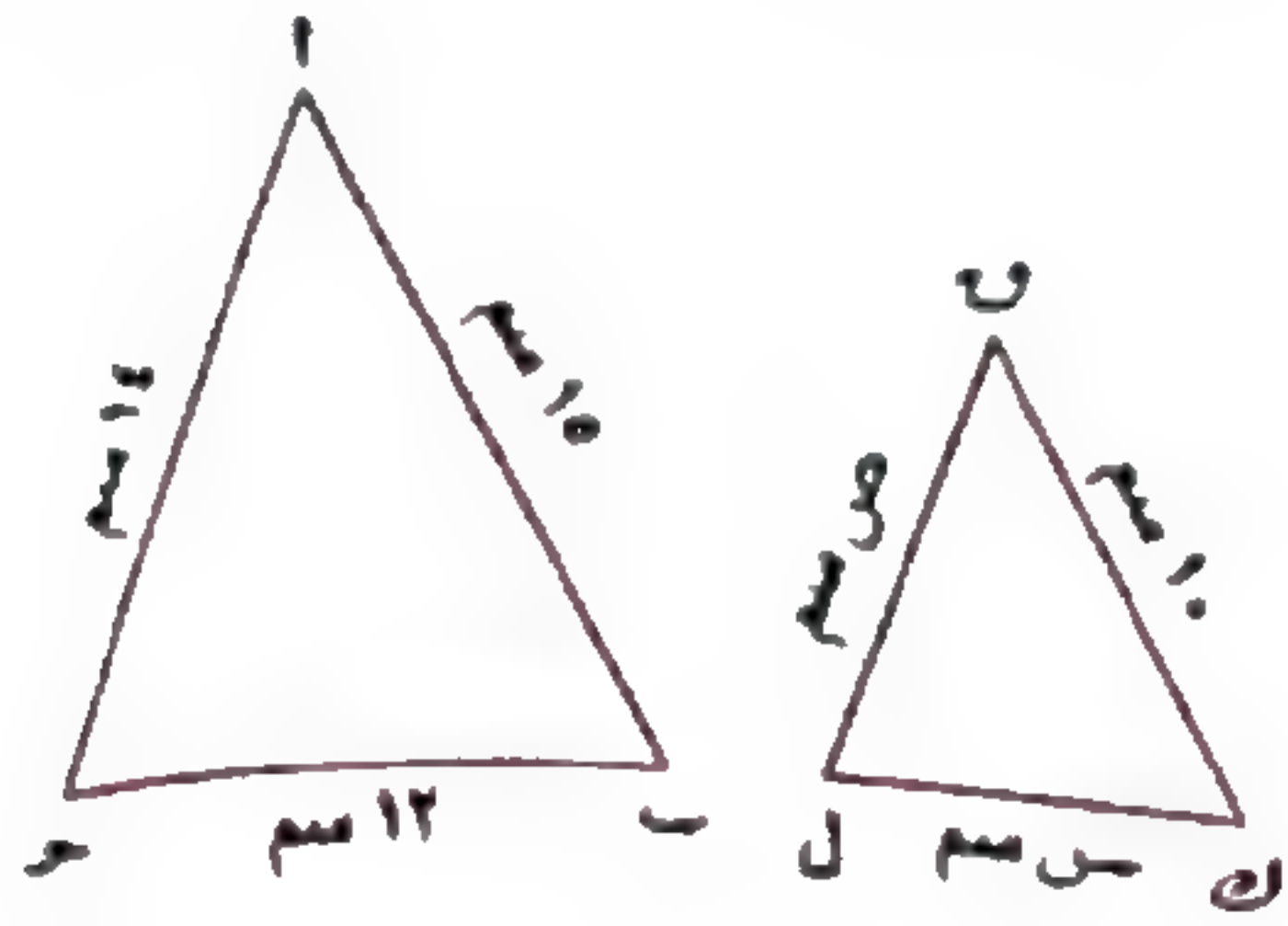
على تشابه المضلعات



من أسئلة الكتاب المدرسي

بين أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة ، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة ، وحدد معامل التشابه.

<p>(٢)</p>	<p>(١)</p>
<p>(٤)</p>	<p>(٣)</p>
<p>(٦)</p>	<p>(٥)</p>
<p>(٨)</p>	<p>(٧)</p>



« $\frac{2}{3}$ »

«8 سم ، $9\frac{1}{3}$ سم»

في الشكل المقابل :

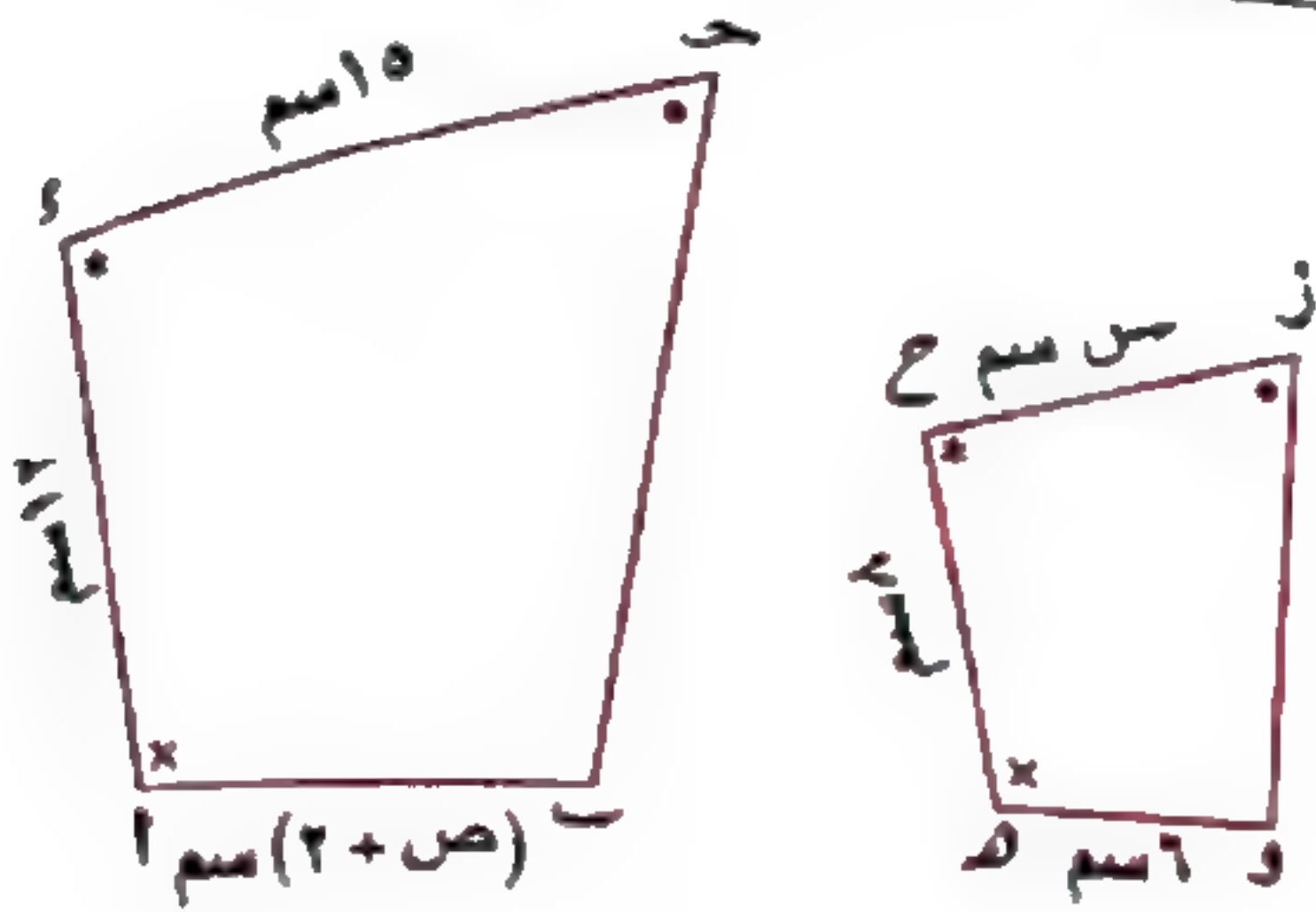
إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ و $DE = 8$ و $EF = 10$ و أطوال الأضلاع

مبينة على الشكل

فأوجد :

(١) معامل تشابه المثلث ABC للمثلث DEF

(٢) قيمة كل من BC ، AC



« $\frac{2}{3}$ »

«10 سم ، 7 سم»

في الشكل المقابل :

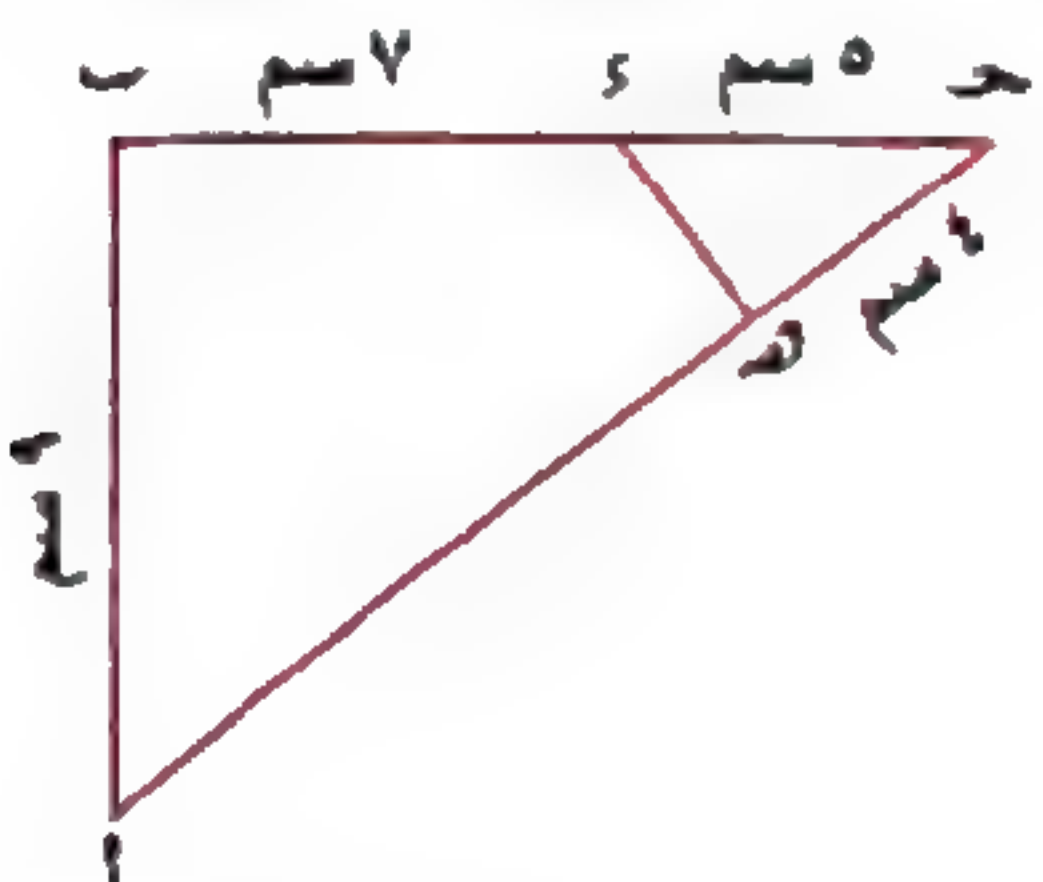
المضلع $ABCD \sim$ المضلع $EFGH$ و $BC = 20$ و $GH = 10$

أوجد :

(١) معامل تشابه المضلع $ABCD$

للمضلع $EFGH$

(٢) قيمة كل من AD ، CD



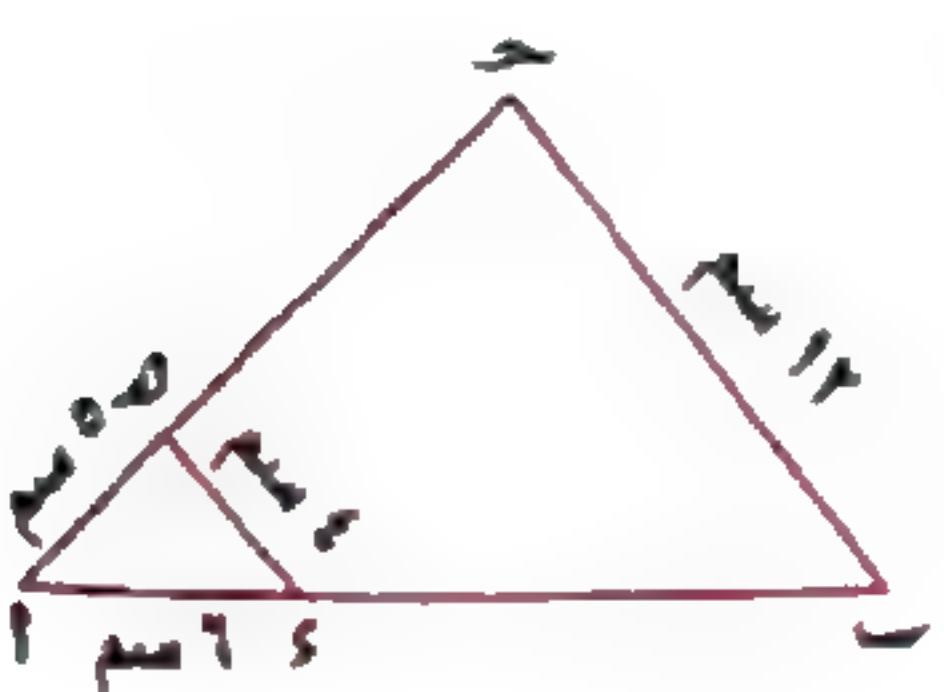
«3 سم ، 11 سم»

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ و $BC = 11$ و $EF = 3$

، وباستخدام الأطوال المبينة على الرسم.

أوجد : طول كل من DE ، DF



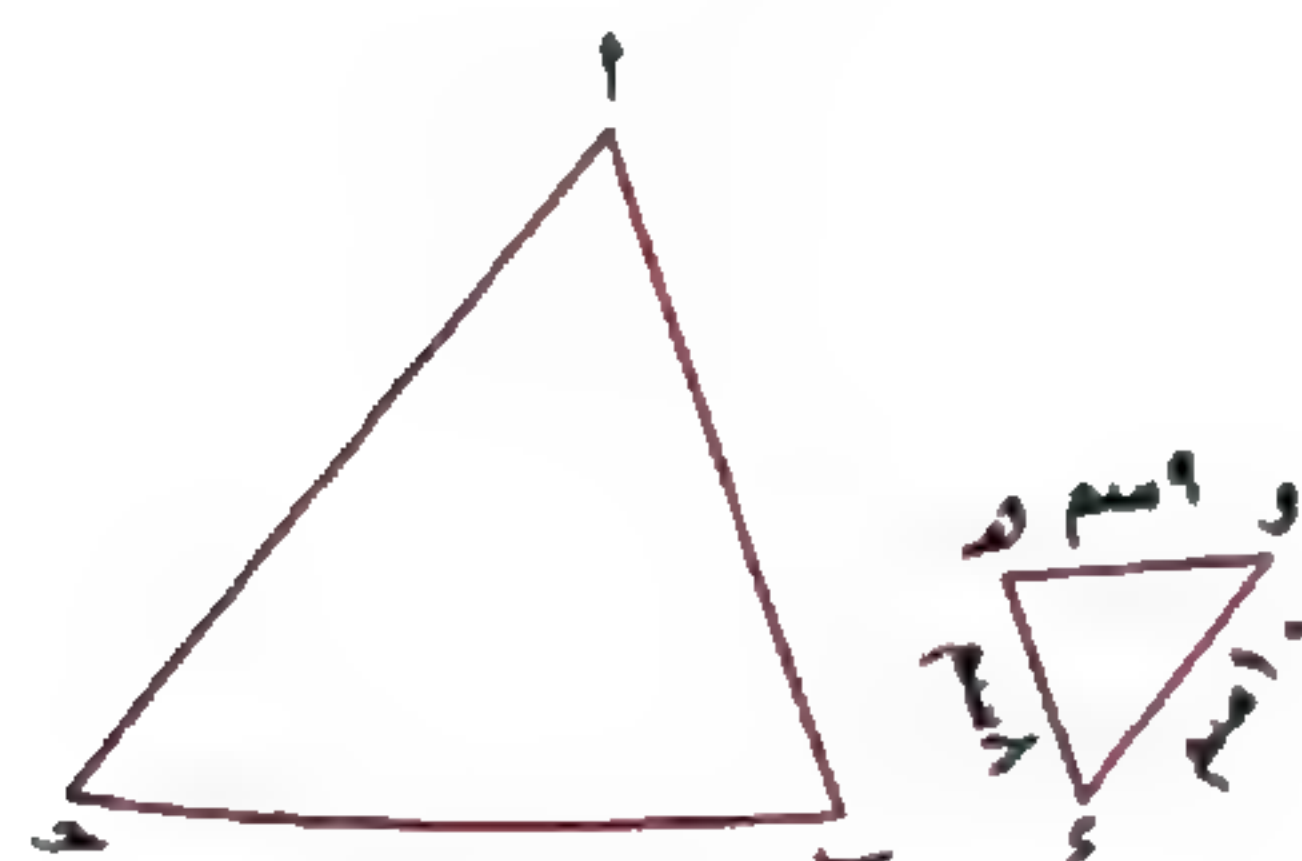
«12 سم ، 10 سم»

في الشكل المقابل :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، أثبت أن : $DE \parallel BC$

، ومن الأطوال المبينة على الشكل

أوجد : طول كل من DE ، DF



«24 سم ، 27 سم ، 30 سم»

في الشكل المقابل :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، و $DE = 8$ ، $EF = 9$ ، و $BC = 12$ ، و $AC = 15$

، و $DE = 10$ سم إذا كان محيط $\Delta ABC = 81$ سم

أوجد : أطوال أضلاع ΔABC

الدرس الأول

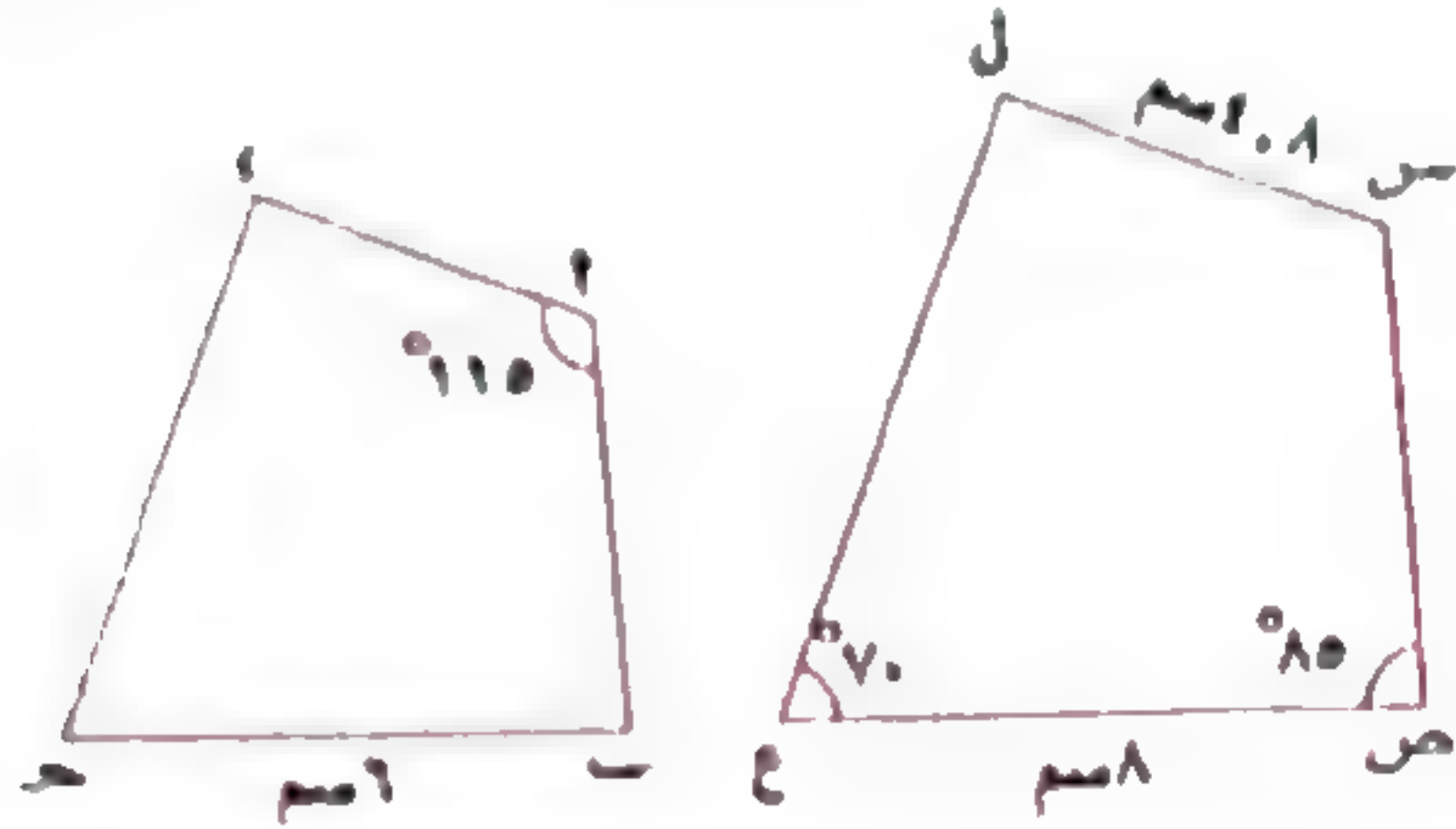
٧ مثلثان متشابهان محيط أحدهما ٧٤ سم وأطوال أضلاع الآخر ٤.٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم أوجد طول أكبر ضلع في المثلث الأول.

٢٢٠ سم.

٨ (أ) مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم. أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته.

٦٠٠ سم ، ٢٤٠٠ سم.

٩ (أ) في الشكل المقابل :



المضلع ا ب ج د ~ المضلع س ع ف ل

(١) احسب : ق (د س ل ع) ، طول ا ب

(٢) إذا كان محيط المضلع ا ب ج د = ١٩.٥ سم أوجد : محيط المضلع س ع ف ل

٩٠٠ ، ٢.٦ سم ، ٢٦ سم.

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع م_١ للمضلع م_٢ وكان . $ك > ١$ فإن المضلع م_١ هو للمضلع م_٢

(٢) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم فإن محيط الأكبر سم

(١) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (ج) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(٣) لكى يتشابه المضلعان م_١ ، م_٢ يكون كافياً الحصول على

(١) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(ج) (١) ، (ب) معاً.

(د) لا شىء مما سبق.

(٤) لكى يتشابه المربعان ا ب ج د ، س ع ف ل يكون كافياً الحصول على

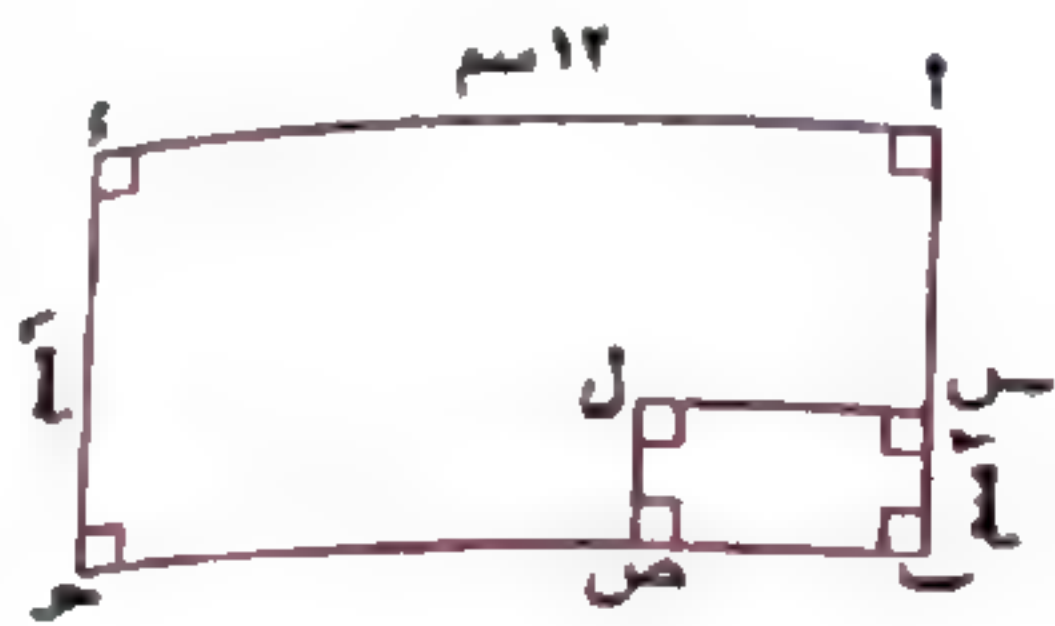
(١) ق (د ا) = ٦٠° ، ق (د س) = ١٢٠° فقط.

(ب) محيط المربع ا ب ج د = ٢ محيط المربع س ع ف ل فقط.

(ج) (١) ، (ب) معاً. (د) لا شىء مما سبق.

(٥) إذا كان ك_١ هو معامل تشابه المضلع م_١ إلى المضلع م_٢ ، ك_٢ هو معامل تشابه المضلع م_٢ إلى المضلع م_٣ فإن معامل تشابه المضلع م_١ إلى المضلع م_٣ هو

(١) ك_١ + ك_٢ (ب) ك_١ ك_٢ (ج) $\frac{ك_١}{ك_٢}$ (د) $\frac{ك_٢}{ك_١}$



(د) 11

(ج) 10

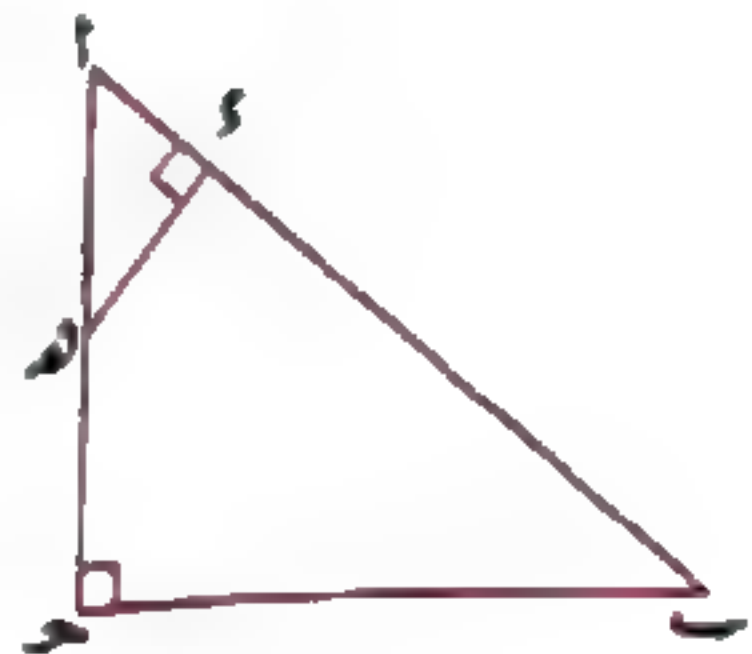
(ب) 8

(أ) 6

(٦) في الشكل المقابل :

المستطيل أ ب ح د ~ المستطيل س ص ل

فإن : طول ص ح = سم



(د) 60°

(ج) 30°

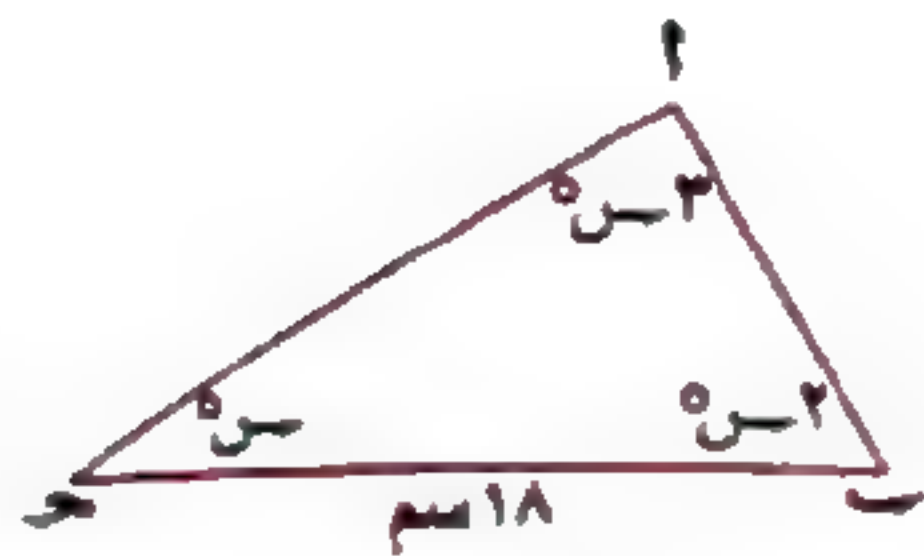
(ب) 40°

(أ) 50°

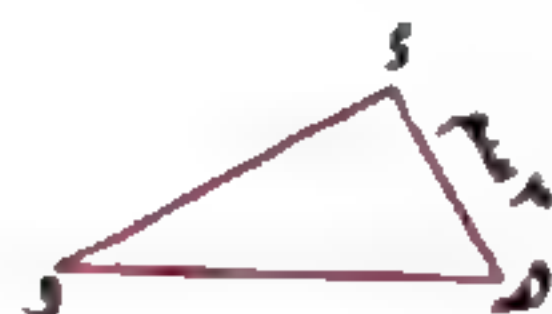
(٧) في الشكل المقابل :

$\Delta أ ب ح \sim \Delta د ه و$ فإذا كان : $و = (د ب) = 3 + س = 10^\circ$

، $و = (د ه) = س + 30^\circ$ فإن : $و = (أ د) = \dots\dots\dots$



(د) 8



(ج) 6

إذا كان : $\Delta أ ب ح \sim \Delta د ه و$

فإن : طول و ه = سم

(ب) 4

(أ) 3

(٨) في الشكل المقابل :

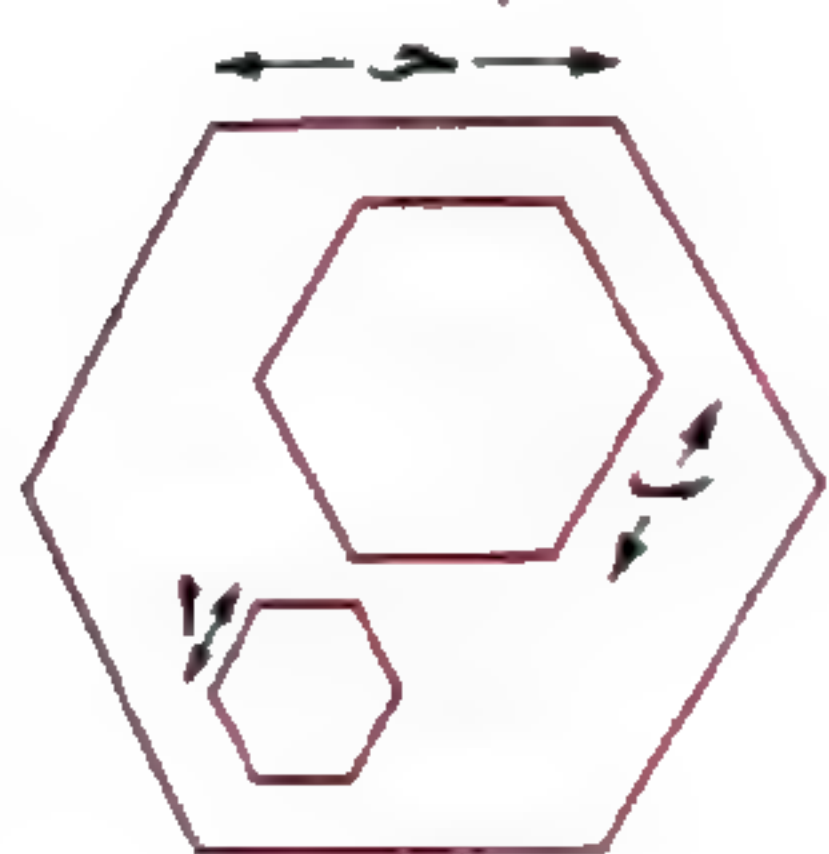
(٩) الشكل المقابل يوضح ثلاثة أشكال سداسية منتظمة

النسبة بين أطوال أضلاعهم كما يلي :

$أ : ب = ١ : ٢$ ، $ب : ح = ٢ : ٣$ ، $ح : د = ٣ : ٤$

فإذا كان طول ضلع المسدس الأكبر = ٣٢ سم

فإن محيط المسدس الأصغر = سم



(د) 48

(ج) 36

(ب) 6

(أ) 12

إذا كان المضلع أ ب ح د ~ المضلع س ص ع ل ، أكمل :

$$(٢) أ ب \times ع ل = س ص \times \dots\dots\dots$$

$$(٤) \frac{\text{محيط المضلع } \dots\dots\dots}{أ ب} = \frac{\text{محيط المضلع } \dots\dots\dots}{س ص}$$

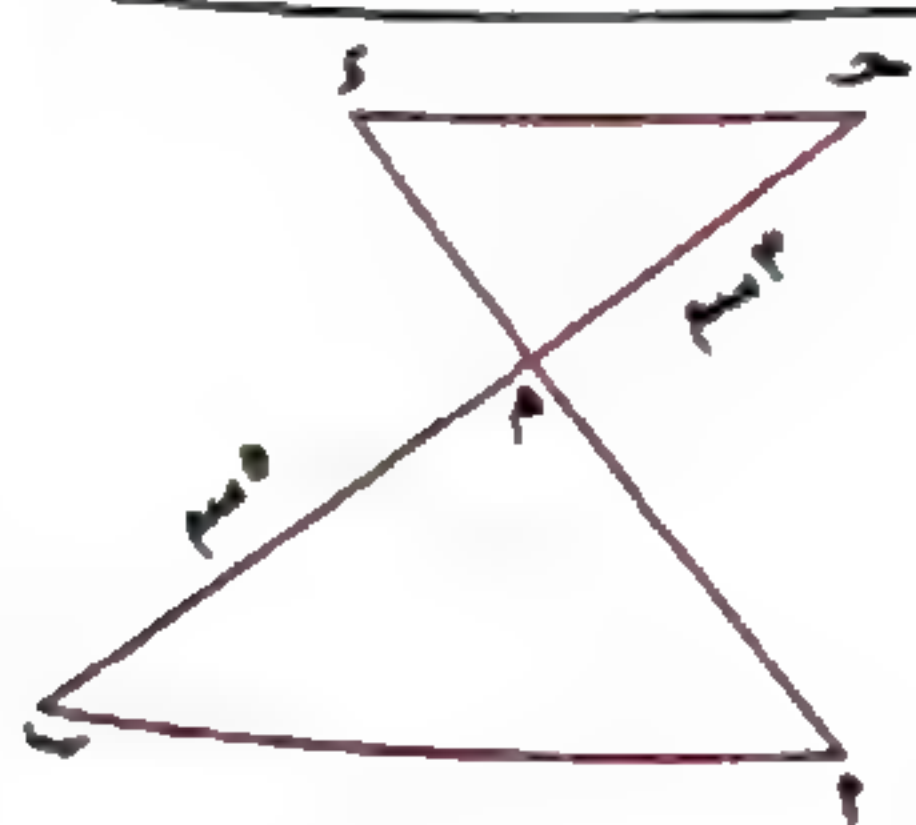
$$(١) \frac{أ ب}{ب ح} = \frac{\dots\dots\dots}{ص ع}$$

$$(٣) \frac{ب ح + ص ع}{ل س} = \frac{\dots\dots\dots}{ل س}$$

المضلع أ ب ح د ~ المضلع س ص ع ل فإذا كان : $أ ب = ٣٢$ سم ، $ب ح = ٤٠$ سم

، $س ص = ١ - م$ ، $ص ع = ٣ + م$ أوجد قيمة م العددية.

٣٠



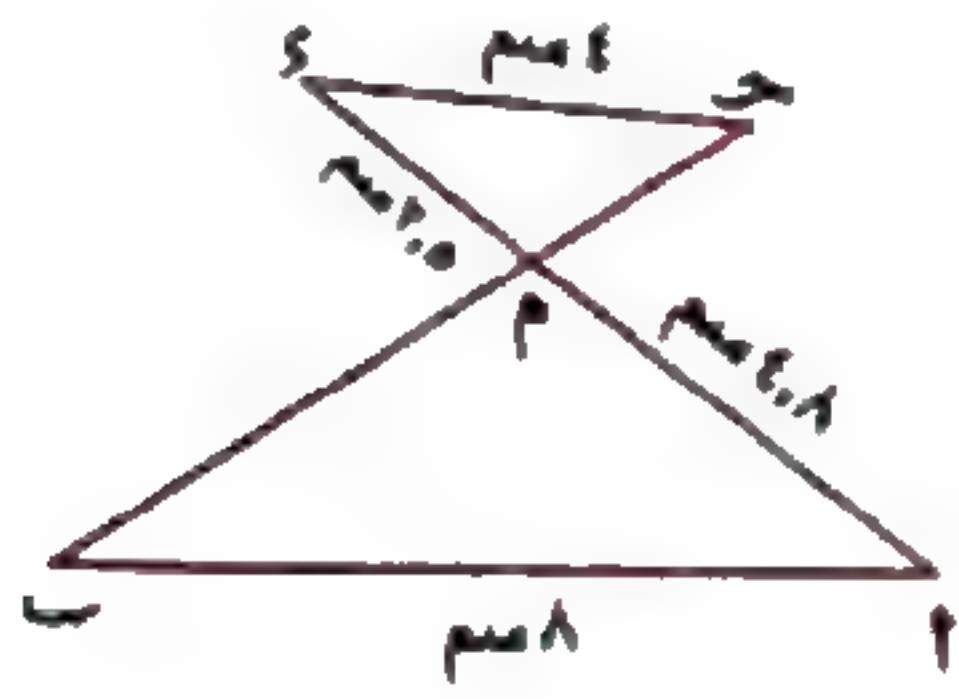
« ٣ ٢/٤ سم »

في الشكل المقابل :

$\Delta م أ ب \sim \Delta م د ه$ أثبت أن : $أ ب \parallel د ه$

وإذا كان : $م ح = ٣$ سم ، $م ب = ٥$ سم ، $د ه = ٦$ سم

فأوجد : طول م أ



«سم ٧,٤»

١٤ في الشكل المقابل :

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE$$

أثبت أن : الشكل ABC دوائر

وإذا كان : $AB = 8$ سم ، $AD = 4$ سم ، $AE = 6$ سم ، $DE = 4$ سم ، $BC = 10$ سم فأوجد : طول AC

١٥ مثلث ABC فيه : $AB = 5$ سم ، $BC = 6$ سم ، $AC = 9$ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٢,٥

(٢) معامل التشابه = ٠,٦

١٦ مستطيل بعده ١٠ سم ، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٣

(٢) معامل التشابه = ٠,٤

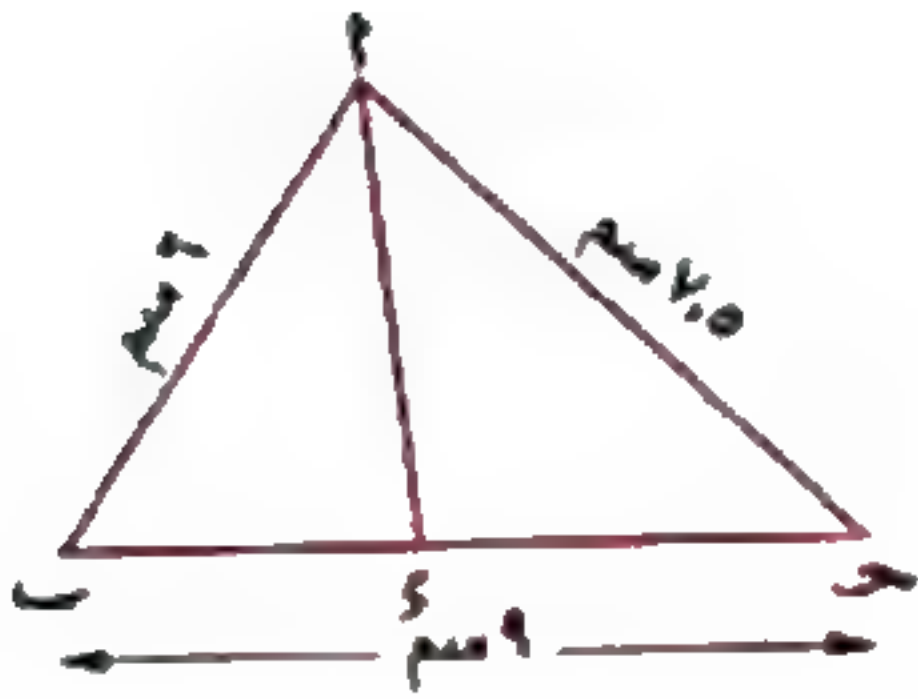
١٧ في الشكل المقابل :

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE$$

أثبت أن : AB مماسة للدائرة المارة بـ D و E

وأن : AB وسط متناسب بين AD و BE

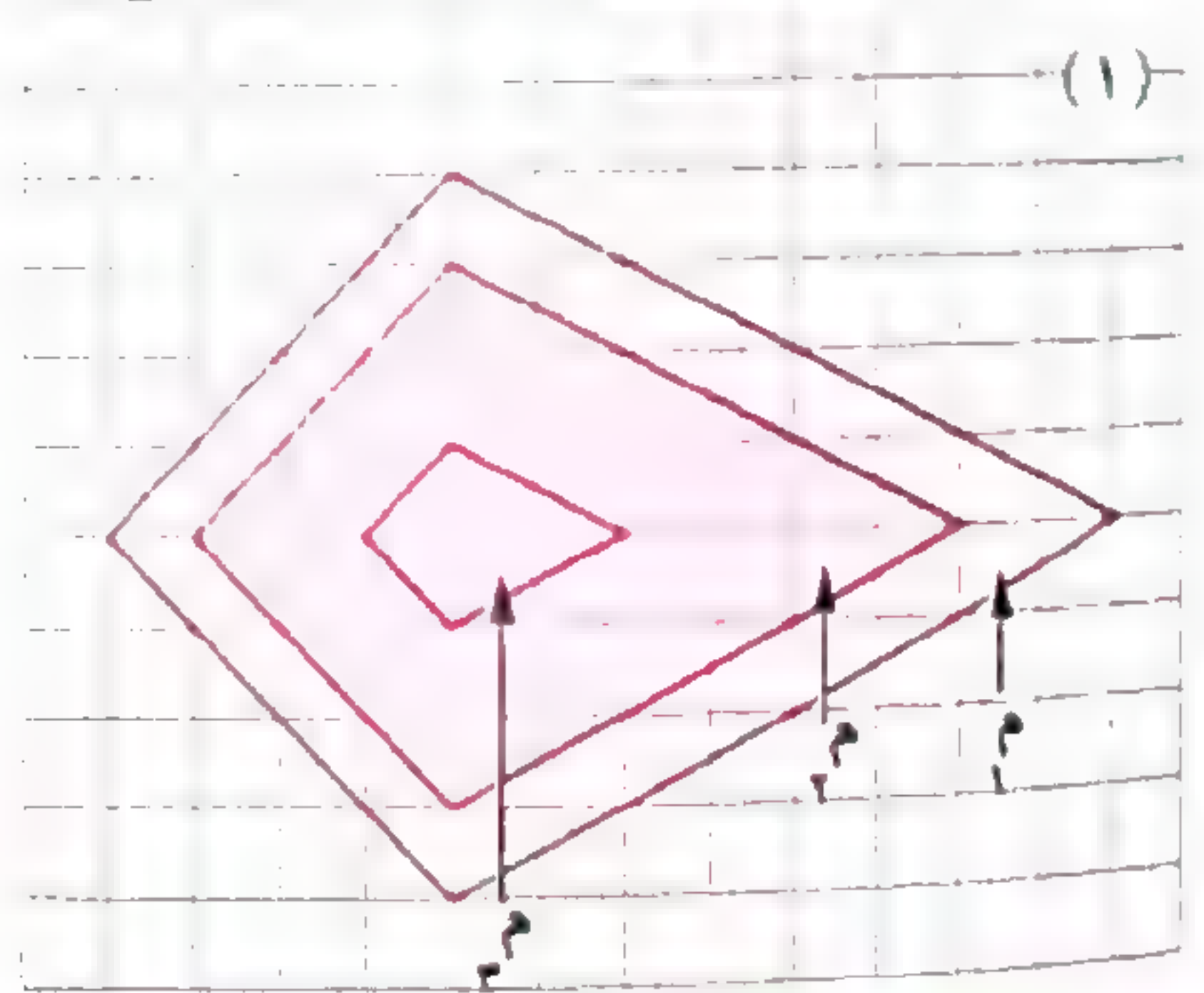
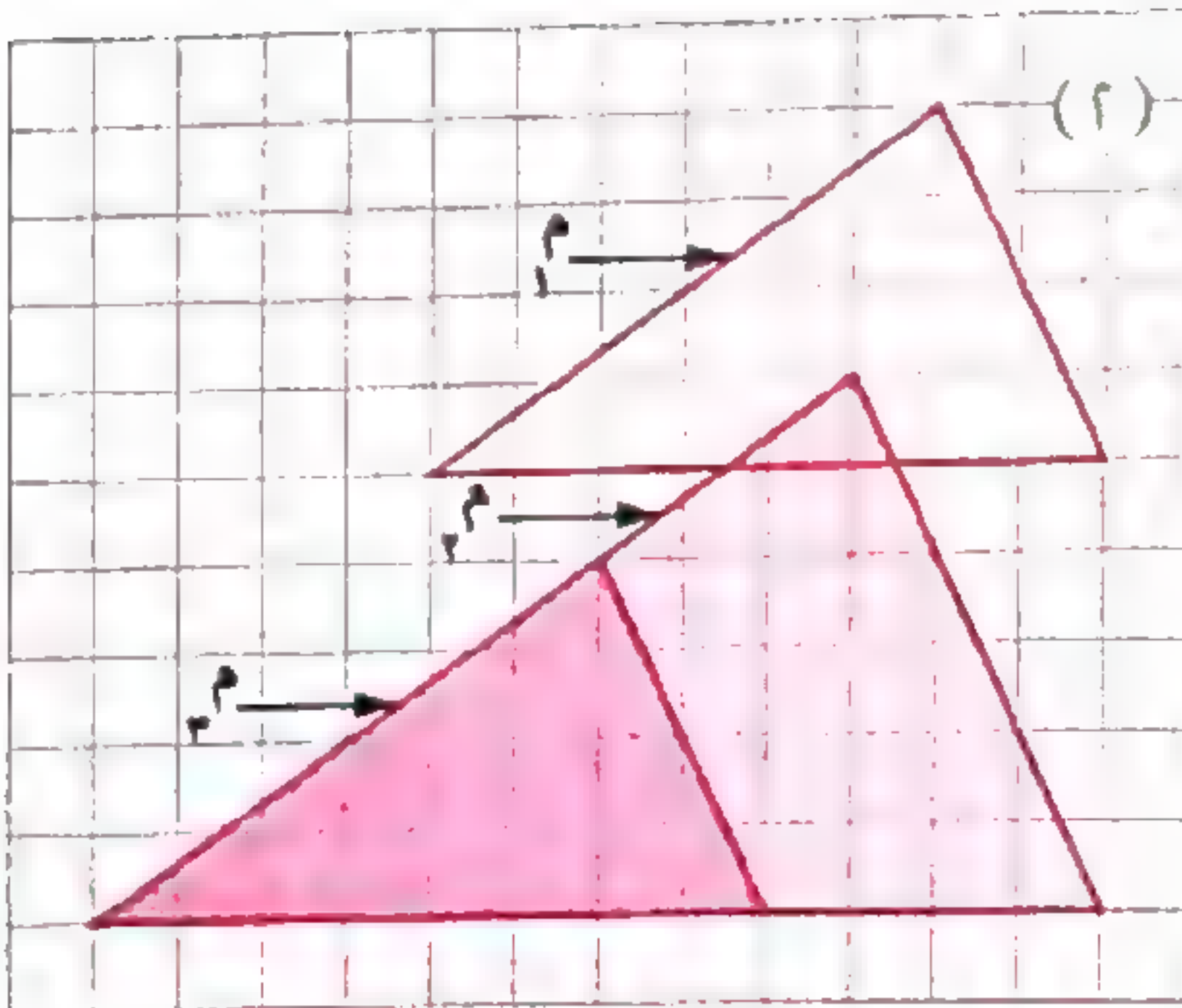
وإذا كان : $AB = 6$ سم ، $AD = 9$ سم ، $AE = 7,5$ سم فأوجد : طول كل من AD و BE



«سم ٥ ، سم ٥»

١٨ في كل من الشكلين التاليين : المضلع $M_1 \sim M_2 \sim M_3$

أوجد معامل تشابه كل من المضلع M_1 ، المضلع M_2 للمضلع M_3



تقيس مستويات عليا من التفكير

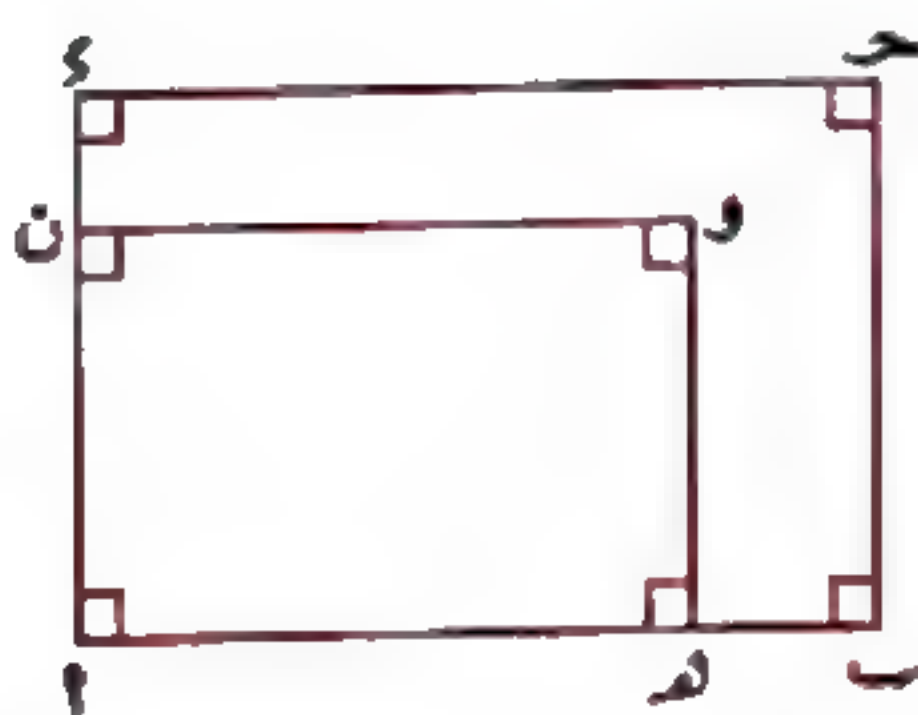
مستويات

١٩ في الشكل المقابل :

المستطيل ABCD ~ المستطيل A'B'C'D' ون أثبت أن :

محيط المستطيل ABCD : محيط المستطيل A'B'C'D' ون

$$= (AB - A'B') : (AD - A'D')$$





تشابه المثلثات

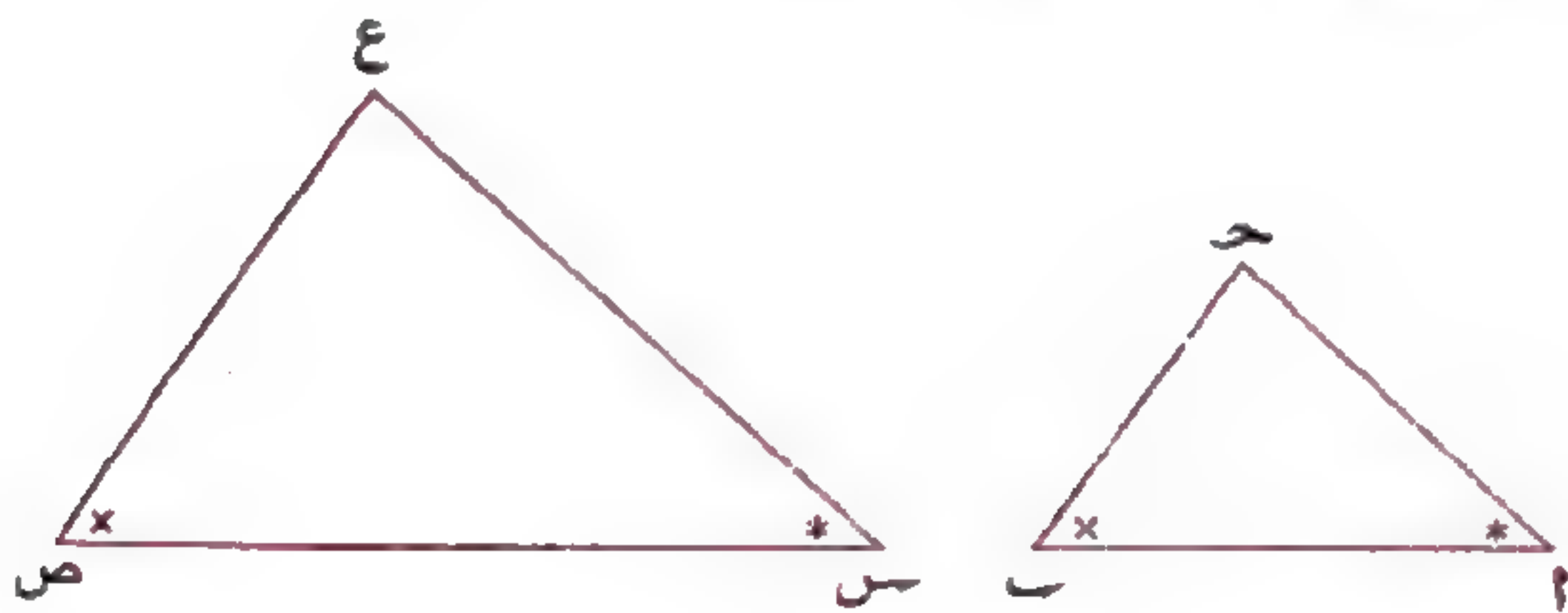
الدرس 2

حالات تشابه المثلثات

المسألة الأولى

مسألة

إذا طابقت زاويتان في مثلث نظيرتيهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.



أي أنه في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\angle B \equiv \angle B'$ ، $\angle C \equiv \angle C'$ ،

فإن : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

وينتج من ذلك أن : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

ملاحظات

- 1 يتشابه المثلثان القائمزا الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة في أحدهما قياس زاوية حادة في الآخر.
- 2 يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس زاوية في أحدهما قياس الزاوية المناظرة لها في الآخر.
- 3 المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.

مثال 1

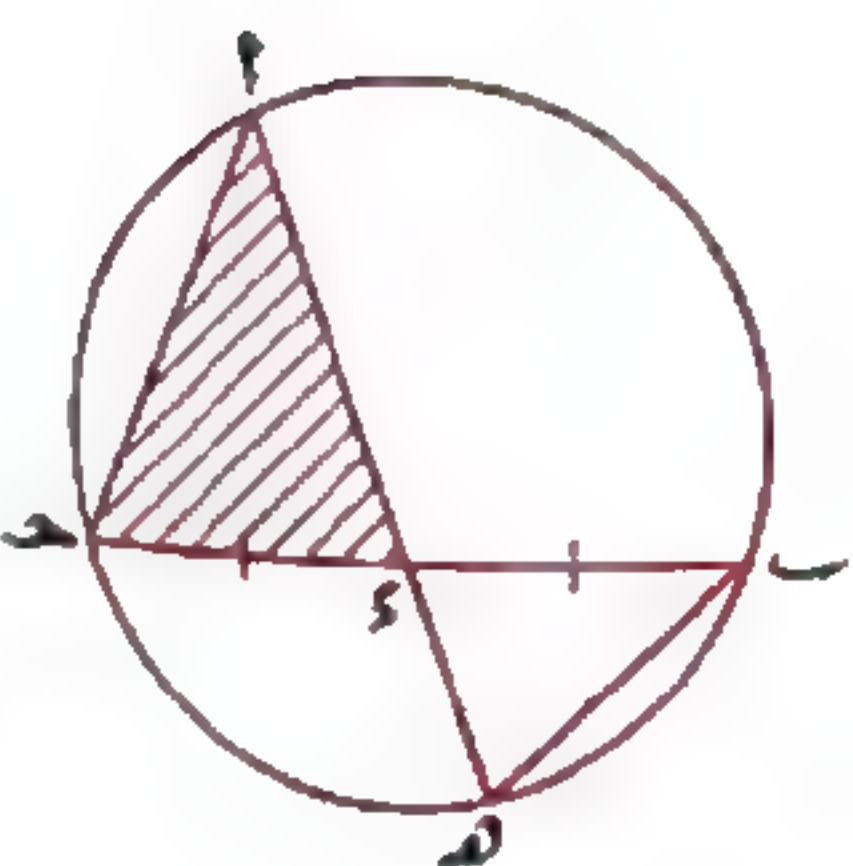
في الشكل المقابل :

أه ، ب ح وتران في دائرة متقاطعان في د حيث د منتصف ب ح

أثبت أن :

$$\boxed{1} \triangle ADE \sim \triangle BDE$$

$$\boxed{2} (DE)^2 = DE \times DE$$



$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ ، $AE = EC$ ، $AD = DB$ فيهما :

$AD = DB$ ، $AE = EC$ محيطيتان تحصران DE

$$\therefore AD = DB \Rightarrow AD = DB$$

(المطلوب أولاً)

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (بالتقابل بالرأس) $\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$\therefore AE \times AB = AD \times AC$ لكن $AE = EC$ (معطى)

$$\therefore EC \times AB = AD \times AC$$

(المطلوب ثانياً)

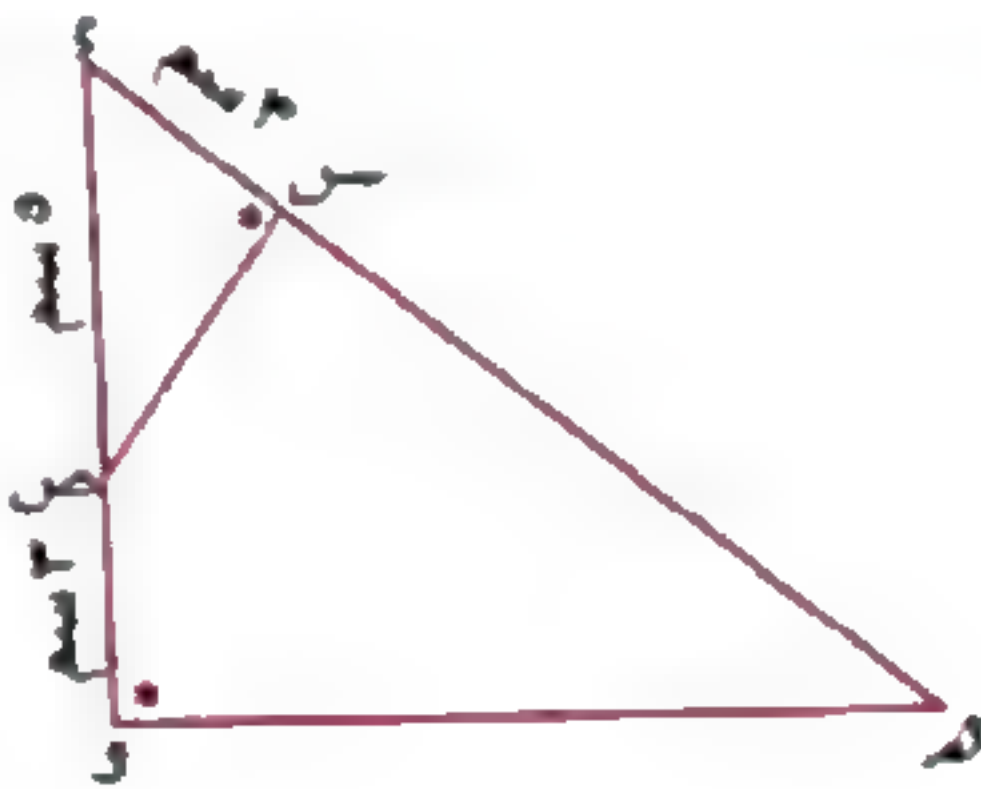
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$DE \parallel BC$ ، $AD = DB$ ، $AE = EC$ (مطلوب)

$AE = EC = 3$ سم ، $AD = DB = 5$ سم

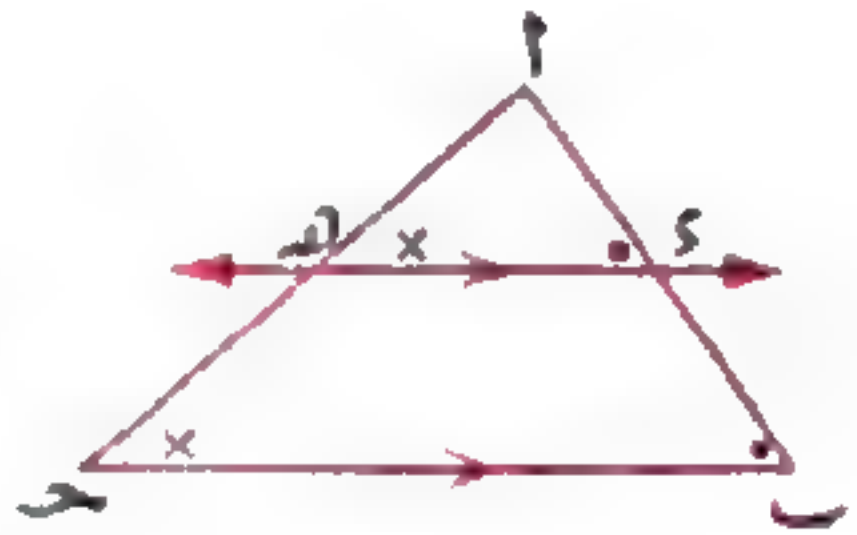
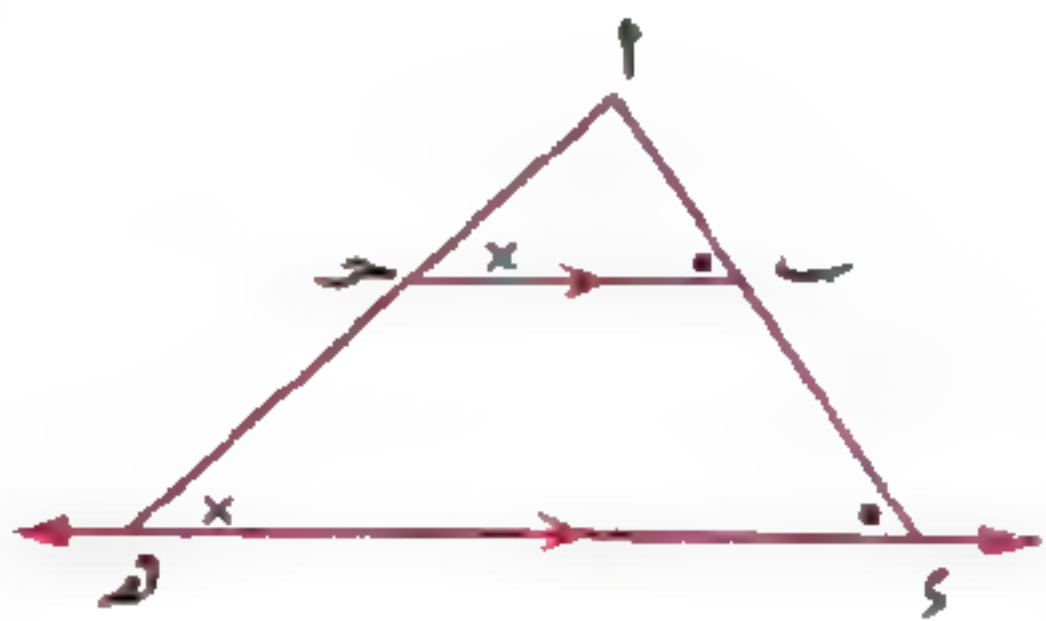
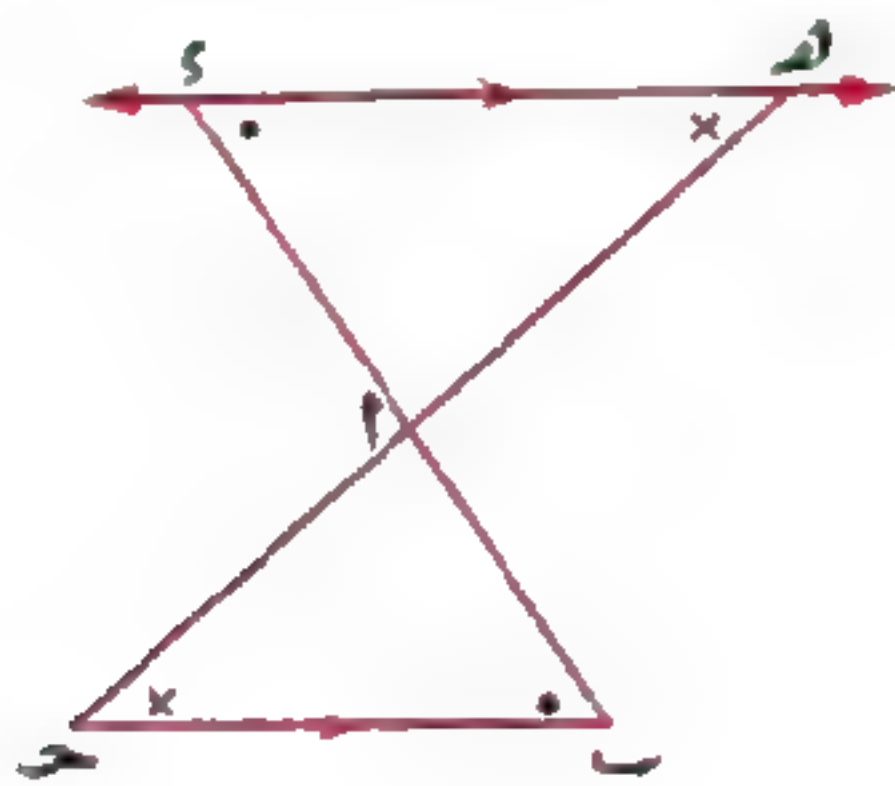
أوجد : طول DE



نتيجة ١

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

ففي كل من الأشكال الآتية :



إذا كان : $DE \parallel BC$ ويقطع AB ، AC في D ، E على الترتيب.

فإن : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

مثال ٢

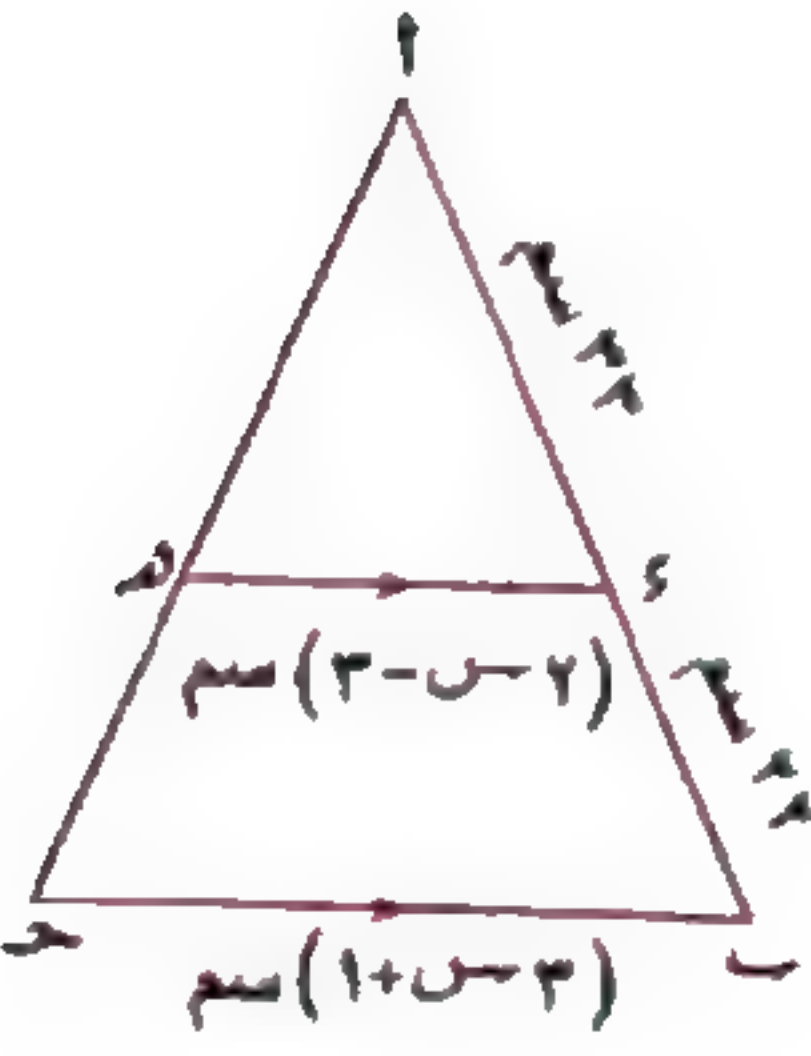
في الشكل المقابل :

$DE \parallel BC$ ، $AD = 2$ سم ، $DB = 3$ سم ، $AE = 2$ سم

$DE = (2 - 1) = 1$ سم ، $BC = (3 + 1) = 4$ سم

أثبت أن : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

أوجد : قيمة DE



الصل

(المطلوب أولاً)

$$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\therefore \frac{2-s}{1+s} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \frac{2-s}{1+s} = \frac{2}{5}$$

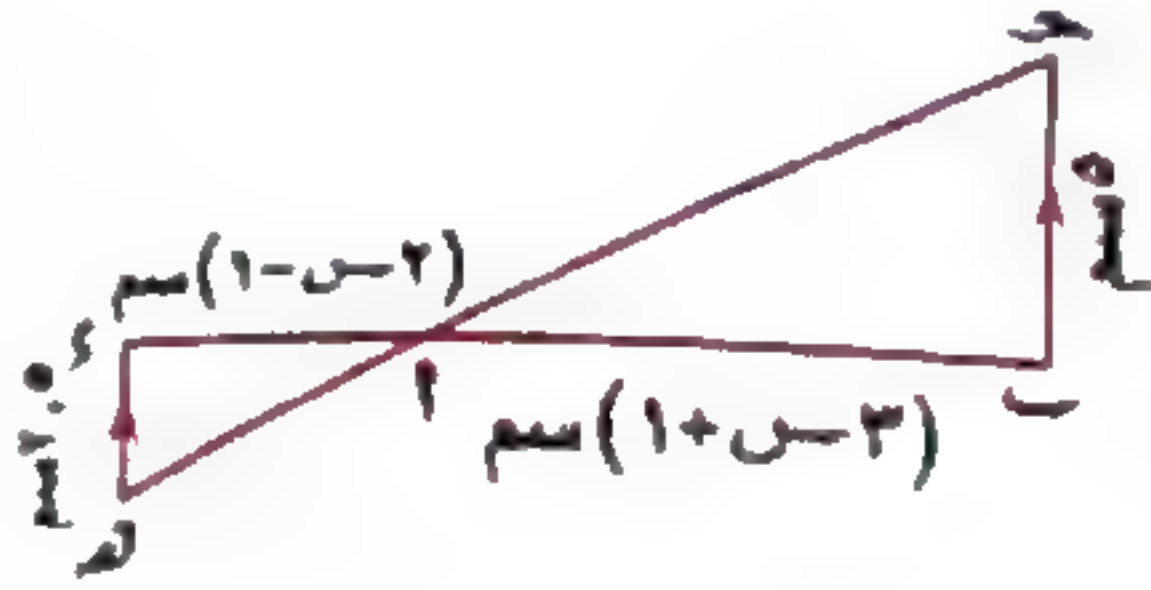
(المطلوب ثانياً)

$$\therefore s = 18$$

$$\therefore 9 + s = 2 + 10 = 15 - s$$

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



حجم \cap $\overline{BC} = \{A\}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $BC = 5$ سم ، $DE = 2,5$ سم

أوجد قيمة : s

1 أثبت أن : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

2

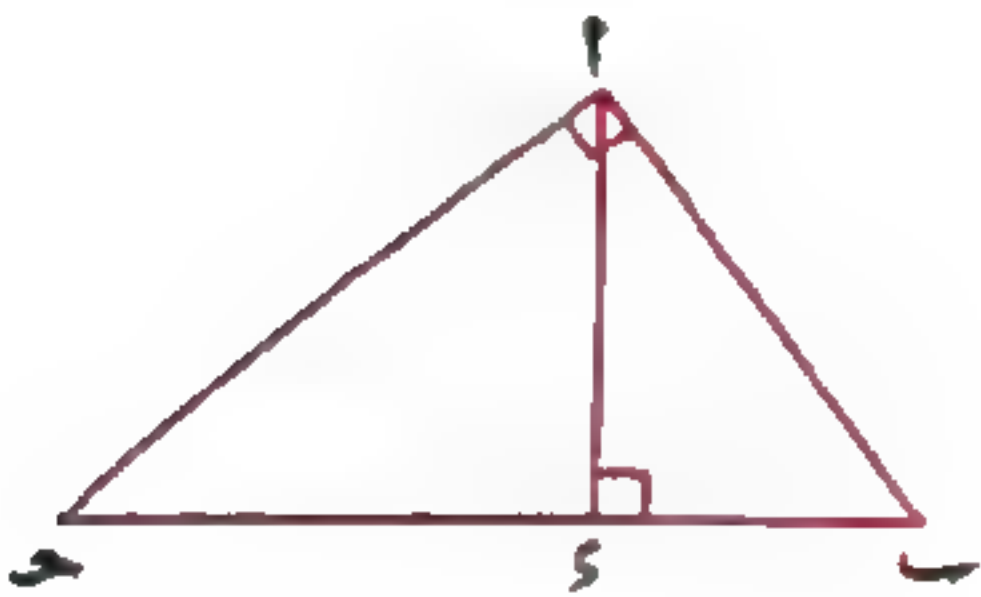
إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : ΔABC قائم الزاوية في A ، $AE \perp BC$

فإن : $\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta AEC$

ويترك للطالب إثبات ذلك باستخدام المسلمة السابقة وملاحظاتها.



ملاحظات على الشكل السابق

$$\text{ينتج أن : } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

أي أن : AB وسط متناسب بين AC ، AE

1 من تشابه ΔADE ، ΔABC

$$\therefore (AB)^2 = AC \times AE$$

$$\text{ينتج أن : } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

أي أن : AB وسط متناسب بين AC ، AE

2 من تشابه ΔADE ، ΔABC

$$\therefore (AB)^2 = AC \times AE$$

$$\text{ينتج أن : } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

أي أن : AB وسط متناسب بين AC ، AE

3 من تشابه ΔADE ، ΔABC

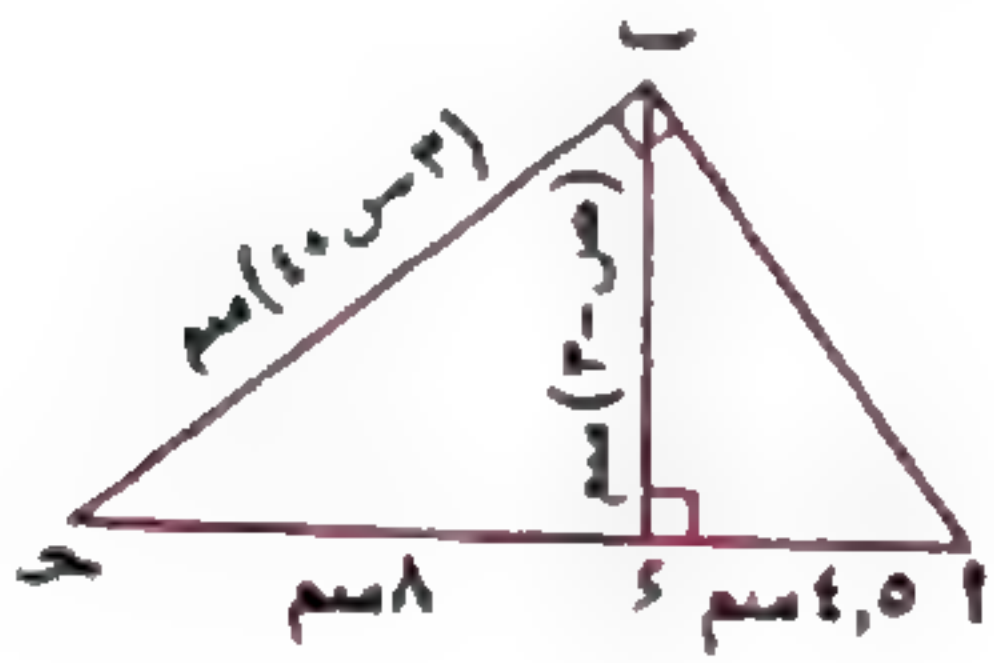
$$\therefore (AB)^2 = AC \times AE$$

$$\text{ينتج أن : } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

4 من تشابه ΔADE ، ΔABC

$$\therefore AB \times AB = AC \times AE$$

وتعد النتائج التي تم الحصول عليها من النتيجة السابقة برهاناً لنظرية إقليدس التي تم دراستها في المرحلة الإعدادية.



في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

فإذا كان : $AD = 3$ سم ، $BD = 4$ سم ، $DC = 5$ سم

فأوجد قيمتي : س ، ص

الحل

$\therefore \Delta ABC$ قائم الزاوية في ب ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ABC$

$\therefore (AB)^2 = AD \times AC$

$\therefore (10)^2 = 3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$

$\therefore 100 = 27$

$\therefore \Delta ABC$ قائم الزاوية في ب ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ABC$

$\therefore (AB)^2 = AD \times AC$

$\therefore 100 = 3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore 10 = 3 + 5$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore 100 = 3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$$

(وهو المطلوب)

$$\therefore 9 = 3$$

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية في أ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أكمل :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [1]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [2]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [3]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [4]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [5]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [6]$$

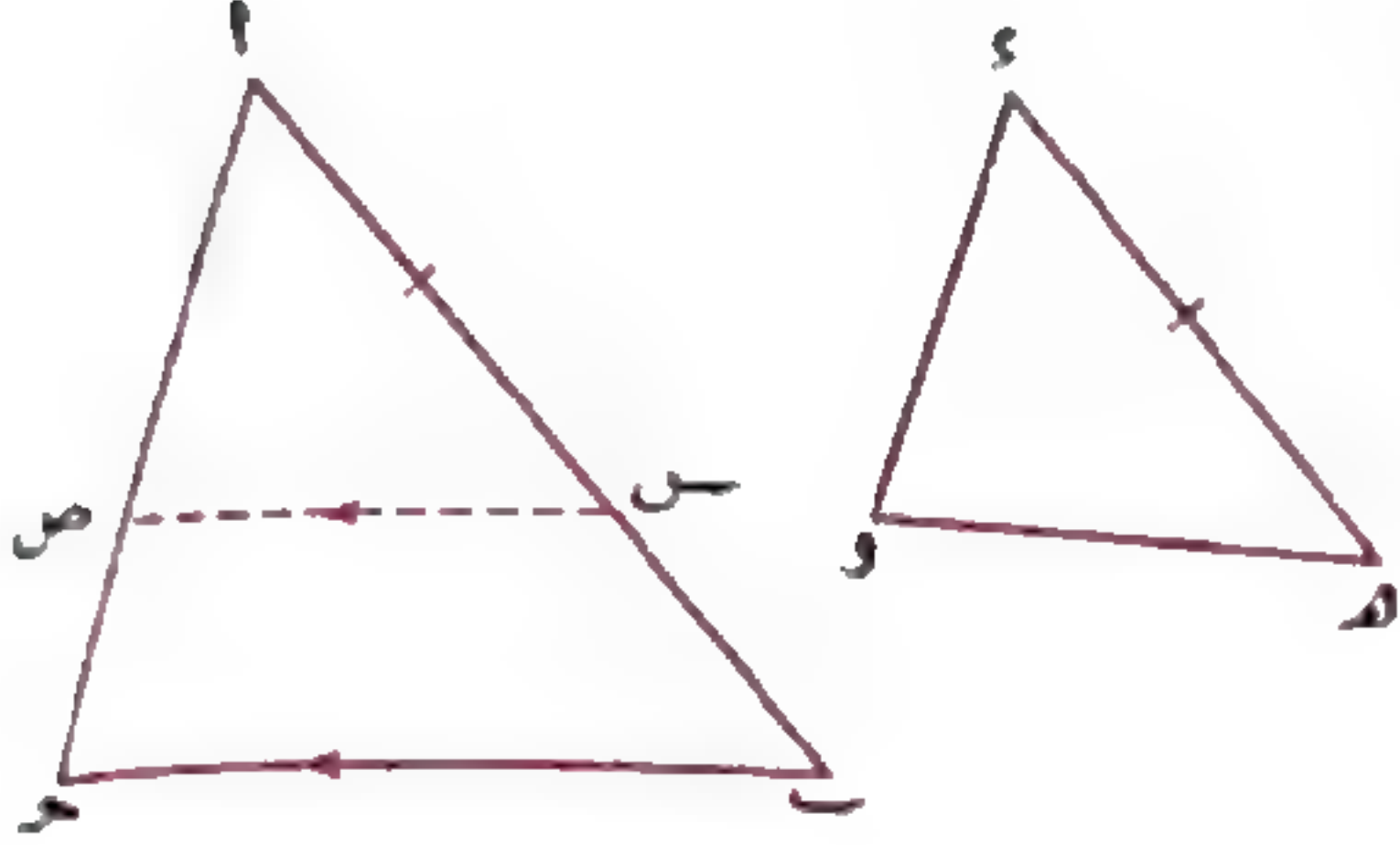
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [7]$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad [8]$$

الناتج الثانية

نظرية

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.



المثلثان ABC ، DEF وفيهما : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

إثبات أن : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

عَيِّنْ $S \in \overline{AB}$ حيث $AS = DE$

، ارسم $SS' \parallel BC$ وتقطع AC في S'

$\therefore SS' \parallel BC$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASS'$ (نتيجة «١»)

ويكون $\frac{AS}{AB} = \frac{SS'}{BC} = \frac{AS'}{AC}$ ، $\therefore AS = DE$ (عملاً)

(١) $\frac{AS}{AB} = \frac{SS'}{BC} = \frac{AS'}{AC}$

(٢) $\frac{AS}{AB} = \frac{SS'}{BC} = \frac{AS'}{AC}$ (معطيات)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $SS' = DE$ ، $AS = DE$

ويكون $\triangle ABC \equiv \triangle ASS'$ (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها في الآخر)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASS'$

، $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (برهاناً)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

(وهو المطلوب)

ملاحظة

لكتابة المثلثين المتشابهين بترتيب رؤوسهما المتناظرة من التناسب بين أطوال أضلاعهما نتبع الآتي :

بفرض أن رؤوس أحد المثلثين هي A, B, C وأن رؤوس المثلث الآخر هي D, E, F ، و

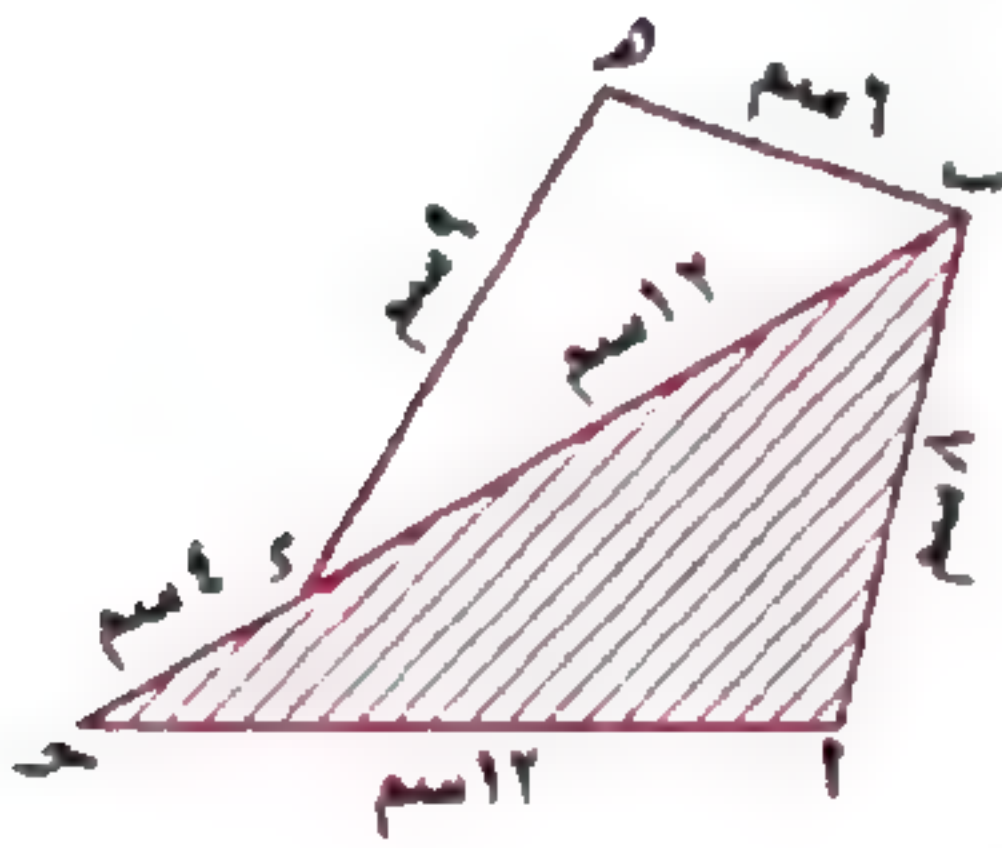
وأن لدينا التناسب الآتي : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

فنبحث عن رؤوس المثلث التي تقابل الأضلاع : AB, BC, AC بالترتيب فنجدها D, E, F ، و

ونبحث عن رؤوس المثلث التي تقابل الأضلاع : DE, EF, FD بالترتيب فنجدها A, B, C ، و

فيكون : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ، ... إلخ.

مثال ٤



من الشكل المقابل أثبت أن :
١) المثلثين المظللين متشابهان.

٢) DE ينصف DA

الحل

$$\because \frac{AD}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

(المطلوب أولاً)

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

وينتج من التشابه أن : $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ و $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\therefore DE$ ينصف DA

(المطلوب ثانياً)

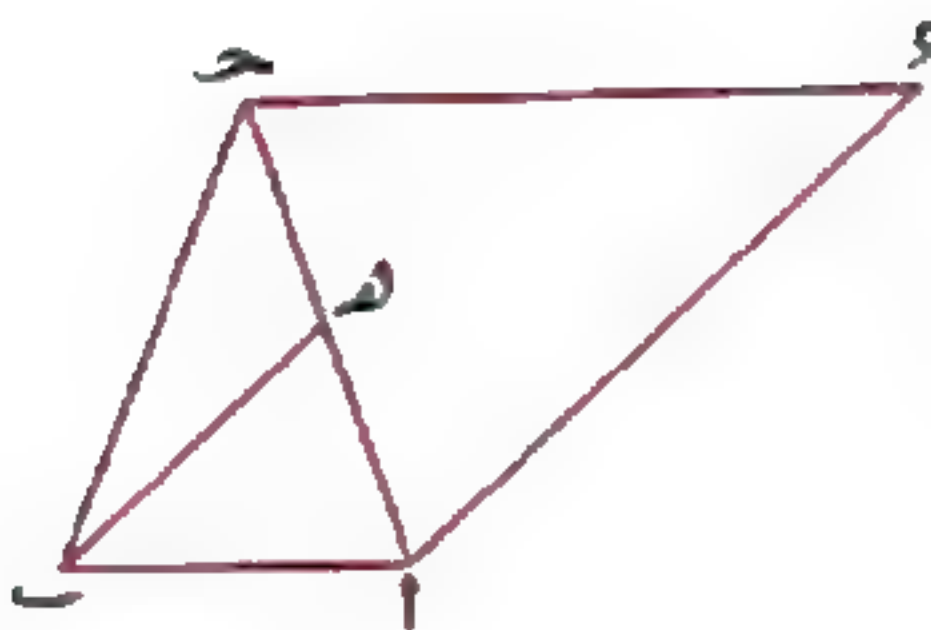
مثال ٥

ABCD شكل رباعي ، $AC \cap BD = E$ بحيث : $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$ ، $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad ٢$$

أثبت أن : ١) $AC \parallel BD$

الحل



$$(١) \quad \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} \therefore$$

$$(٢) \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \therefore$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

وينتج من التشابه أن : $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ وهما متبادلتان

(المطلوب أولاً)

$$\therefore AC \parallel BD$$

(المطلوب ثانياً)

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \text{ و } \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} \text{ وهما متبادلتان.} \therefore AC \parallel BD$$

حاول بنفسك

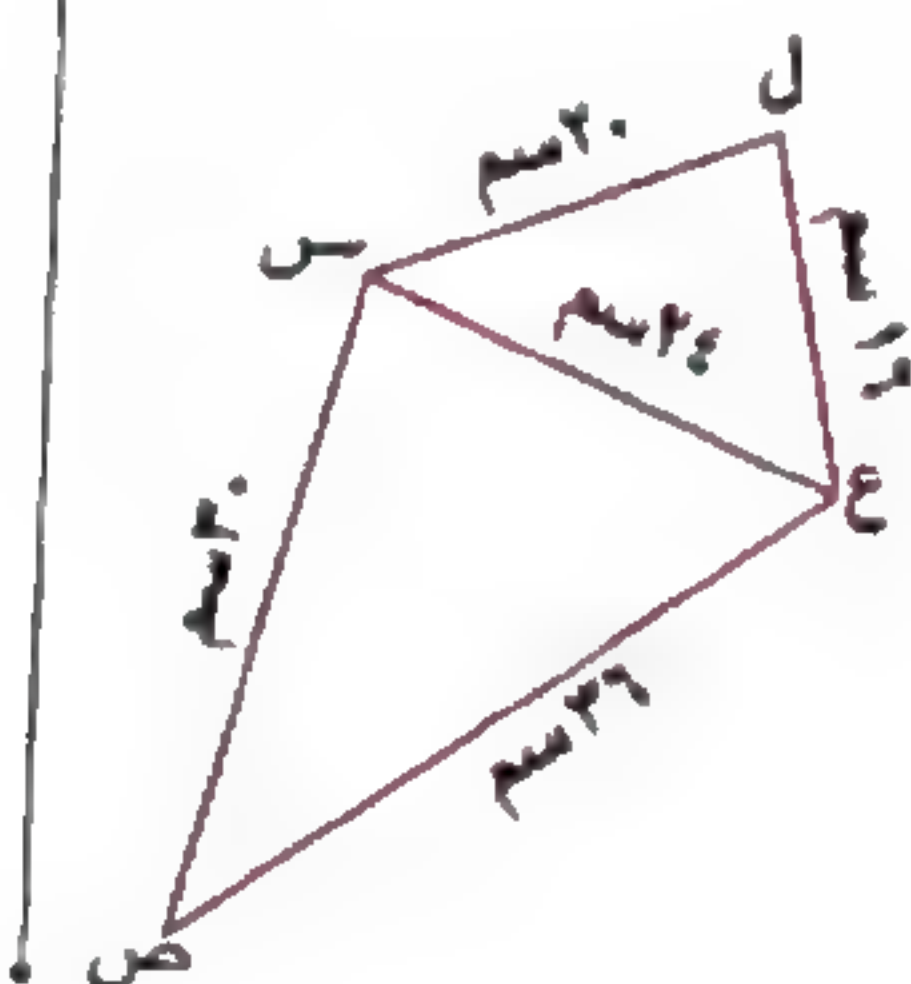
في الشكل المقابل :

س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ص = ٢٠ سم ، ص ع = ٢٦ سم ، ع ل = ١٦ سم

ل س = ٢٠ سم ، س ع = ٢٤ سم

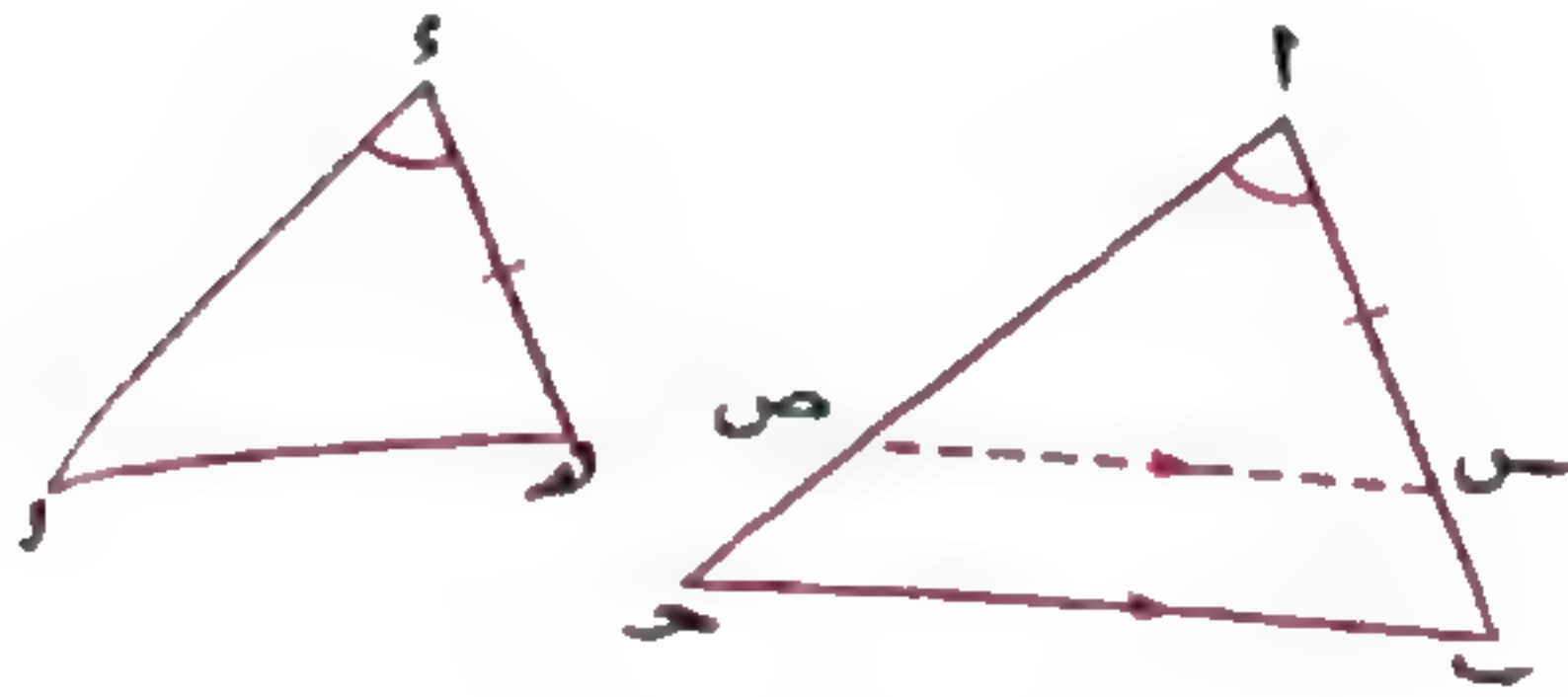
أثبت أن : $\triangle SVE \sim \triangle SEL$



الحالة الثالثة

نظرية

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \text{ د } \Delta \equiv \text{ هـ } \Delta$$

إثبات أن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

خذ $S \in \overline{AB}$ حيث $AS = DE$

، وارسم $SS' \parallel \overline{BC}$ ويقطع \overline{AC} في S'

$\therefore SS' \parallel \overline{BC} \therefore \Delta ABC \sim \Delta AS'S$ (نتيجة)

$$\text{ويكون } \frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AS'}$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DE} \text{ (معطى) ، } AS = DE \text{ (عملاً)}$$

$$\therefore \frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AS'} \text{ ويكون } AS = DE$$

$\therefore \Delta AS'S \equiv \Delta DEF$ (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون $\Delta AS'S \sim \Delta DEF$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(٢)

(وهو المطلوب)

مثال ٦

ABC مثلث فيه : $AB = 6$ سم ، $BC = 9$ سم ، D منتصف AB ، $E \in \overline{BC}$ بحيث $BE = 2$ سم أثبت أن :

١ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ، $AD = 3$ سم ، $AE = 4$ سم

٢ الشكل ADE رباعي دائري.

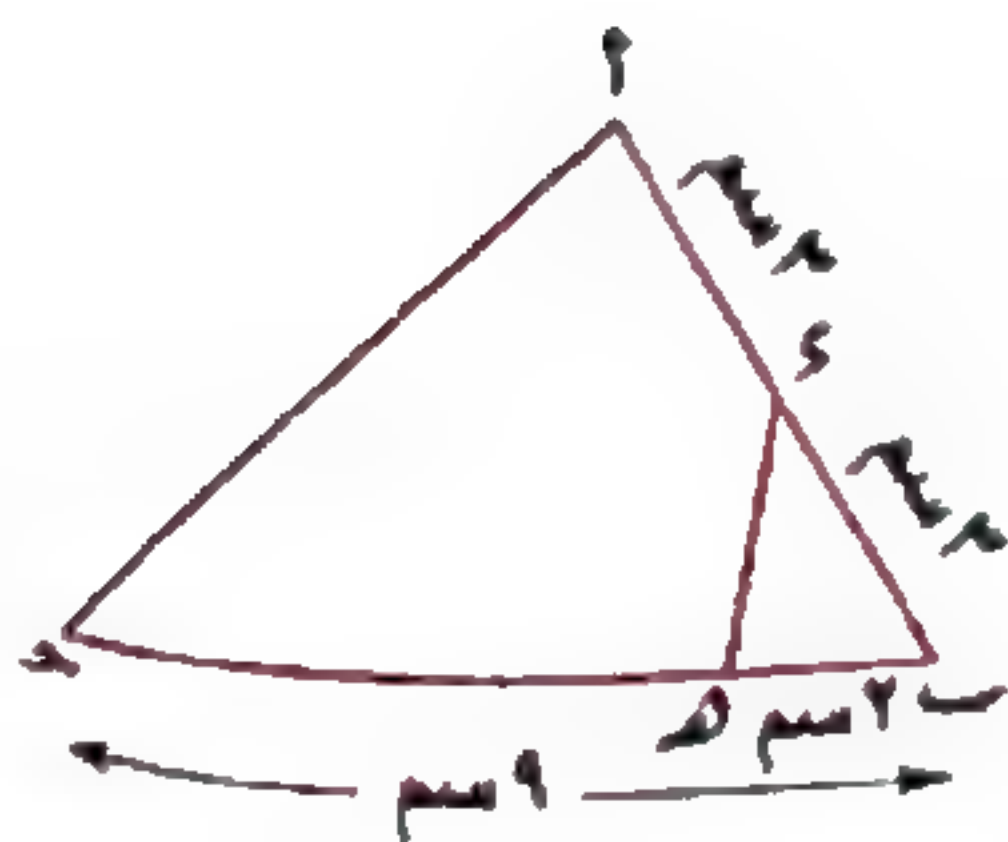
الحل

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ ، $AD = 3$ سم ، $AE = 4$ سم

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ ، } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{4}{9}$$

، $\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ مشتركة.



$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$

(المطلوب أولاً)

وبينهم أن :
 $\angle (د ه ع) = \angle (د ا ب) = 90^\circ$ ، $\therefore د ه ع$ خارجة عن الشكل الرباعي ا ه ع د ح
 \therefore الشكل ا ه ع د ح رباعي دائري.

(المطلوب ثانياً)

مثال ٧

أ ب ح د شكل رباعي فيه : $\angle (د ب) = \angle (د ا ح) = 90^\circ$ ، $د \in \overline{ب ح}$ بحيث $\frac{د ح}{ا ح} = \frac{ع د}{ا د}$
 أثبت أن :
 ١ - $\triangle ا ب د \sim \triangle ا ح د$ ، ا ح د متشابهان.
 ٢ - $\angle (د ا ح) = 90^\circ$

الحل .



(المطلوب أولاً)

$$\frac{د ح}{ا ح} = \frac{ع د}{ا د}$$

$$\frac{ا د}{ا ح} = \frac{ع د}{د ح}$$

$$\therefore \angle (د ب) = \angle (د ا ح)$$

$$\therefore \triangle ا ب د \sim \triangle ا ح د$$

وبينهم أن :

$$\angle (د ا ح) = \angle (د ا ب)$$

، $\therefore د ا ح$ خارجة عن الشكل الرباعي ا ه ع د ح

\therefore الشكل ا ه ع د ح رباعي دائري.

$\therefore \angle (د ا ح) = \angle (د ا ب)$ (مرسومتان على ا ه وفي جهة واحدة منها)

(المطلوب ثانياً)

$$\therefore \angle (د ا ح) = 90^\circ$$

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



إذا كان : $ا د = ٣$ سم ، $د ب = ٤$ سم ، $ا ع = ٥$ سم

، $ا ب = ٤$ سم ، $د ح = ٢$ سم ، $ب ح = ١٢$ سم

أثبت أن : $\triangle ا د ح \sim \triangle ا ب ح$

أوجد : طول د ح

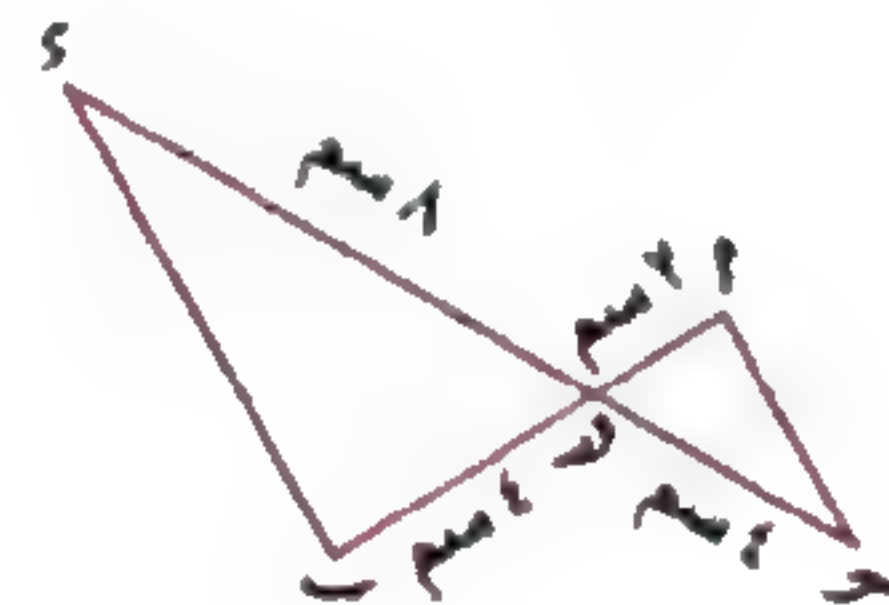
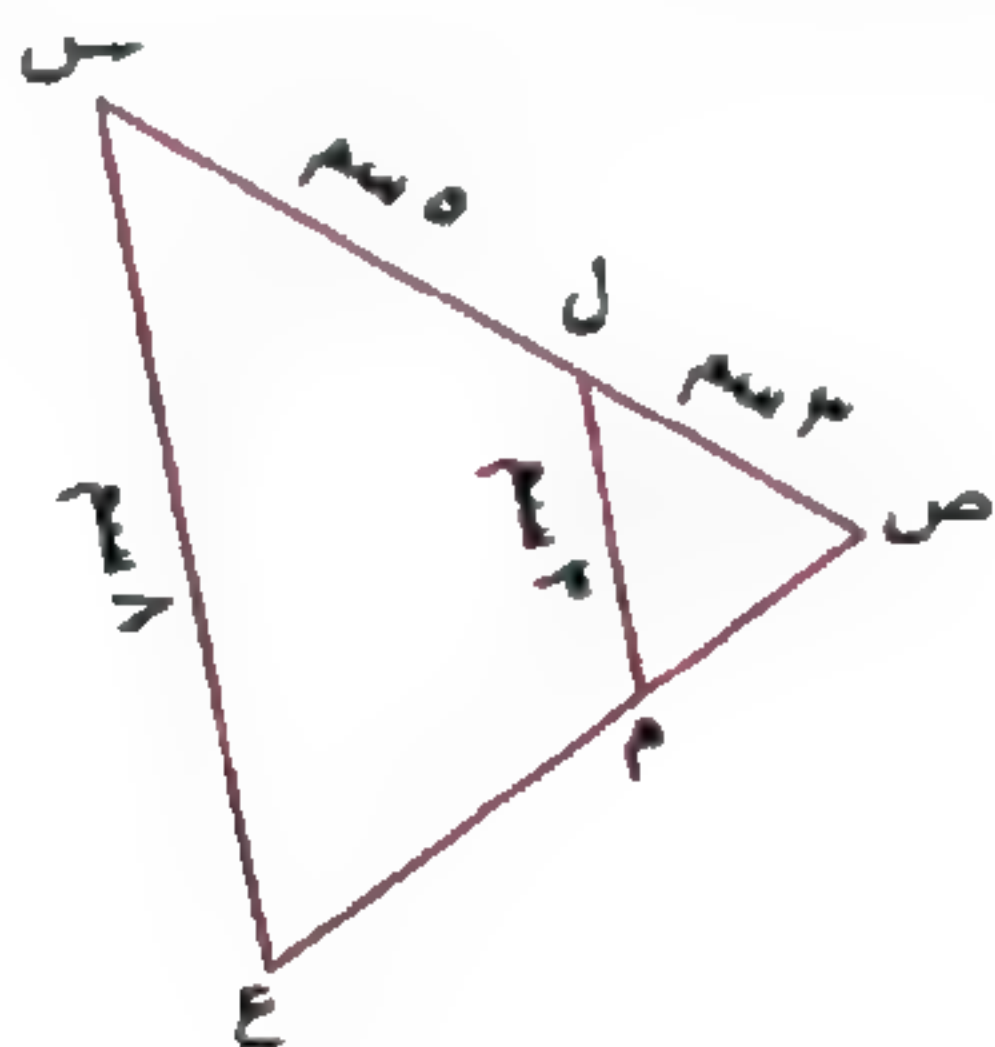
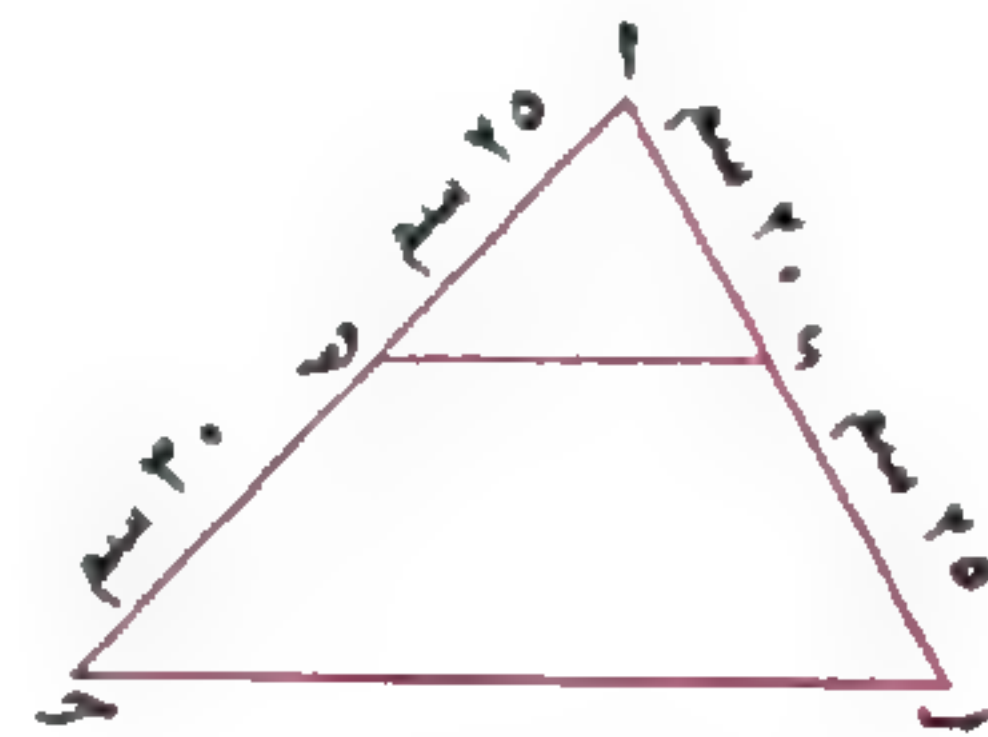
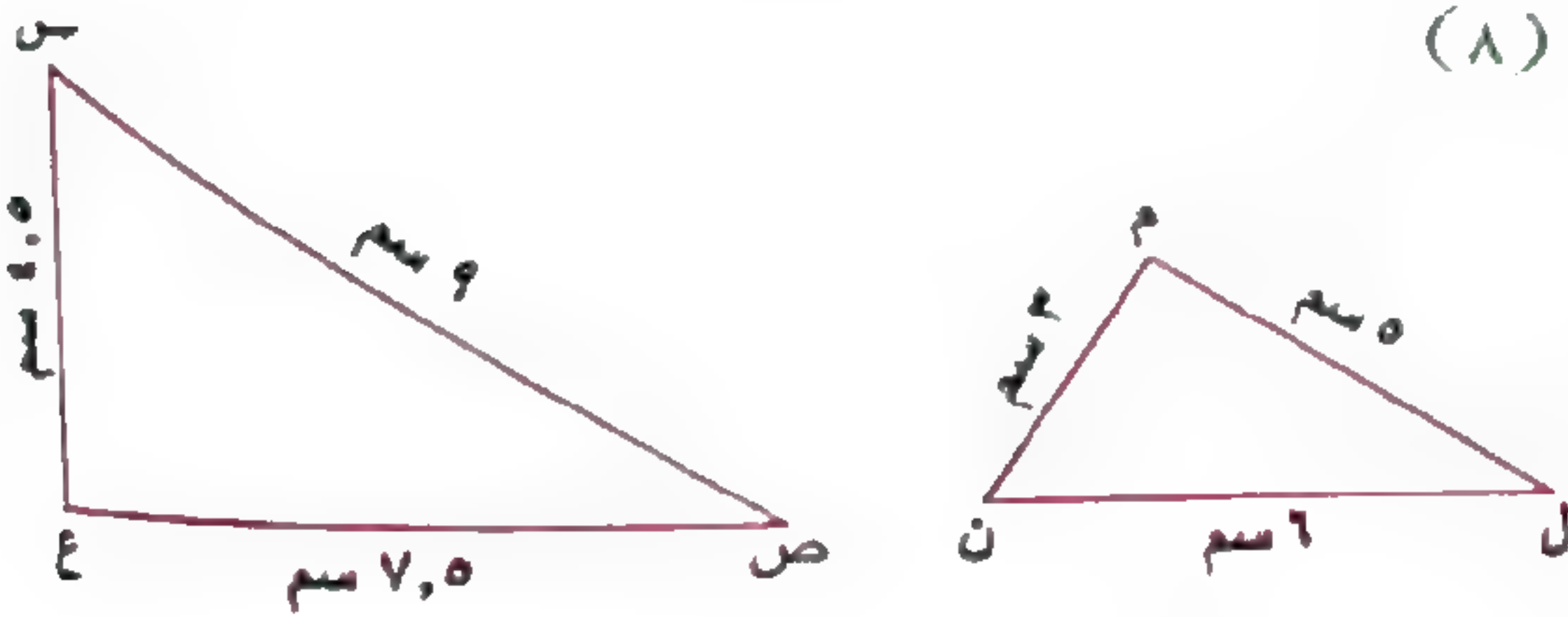
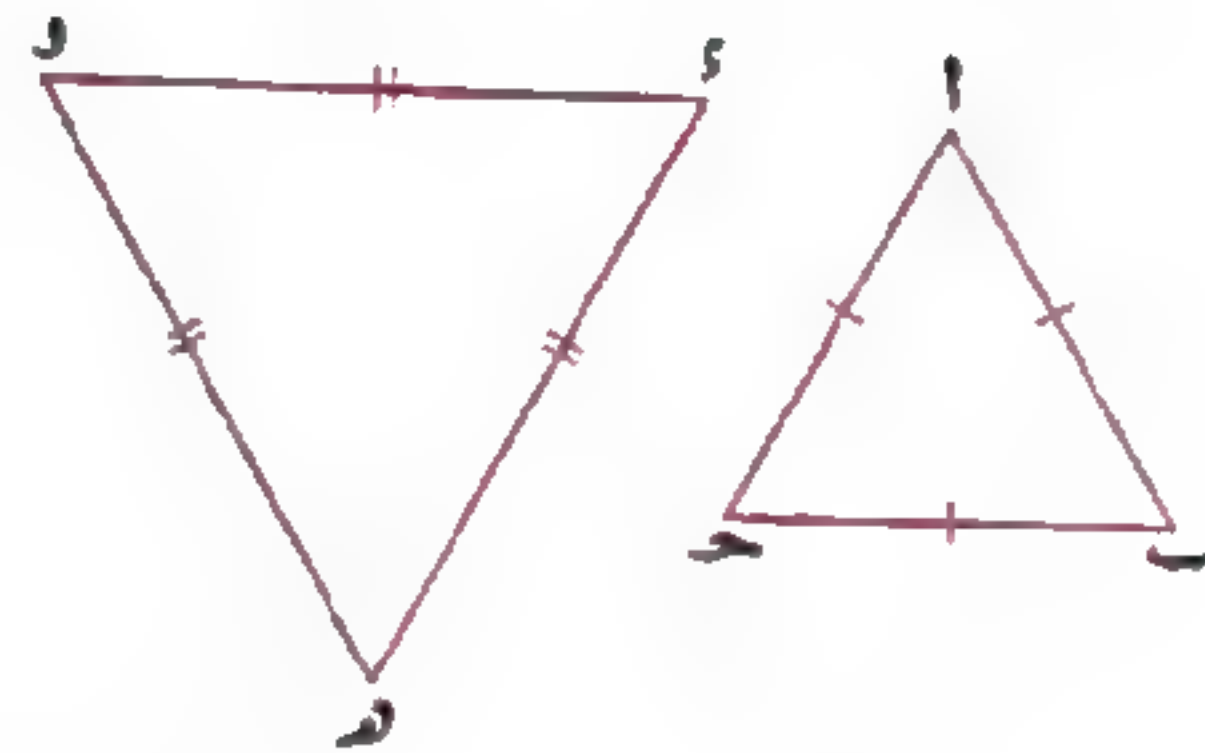
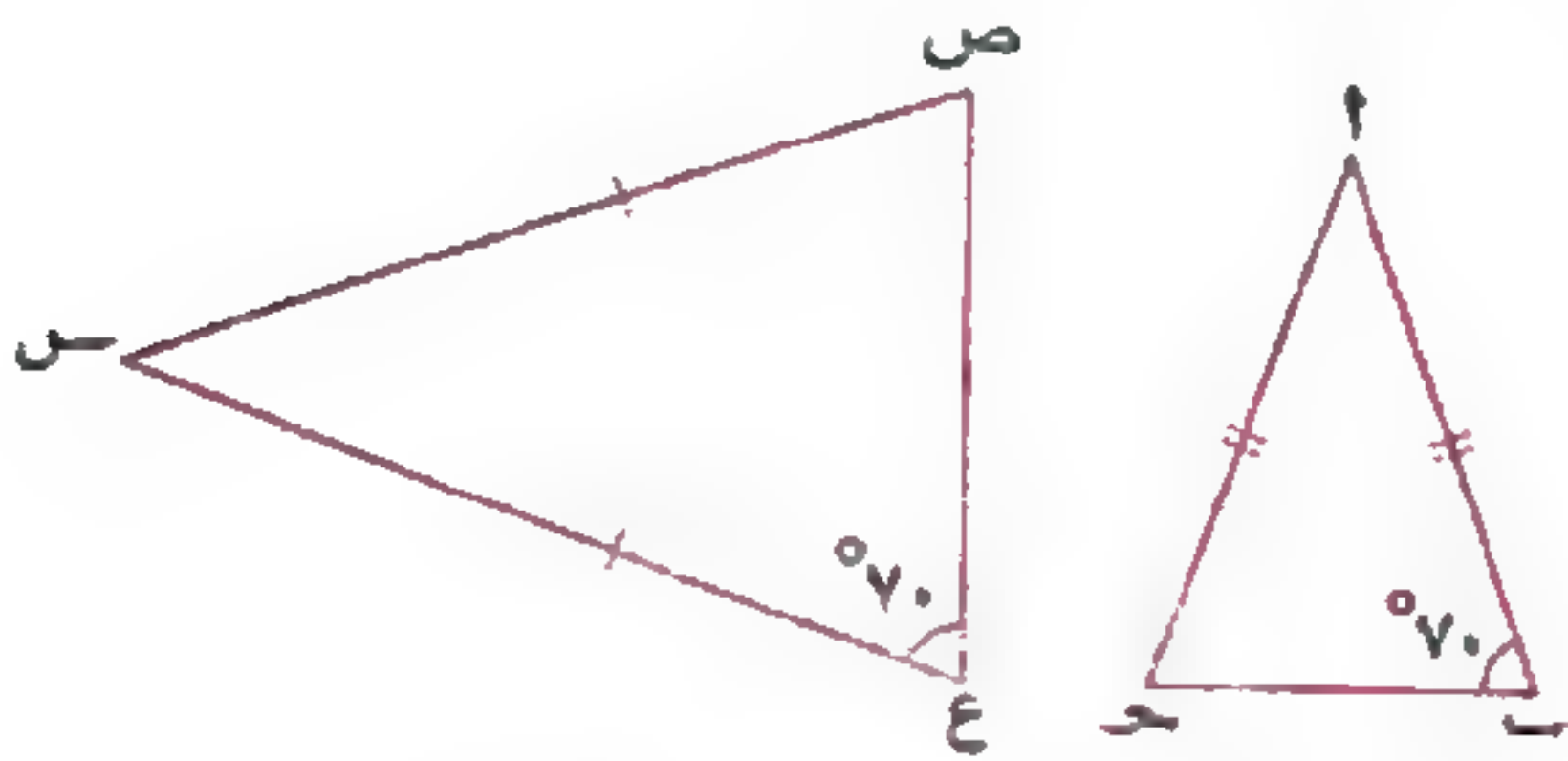
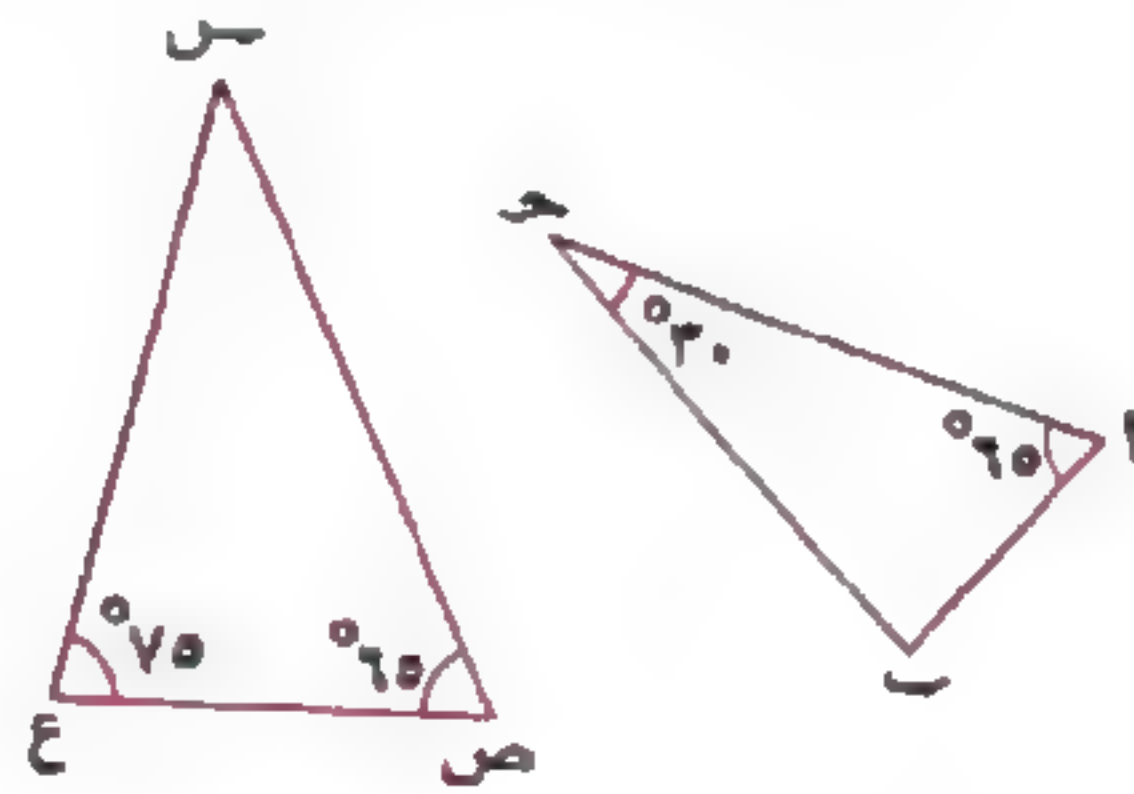
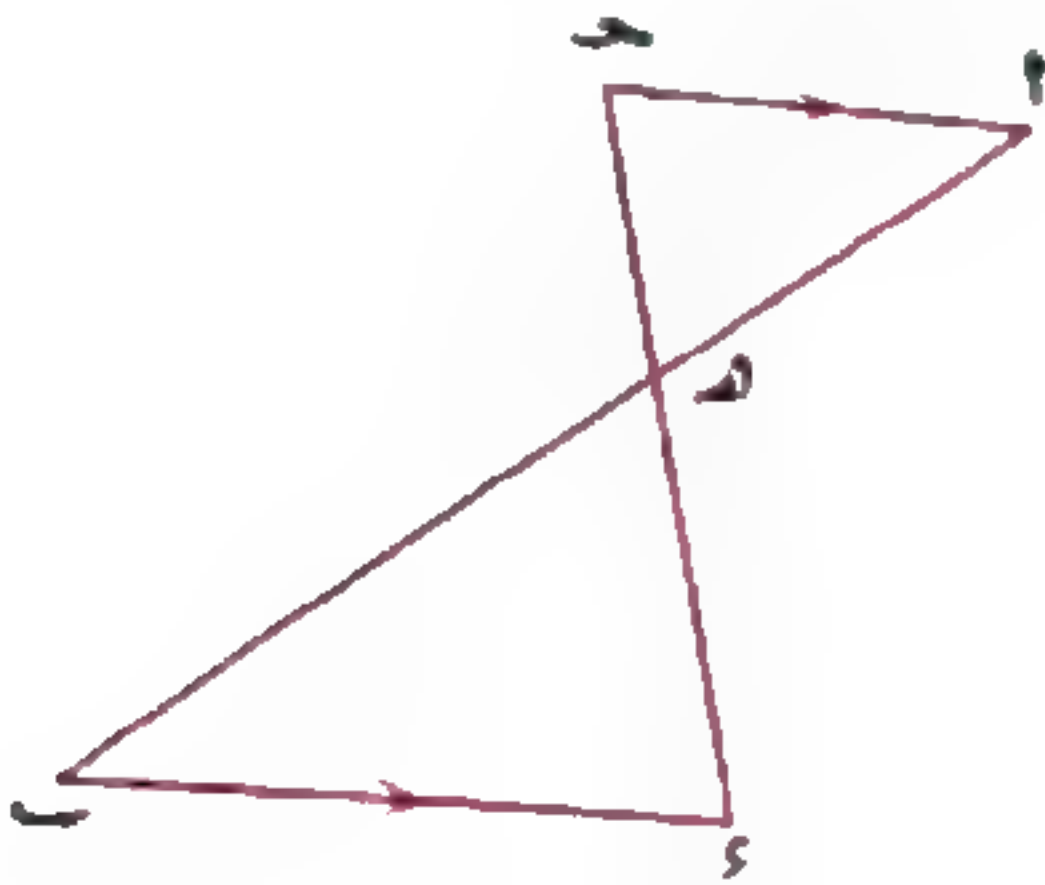
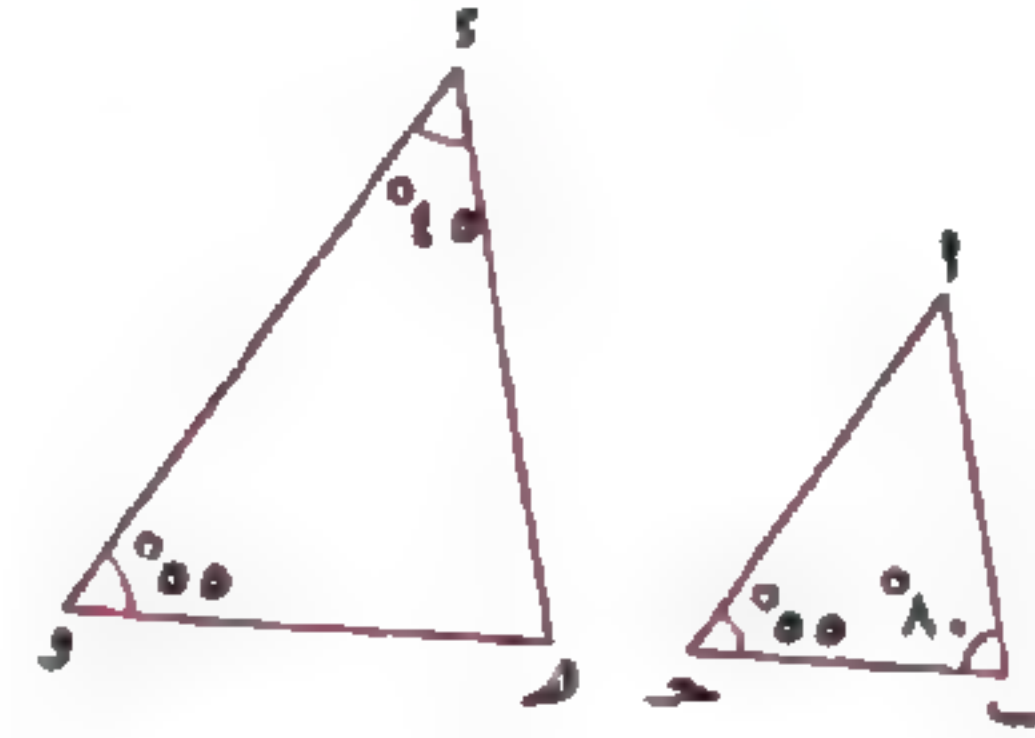
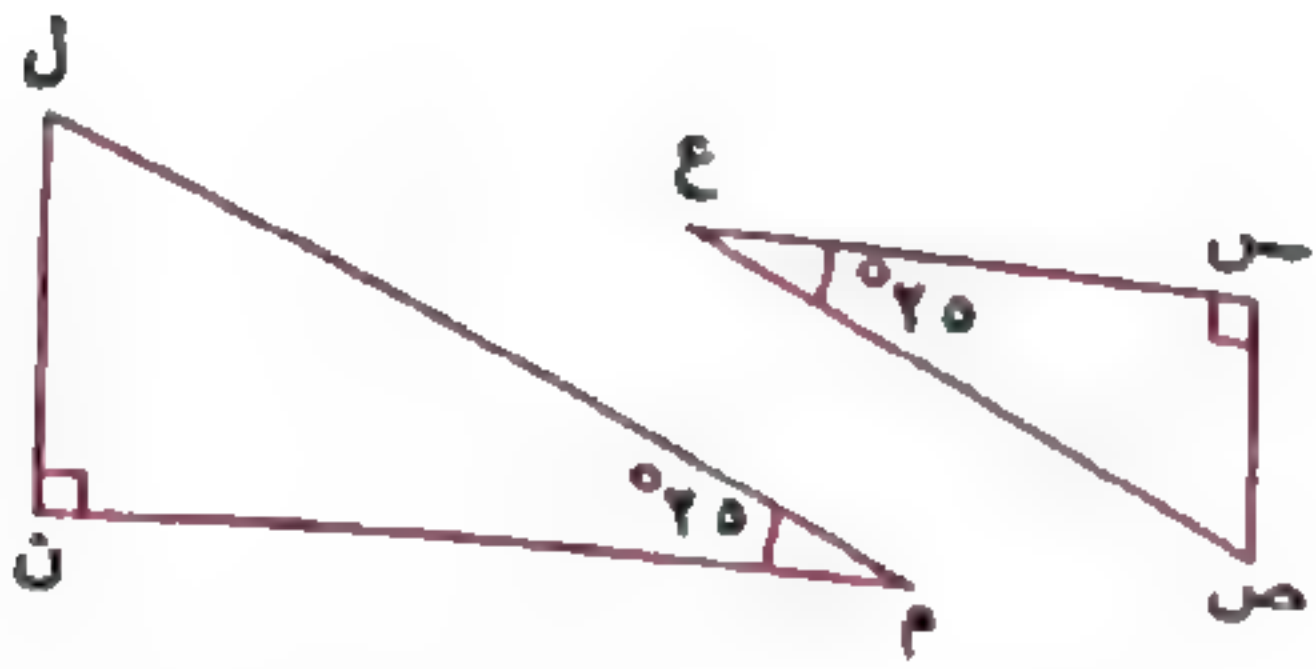


على تشابه المثلثات

2؟

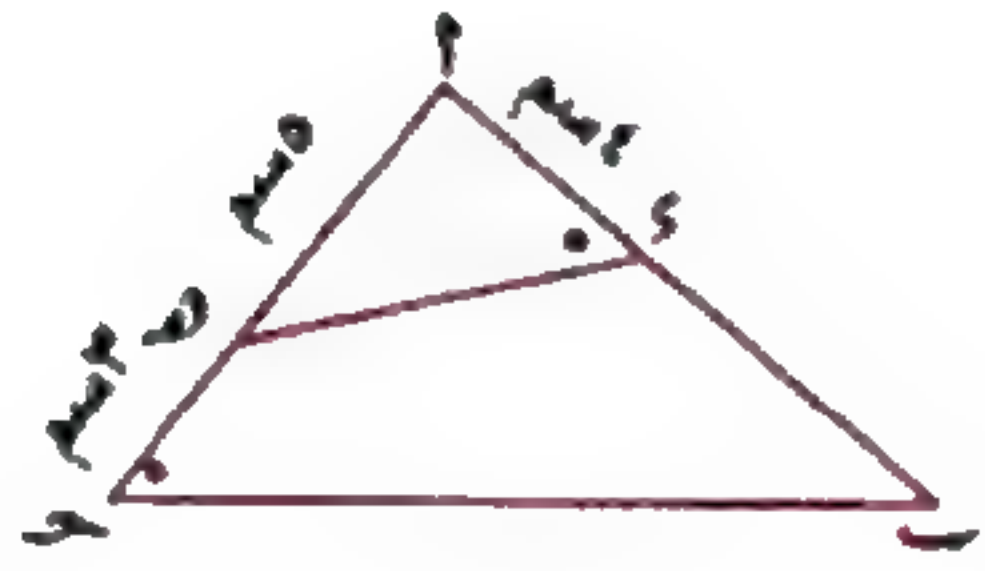
من أسئلة الكتاب المدرسي

اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين ، وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه :



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :



ب = سم

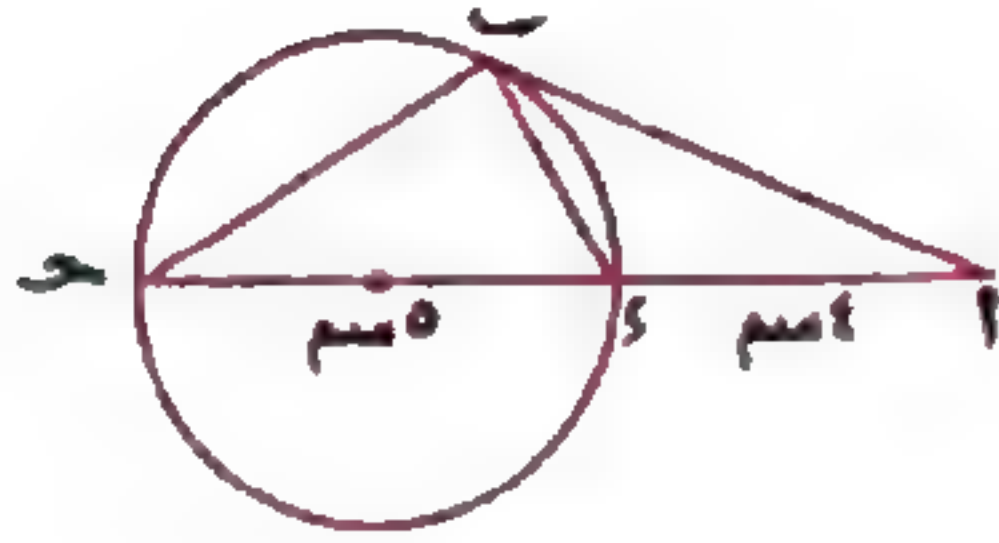
٧ (د)

٤ (ج)

٦ (ب)

٥ (ا)

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : \overrightarrow{AB} مماسًا للدائرة

فإن : $AB = \dots$ سم

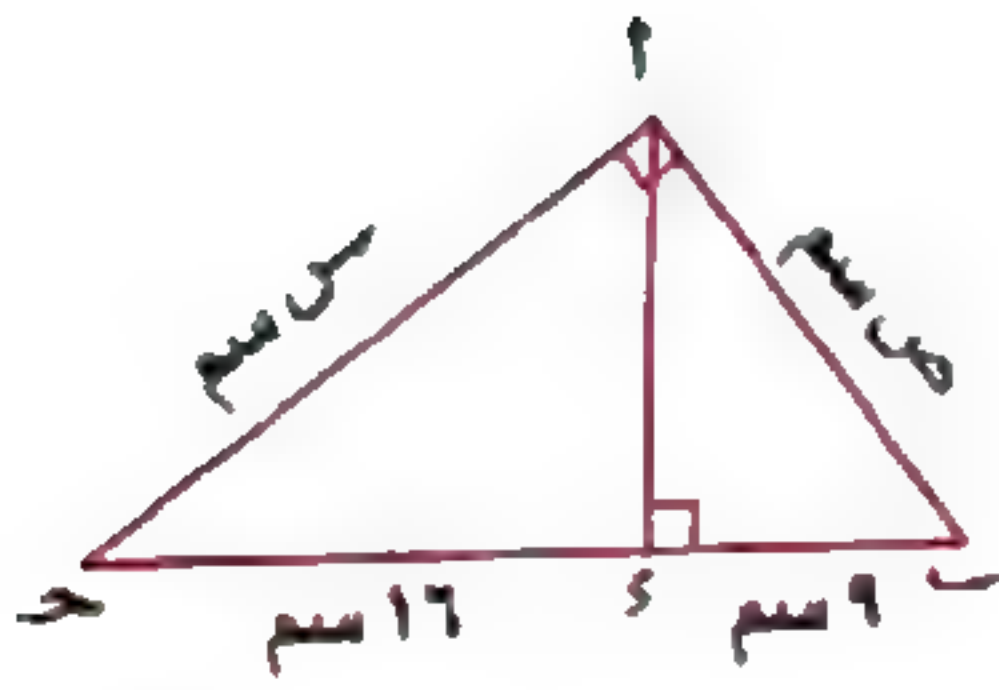
٧ (د)

٦ (ج)

٥ (ب)

٤ (ا)

(٣) في الشكل المقابل :



$\frac{ص}{س} = \dots$

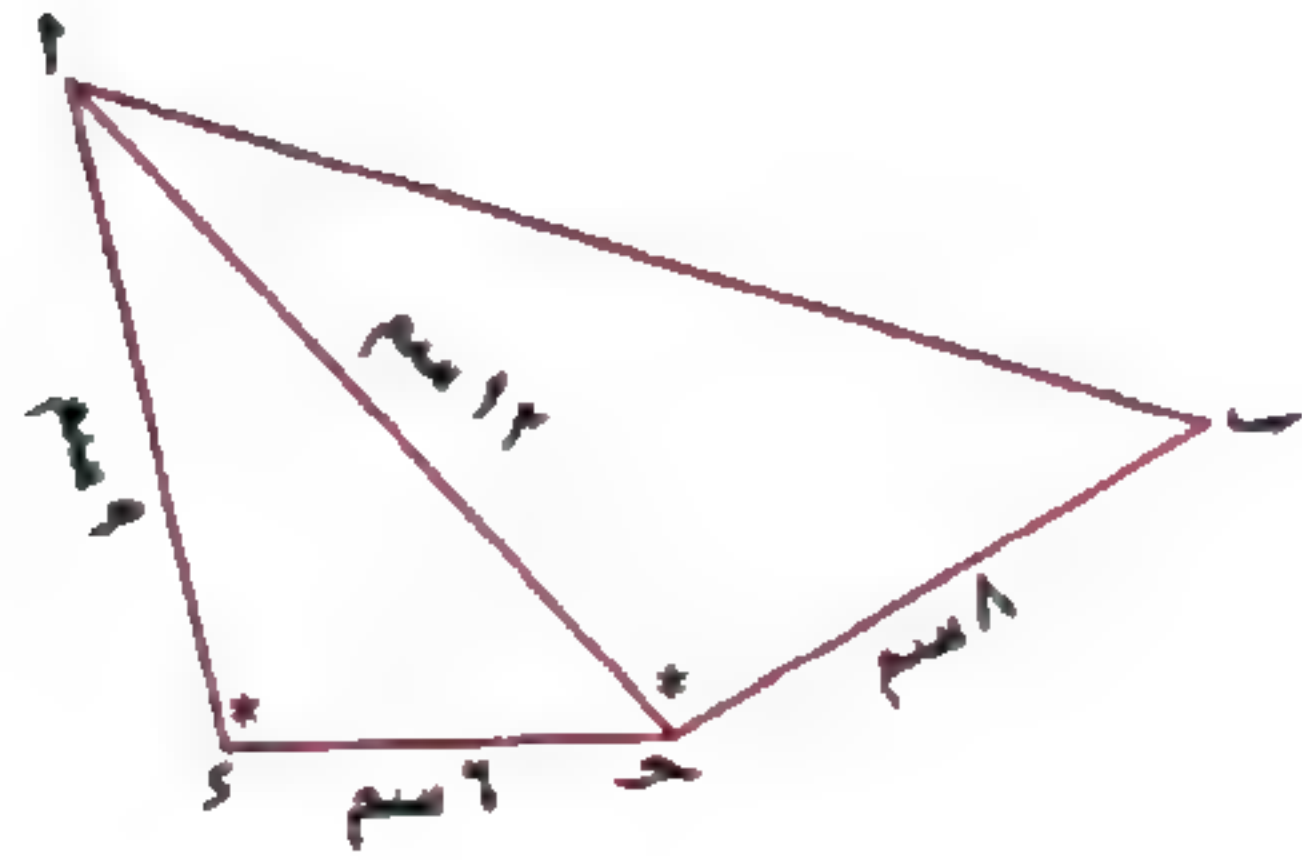
$\frac{٤}{٣}$ (ب)

١ (ا)

٢ (د)

$\frac{٣}{٤}$ (ج)

(٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : $AB = AC$ (د ا ح ب)

فإن : $AB = \dots$ سم

٢٠ (د)

١٨ (ج)

١٦ (ب)

١٢ (ا)

(٥) في الشكل المقابل :



س = سم

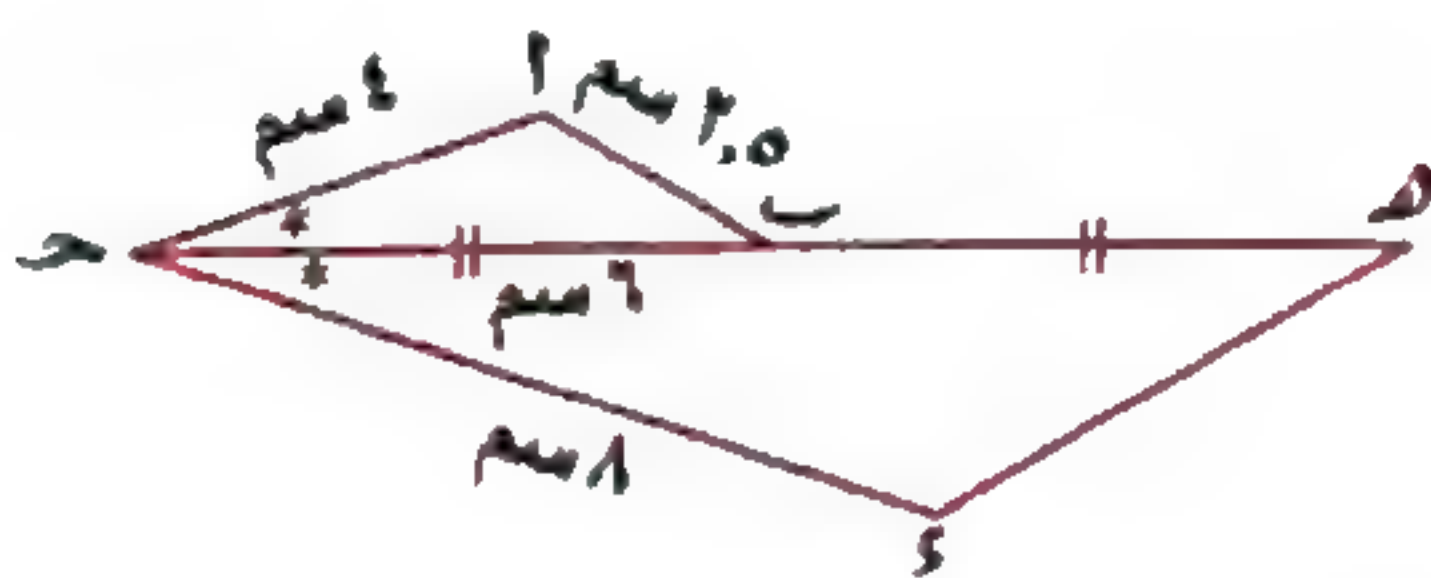
٢٤ (ب)

١٢ (ا)

٤٨ (د)

٣٦ (ج)

(٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت : B منتصف AC

فإن : $BD = \dots$ سم

٧ (د)

٦ (ج)

٥ (ب)

٤ (ا)

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

فإن : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

(أ) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{2}{3}$

(٨) في الشكل المقابل :

$AD = 6$ سم

(أ) 3

(ب) 9

(٩) في الشكل المقابل :

$AD = 6$ سم

(أ) 6

(ب) 12

(١٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : $AD = 6$ ، $DB = 9$ ، $AE = 8$ ، $EC = 12$

فإن : $AB =$

(أ) 6

(ب) 21

(١١) في الشكل المقابل :

AB مثلث متساوي الساقين

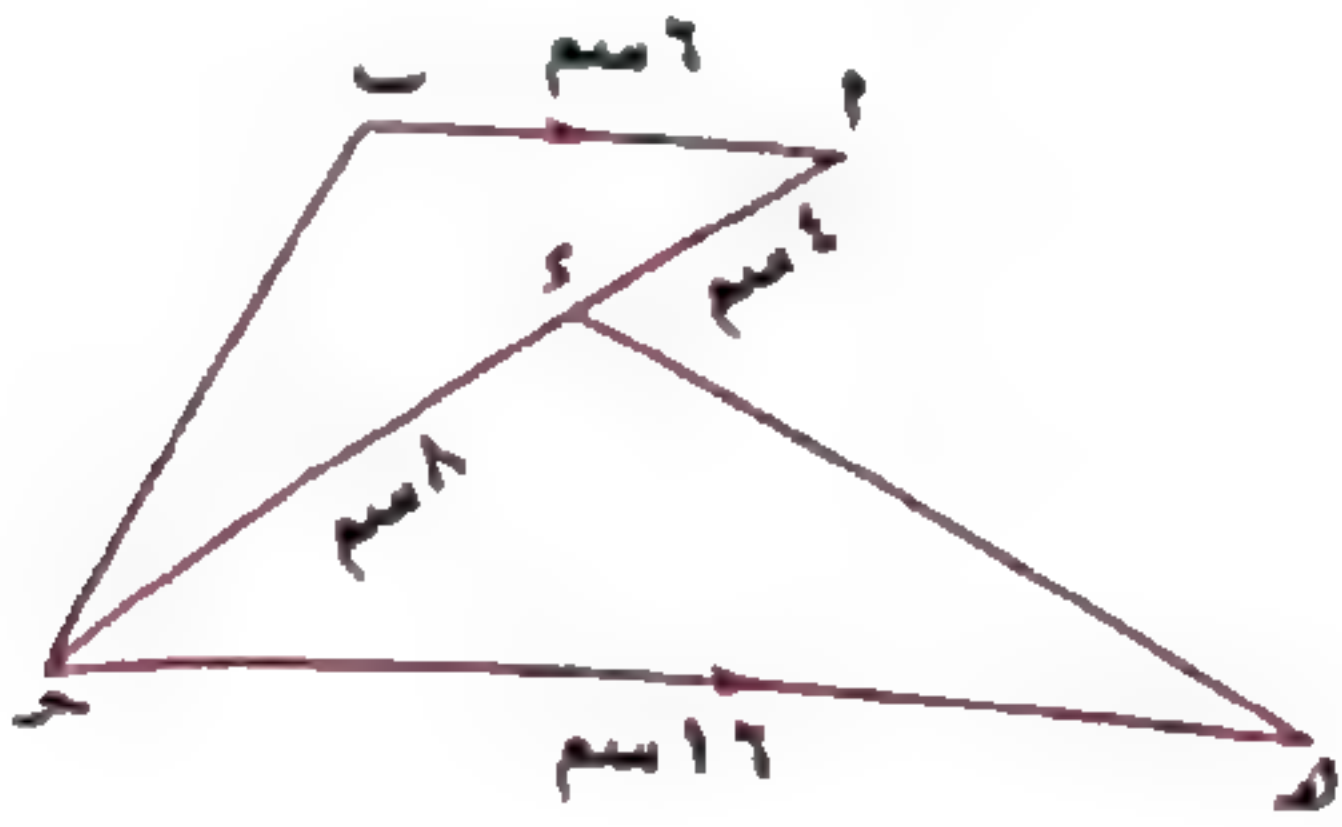
حيث $AD = 6$ ، $DB = 9$ ، $AE = 8$ ، $EC = 12$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

فإن : $AB =$

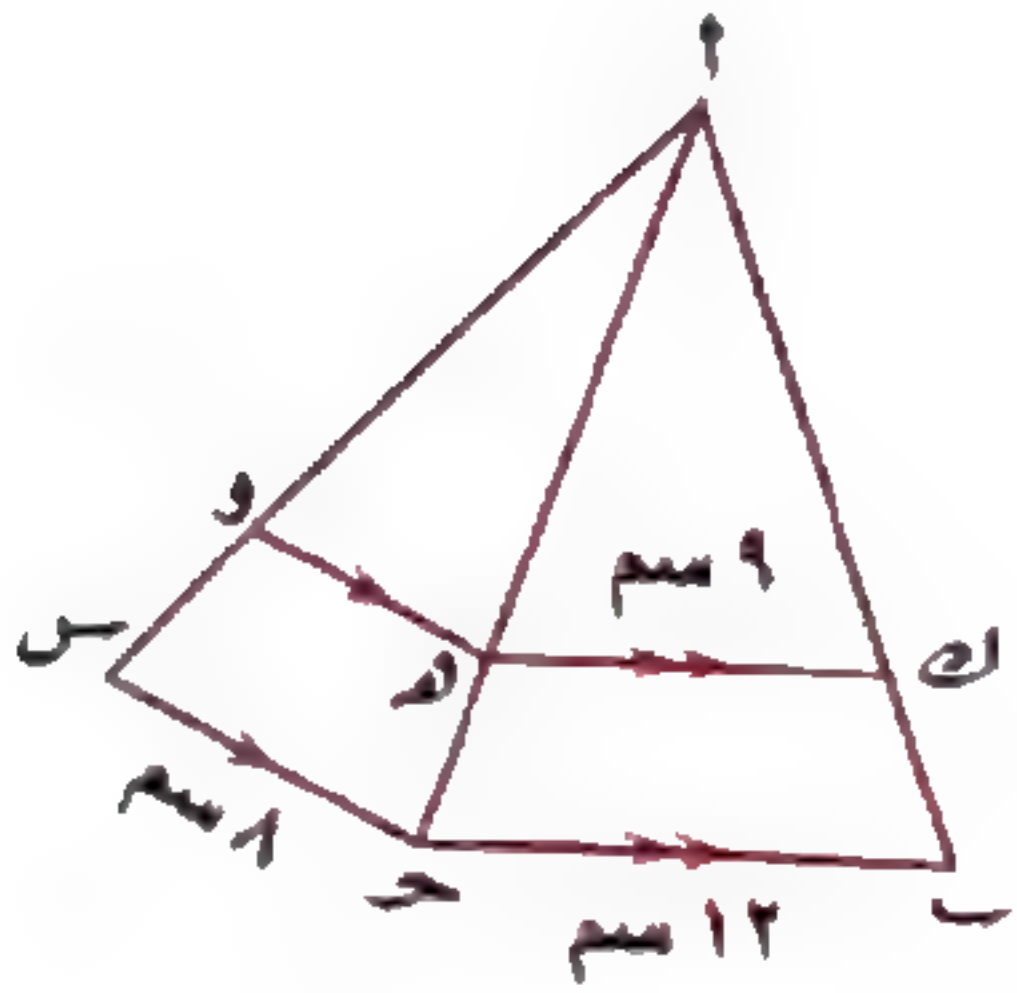
(أ) 12

(ب) 24



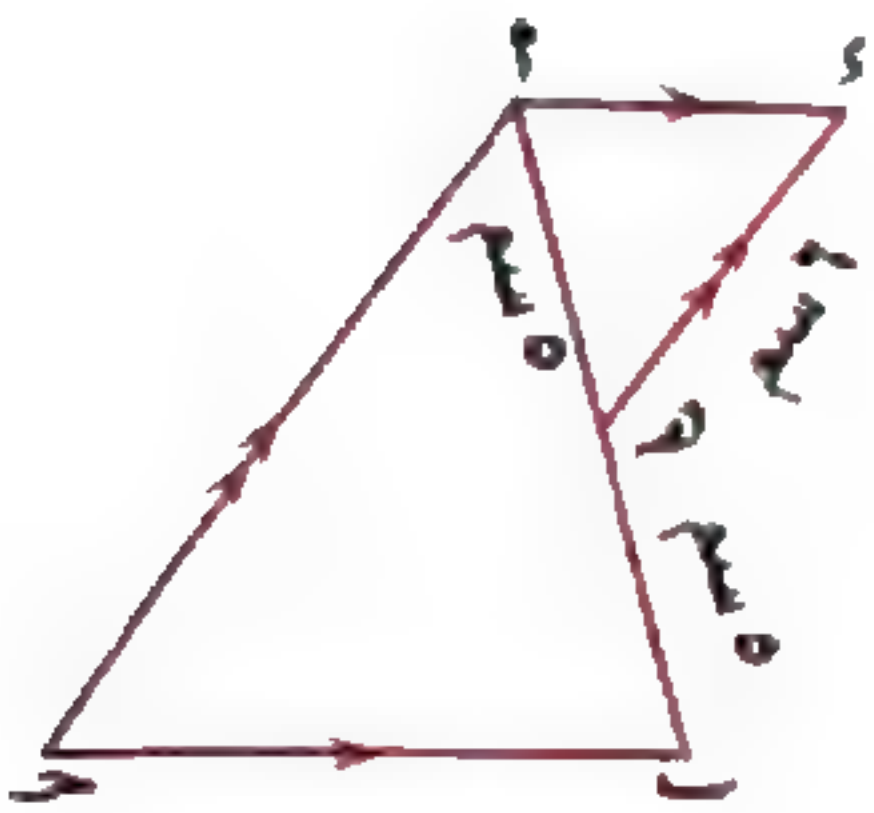
(ب) $\frac{2}{3}$

(د) $\frac{1}{3}$



(ب) 6

(د) 12



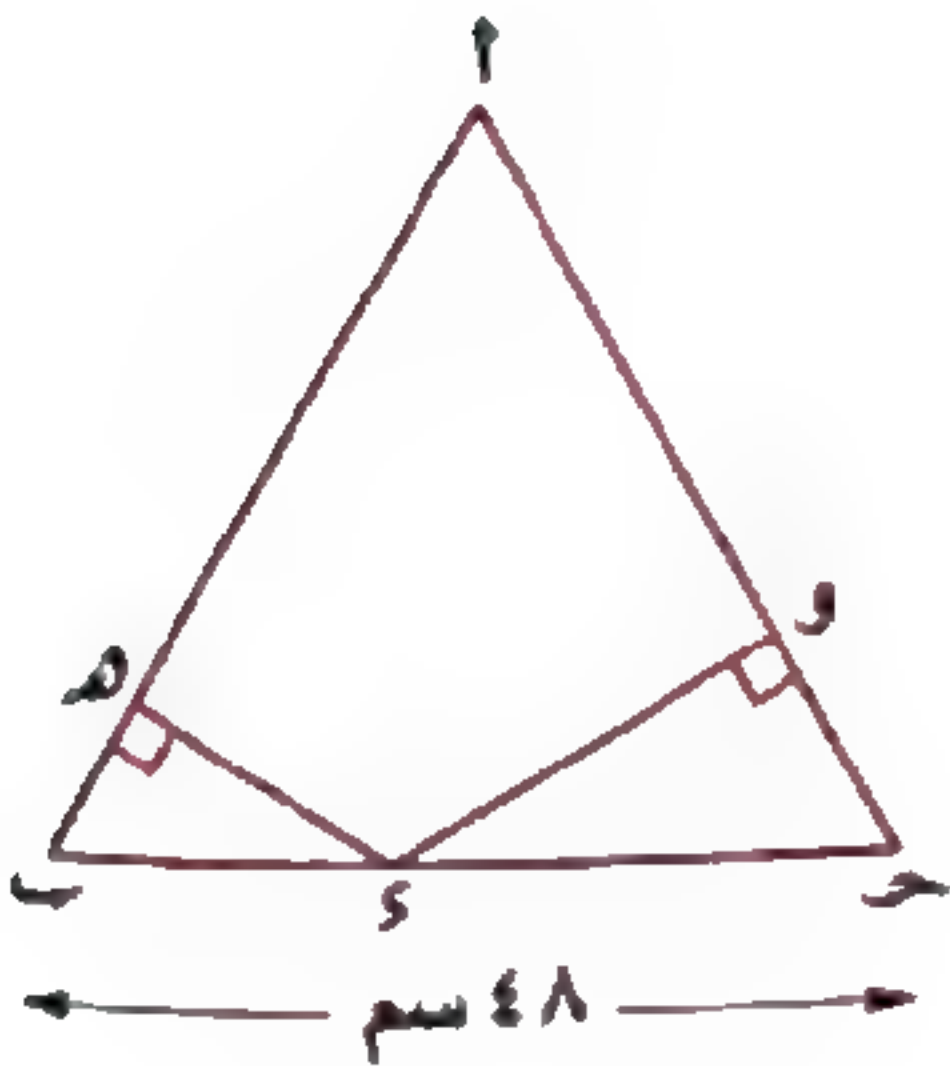
(ب) 9

(د) 15



(ب) 18

(د) 24



(ب) 20

(د) 28

الدرس الثاني

(١٢) في الشكل المقابل :

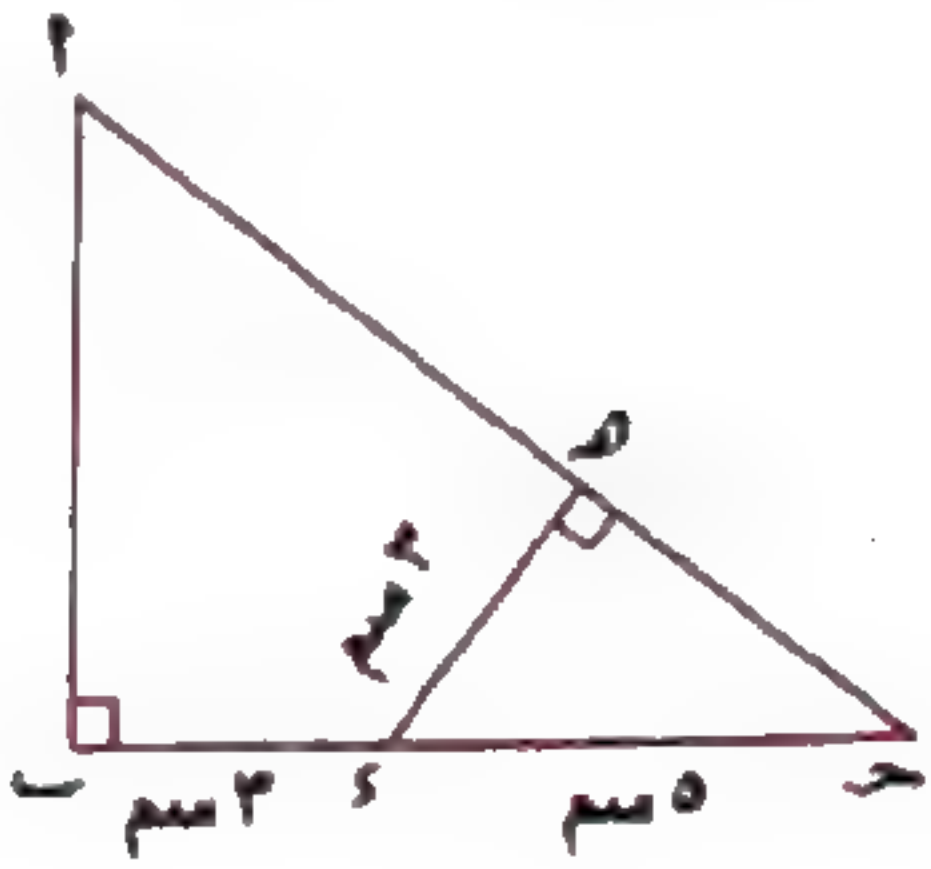
أه = سم

٥ (أ)

٧ (ج)

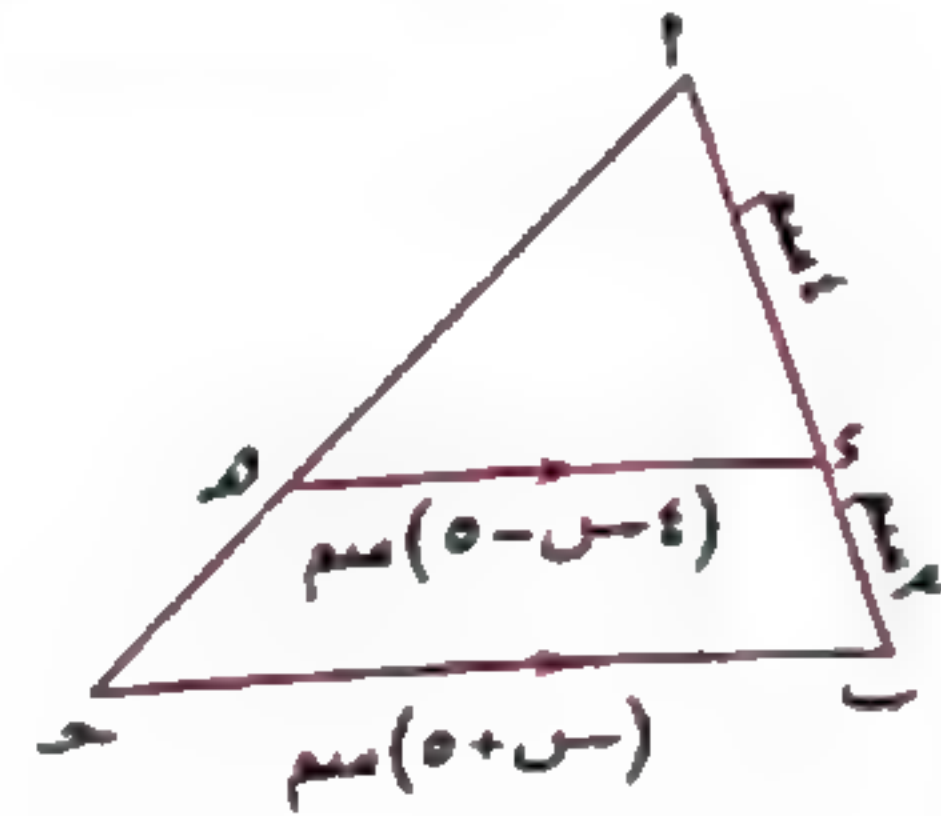
٦ (ب)

٨ (د)



في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسراً إجابتك :

(١)



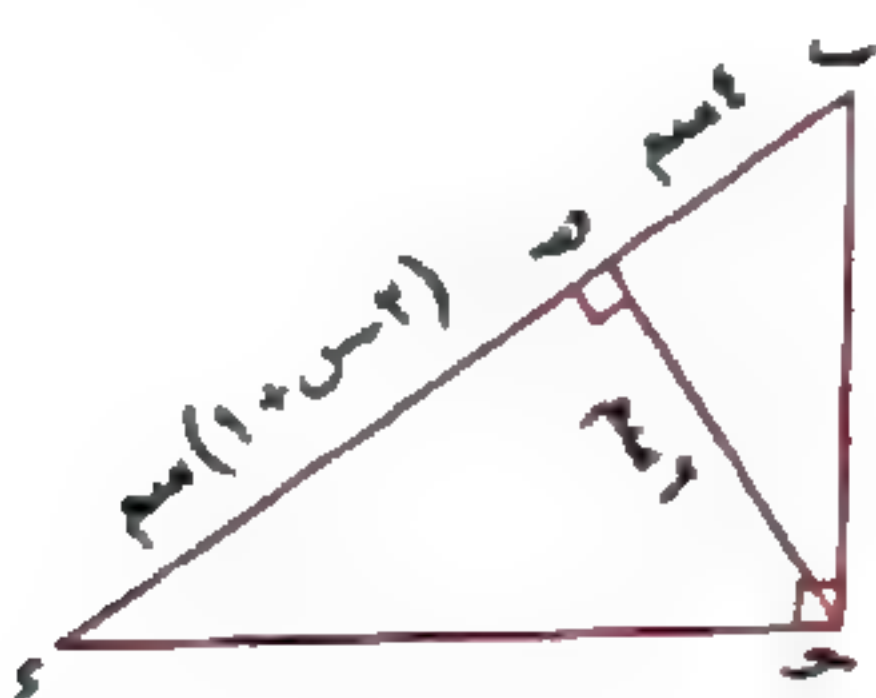
(٢)



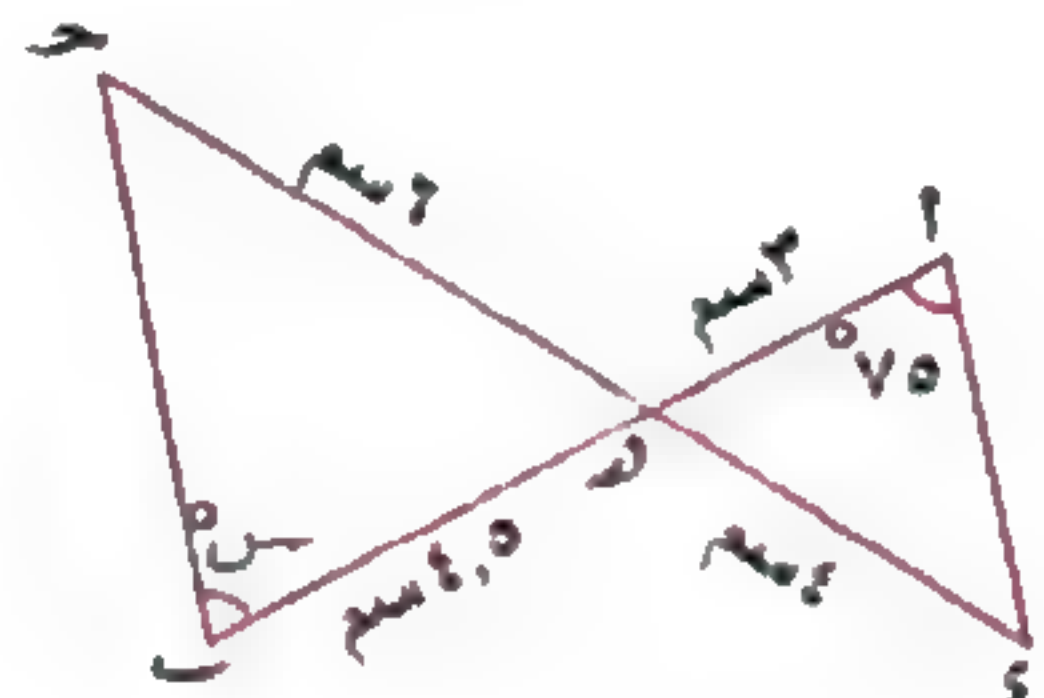
(٣)



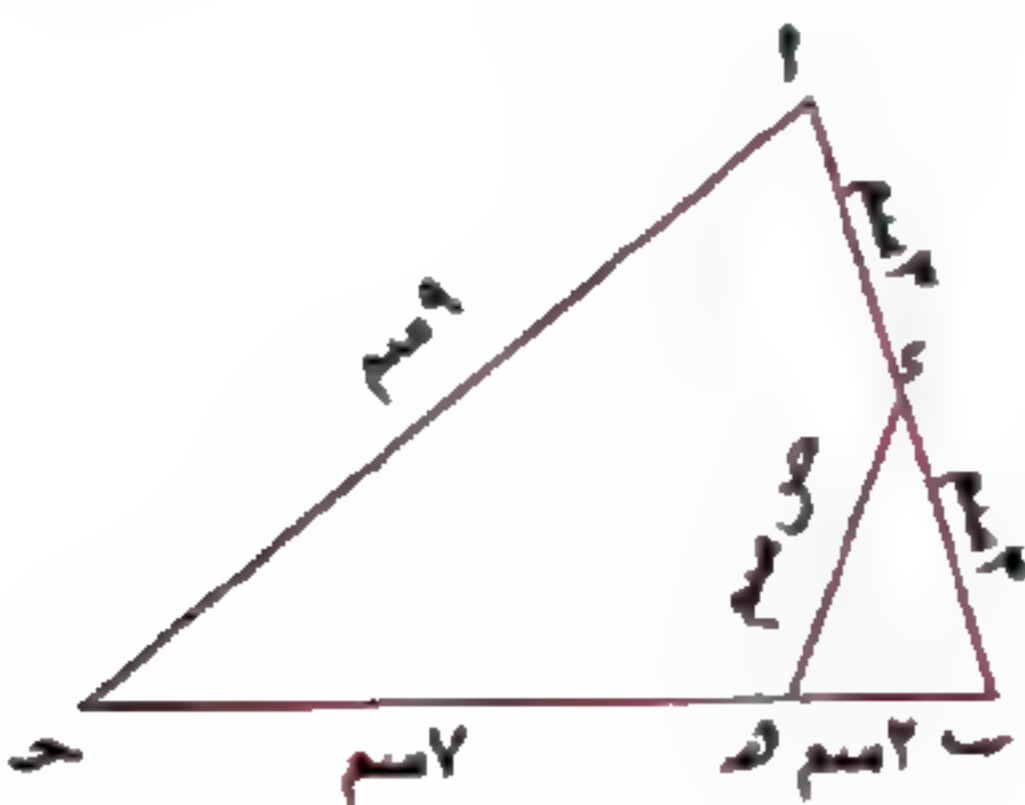
(٤)



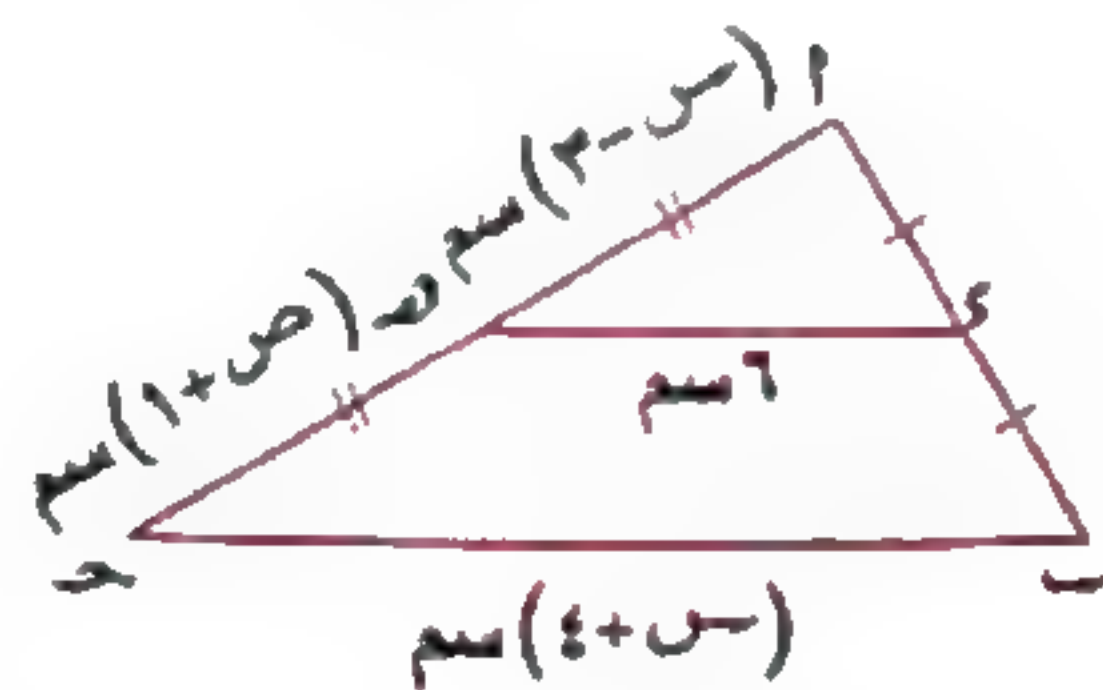
(٥)



(٦)



(٧)



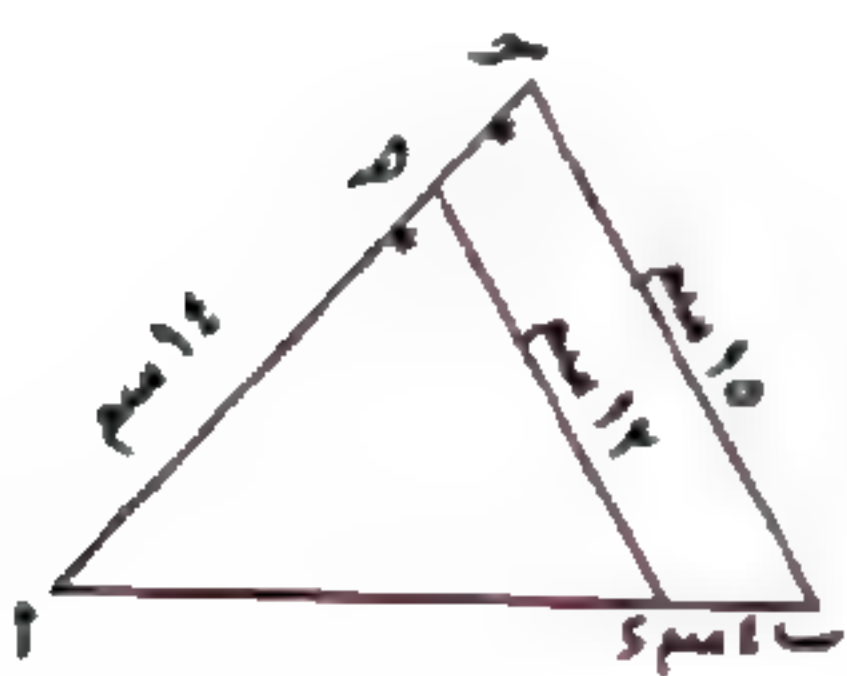
٤ في الشكل المقابل :

أه = ١٤ سم ، هـ = ١٢ سم

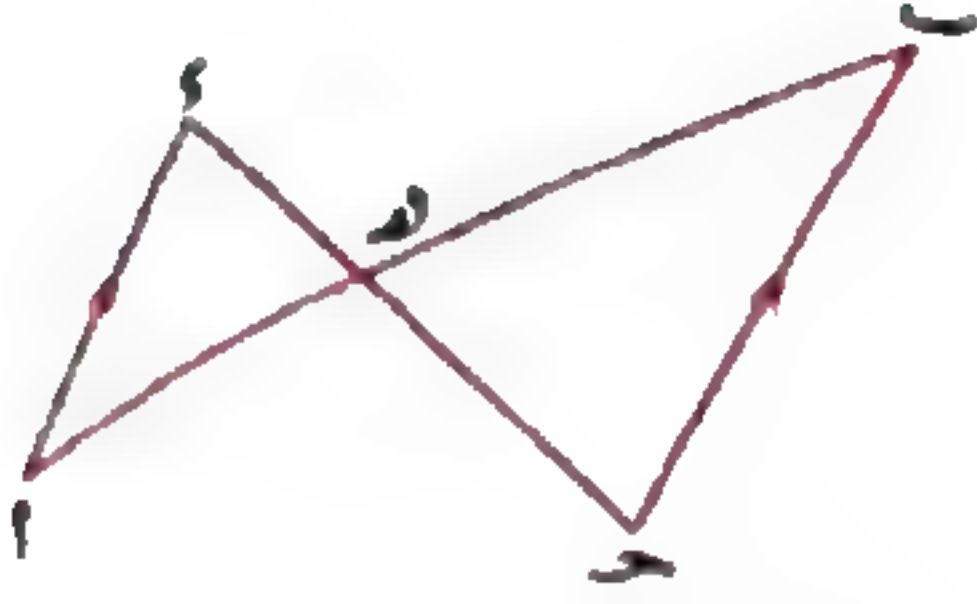
أه = ١٤ سم ، هـ = ١٢ سم

أه = ١٥ سم ، هـ = ٤ سم

أوجد : طول كل من أـ ، هـ ، بـ



« ١٧.٥ سم ، ١٦ سم ، ٢٠ سم »



5 في الشكل المقابل :

$$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$$

أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$(2) \quad AC \times DF = AB \times EF$$



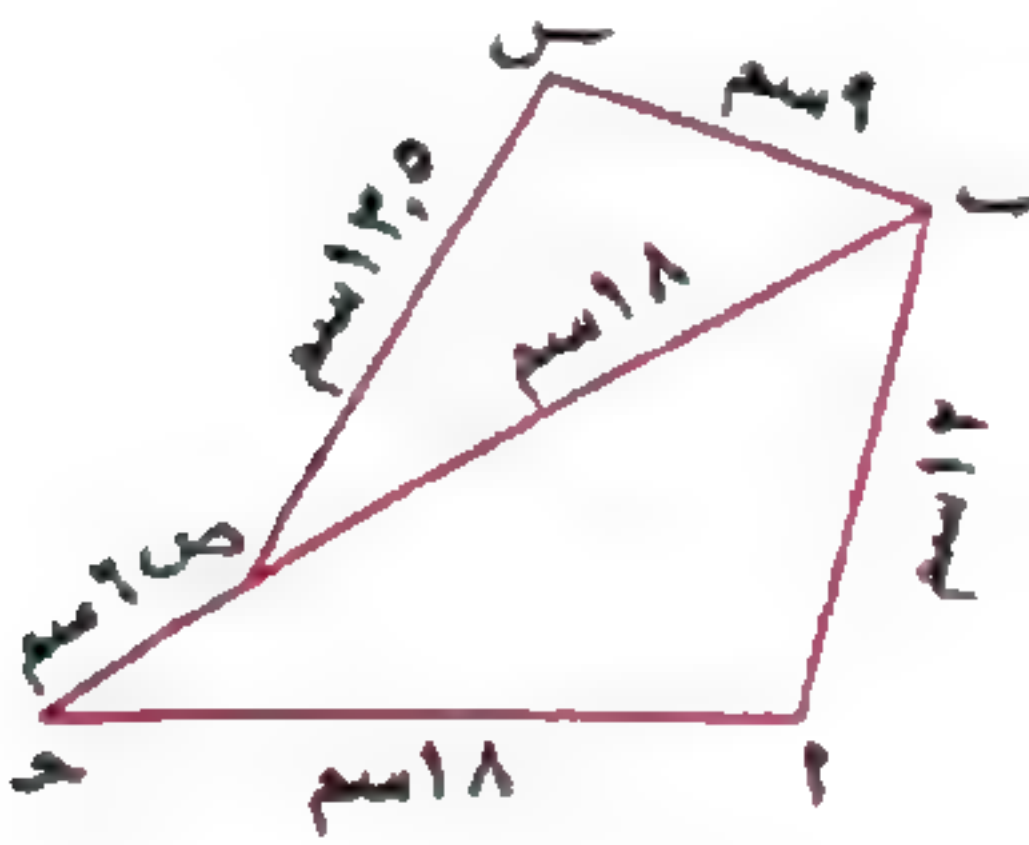
6 في الشكل المقابل :

أ ب مثلث ، $DE \perp AC$ ، $C = (D)$ ، $C = (D)$

فإذا كان : $AB = 16$ سم ، $DE = 4$ سم

فاحسب : طول BC

7 أ ب مثلث أطوال أضلاعه AB ، BC ، CA هي على الترتيب 3 ، 5 ، 4 من السنتيمترات ، DE و مثلث آخر أطوال أضلاعه DE ، EF ، FD هي على الترتيب 6 ، 4 ، 8 من السنتيمترات أثبت أن هذين المثلثين متشابهان واكتبهما بترتيب رءوسهما المتناظرة.

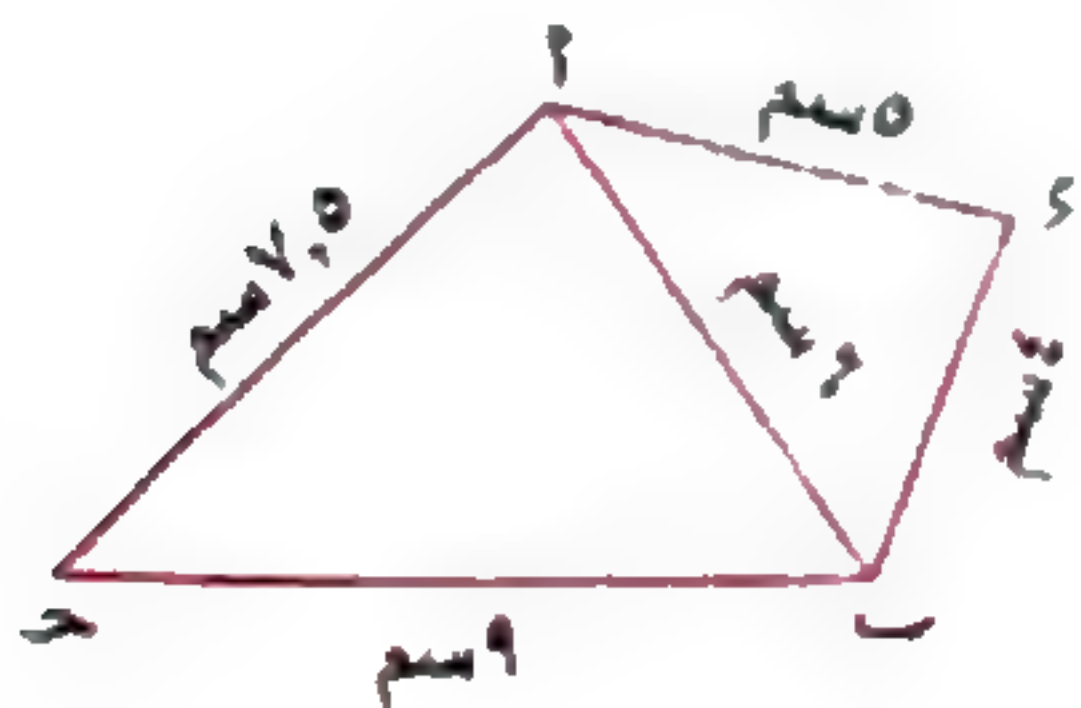


8 في الشكل المقابل :

ب ، ص ، ح على استقامة واحدة.

أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta VCS$

$$(2) \quad BC \text{ ينصف } DV$$



9 في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : $AB = 6$ سم ، $BC = 9$ سم

، $AC = 7.5$ سم ، و نقطة خارجة عن المثلث أ ب ح

حيث : $DB = 4$ سم ، $DE = 5$ سم

أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

$$(2) \quad BC \text{ ينصف } DE$$

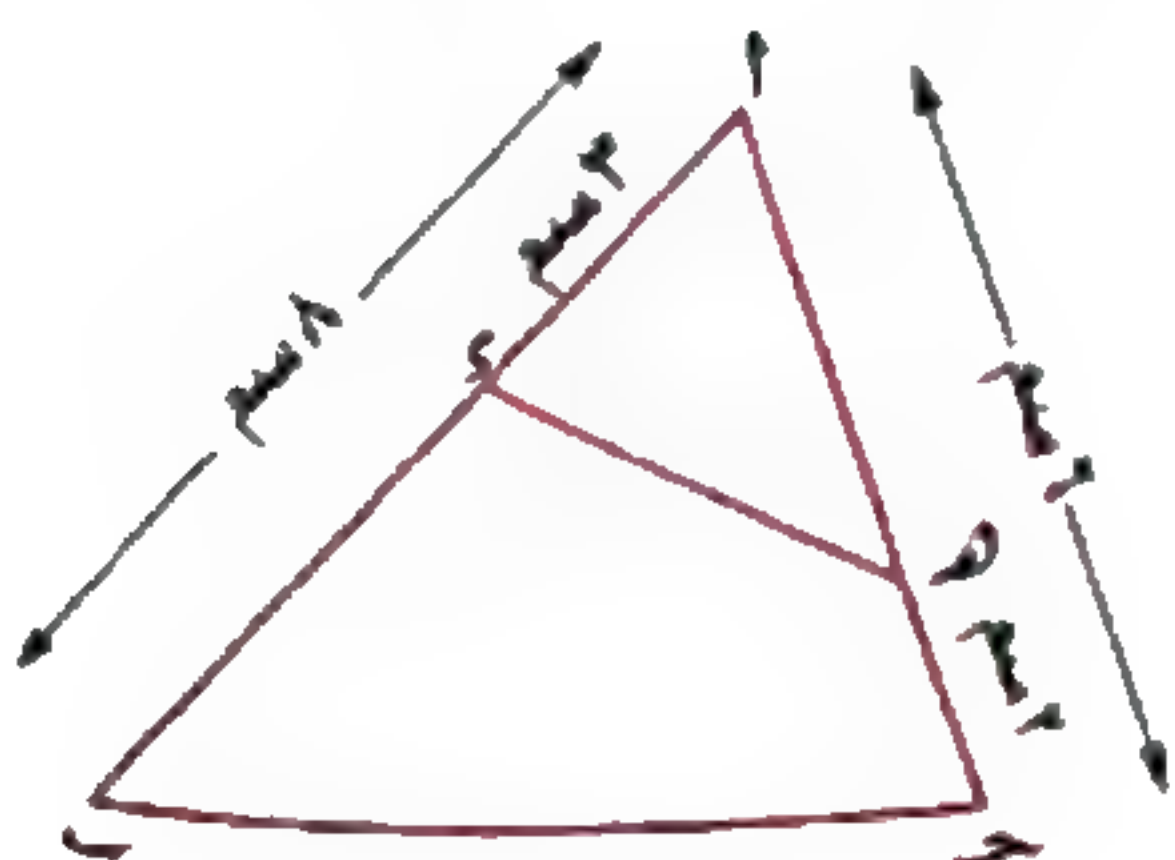
10 في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : $AB = 8$ سم ، $AC = 6$ سم

، $DE \subset AB$ حيث $AE = 2$ سم ، $DE \subset AC$

حيث $DE = 2$ سم

أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta ADE$



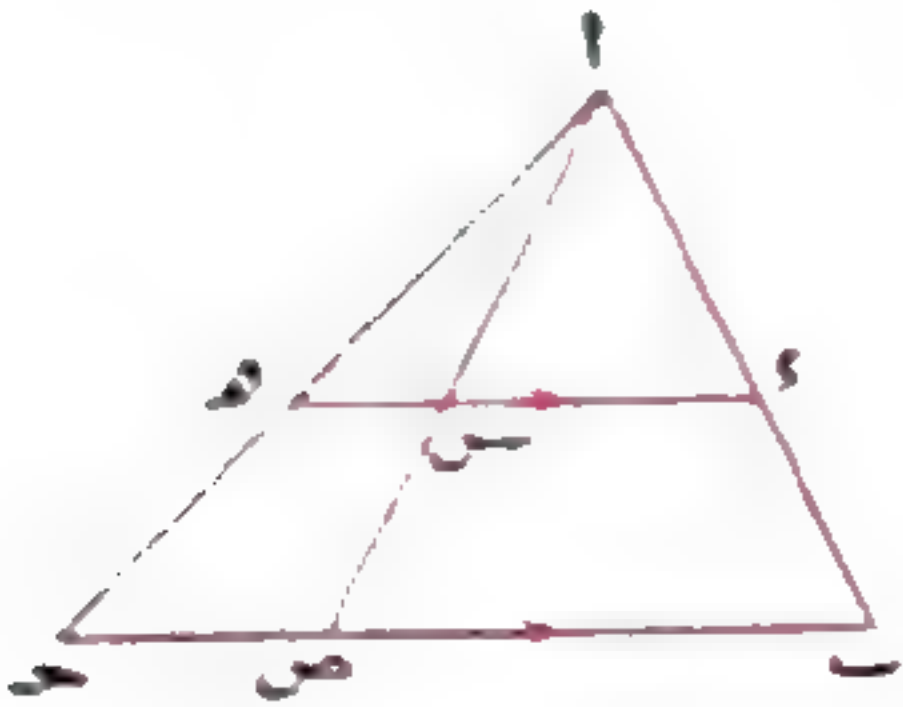
في الشكل المقابل :



أثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ثم احسب : طول DE
 ب = ٩ سم ، د = ١٠ سم ، أ = ٦ سم
 ح = ١٢ سم ، د = ٧.٥ سم ، { د } = $\overline{AC} \cap \overline{DE}$

في المثلث ABC : $AB < AC$ ، $M \in AC$ حيث : $AM = (1 - \frac{1}{n}) AB$ ، $n \in \mathbb{N}$
 أثبت أن : $(1 - \frac{1}{n})^2 AB^2 = AM^2$

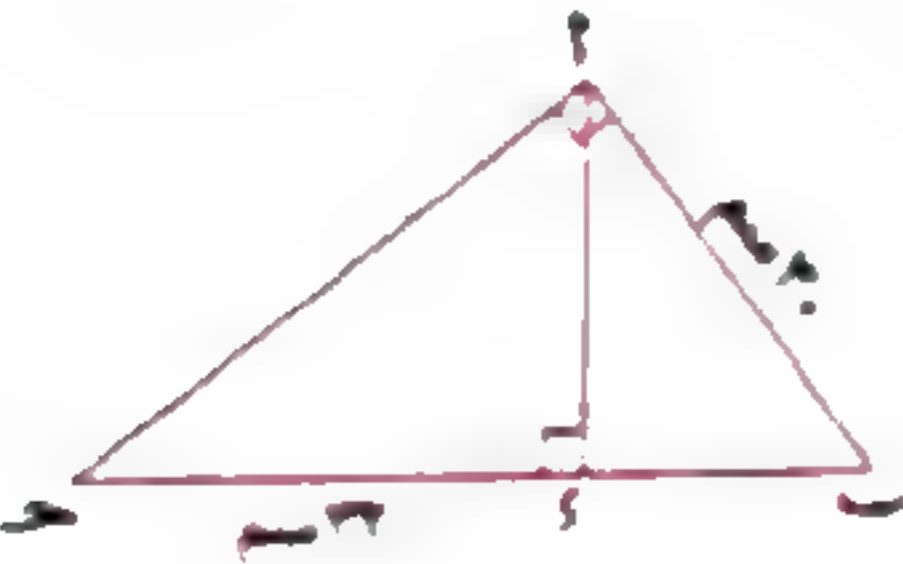
في الشكل المقابل :



أح ABC مثلث ، $E \in AB$ ، رسم $DE \parallel AC$
 ويقطع AC في F ، رسم AS يقطع DE ، $S \in AC$
 في S ، S على الترتيب.

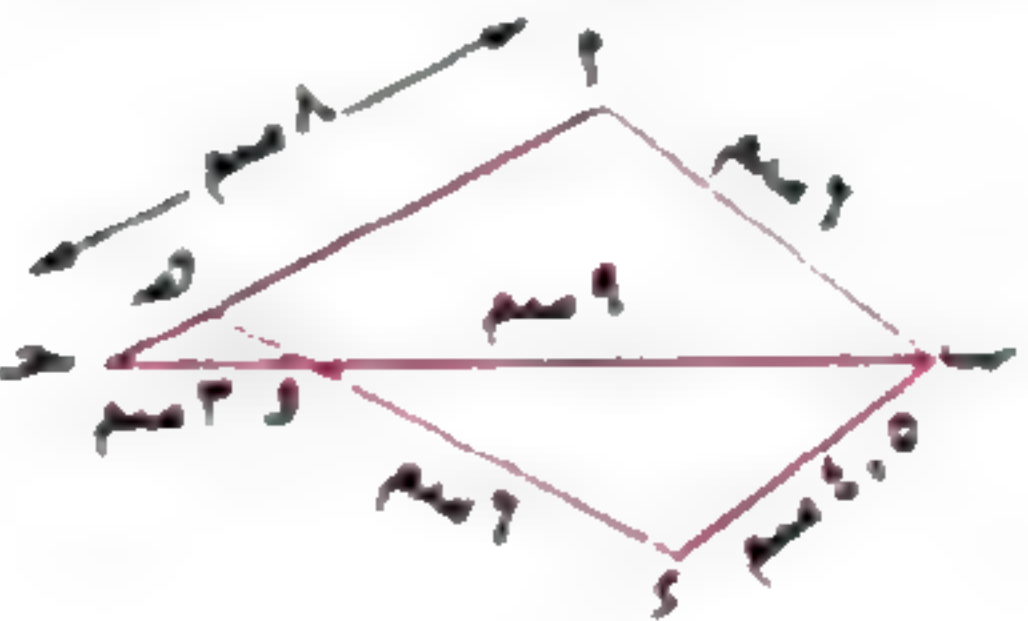
(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.
 (٢) أثبت أن : $\frac{AS}{AC} = \frac{ES}{AB} = \frac{DS}{BC}$

في الشكل المقابل :



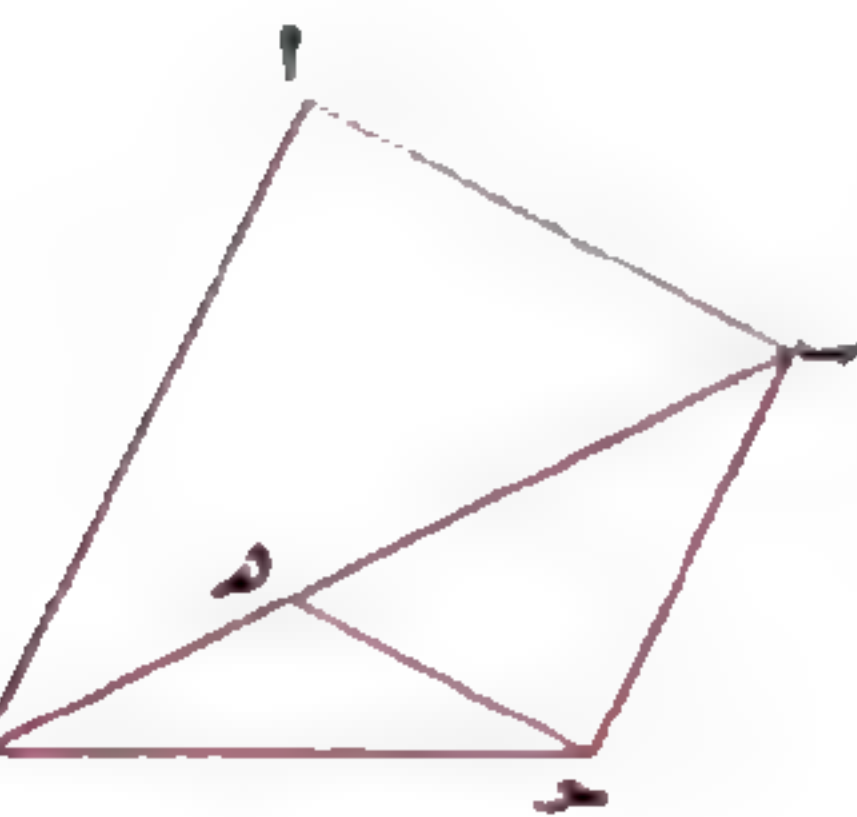
أح ABC مثلث قائم الزاوية في A ، $E \in AB$ ، $DE \perp AC$
 ب = ٢٠ سم ، د = ٢٢ سم
 احسب : طول كل من AE ، DE

في الشكل المقابل :



أثبت أن : (١) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ و (٢) ΔABC و DEF متساوي الساقين.
 ب = ٦ سم ، د = ٤ سم ، ح = ٥ سم ، و = ٦ سم
 ب = ١٢ سم ، د = ٨ سم ، { و } = $\overline{AC} \cap \overline{DE}$

في الشكل المقابل :



أح $ABCD$ شكل رباعي ، $E \in AC$ حيث :
 $\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD}$ ، $\frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AD}$
 أثبت أن : (١) $AE \parallel BD$ (٢) $AB \parallel CD$

١٧ ا ب ح مثلث فيه : ا ب = ٤ سم ، ا ح = ٢ سم ، د ع حيث ا د = ٤.٥ سم
 د ح ا ب حيث ا د = ٦ سم أثبت أن : الشكل ب ح د ه رباعي دائري.

١٨ ا ب ح مثلث ، ا ب = ٨ سم ، ا ح = ١٠ سم ، ب ح = ١٢ سم ، د ه ا ب حيث
 حيث : ا د = ٢ سم ، د ح حيث : ب د = ٤ سم

(١) برهن أن : $\Delta ب د ه \sim \Delta ب ا ح$ واستنتج : طول د ه
 (٢) برهن أن : الشكل ا ح د ه رباعي دائري.

١٩ س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، رسم س ل \perp ص ع ويقطعه في ل

أثبت أن : $\frac{(س ص)^2}{(س ع)^2} = \frac{ص ل}{ل ع}$ وإذا كان : س ص = ١٢ سم ، س ع = ١٦ سم

فاحسب : طول كل من ص ل ، س ل

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

ص ح = سم

- (١) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ١٢

(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : د ا ، د ب مماسين للدائرة عند

ا ، ب على الترتيب ، د ا = د ب = ٨ سم ، ب ح = ٢ سم

فإن : ا ح = سم

- (١) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٣) في الشكل المقابل :

د ح = سم

- (١) ٣ (ب) ٤

(ج) ٥ (د) ٦

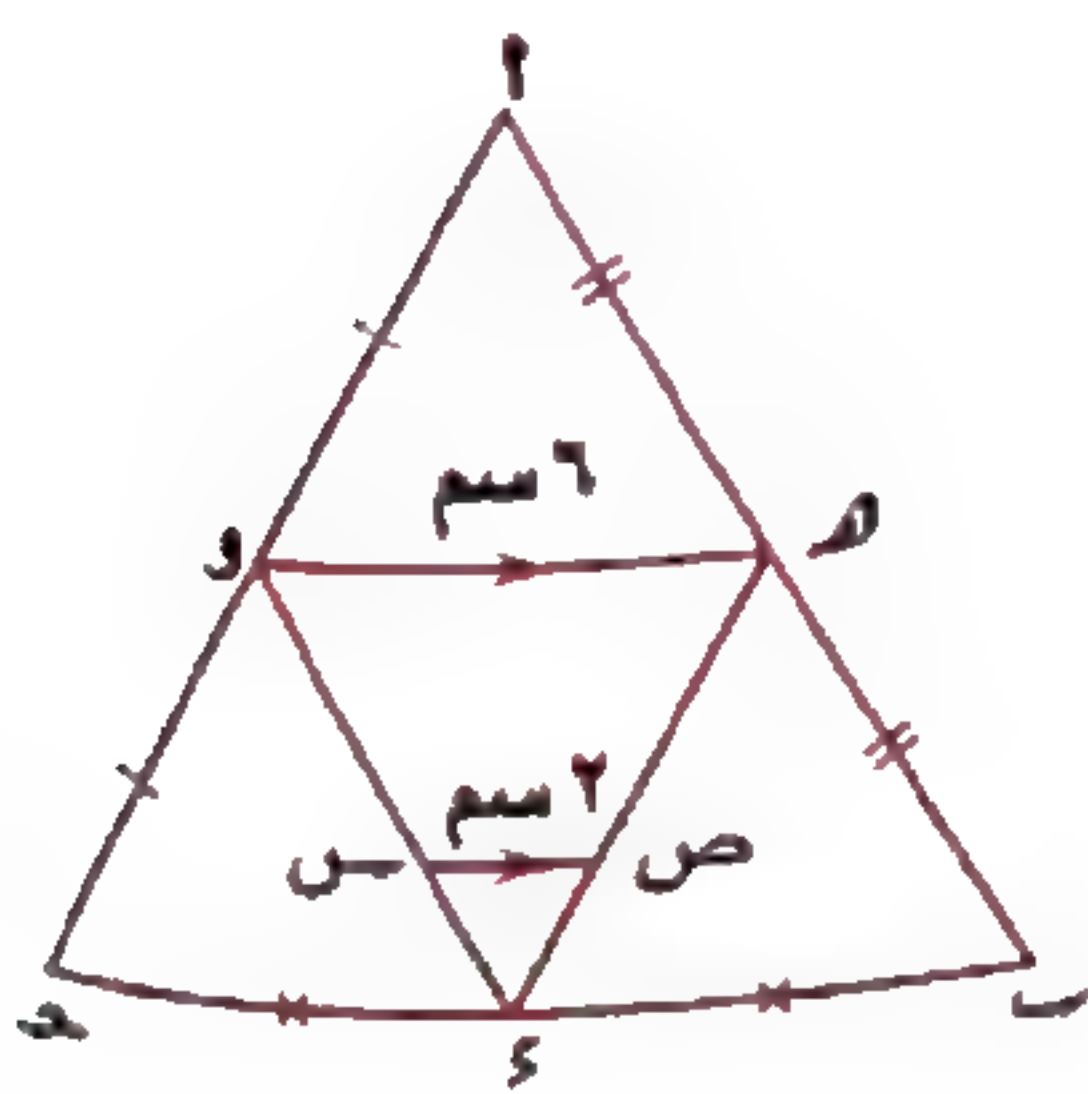
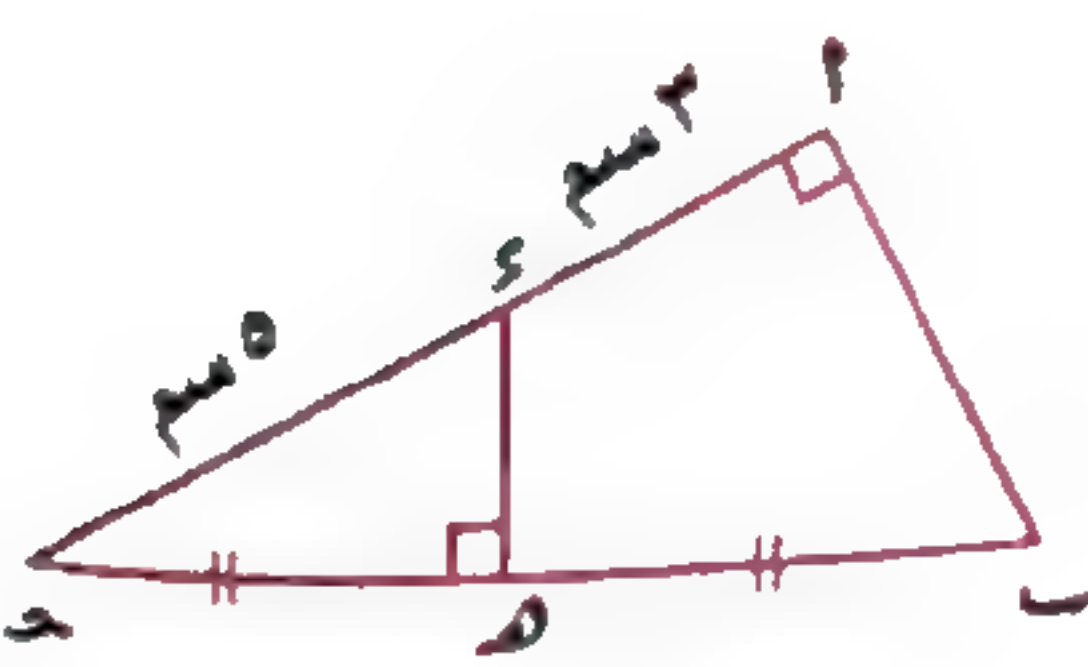
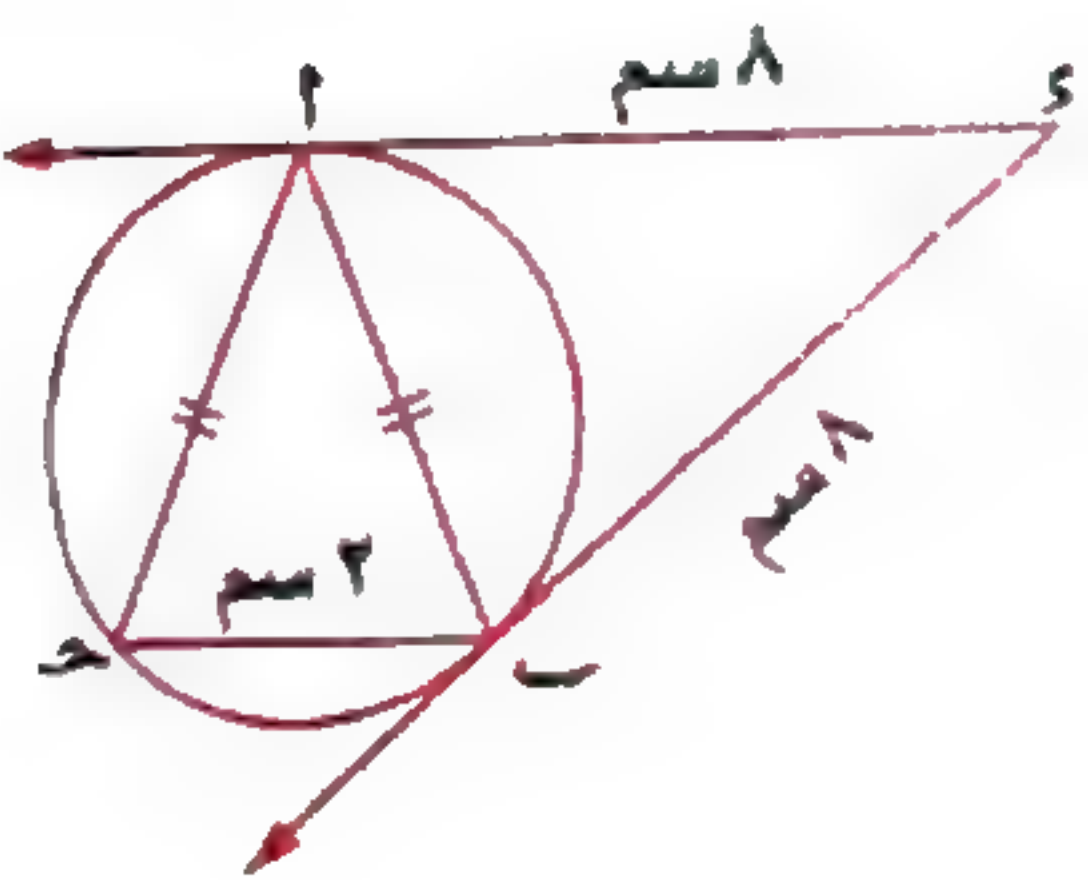
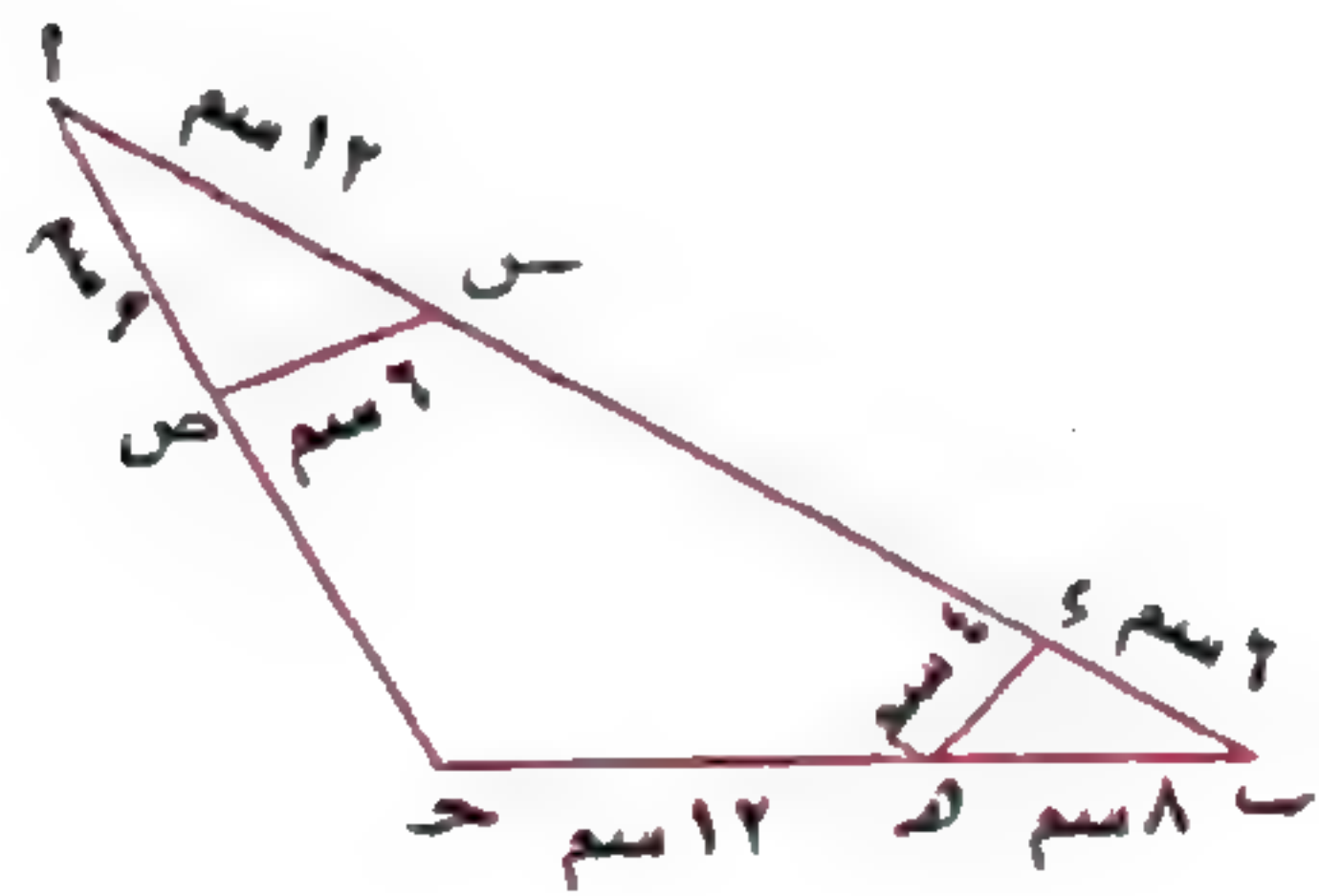
(٤) في الشكل المقابل :

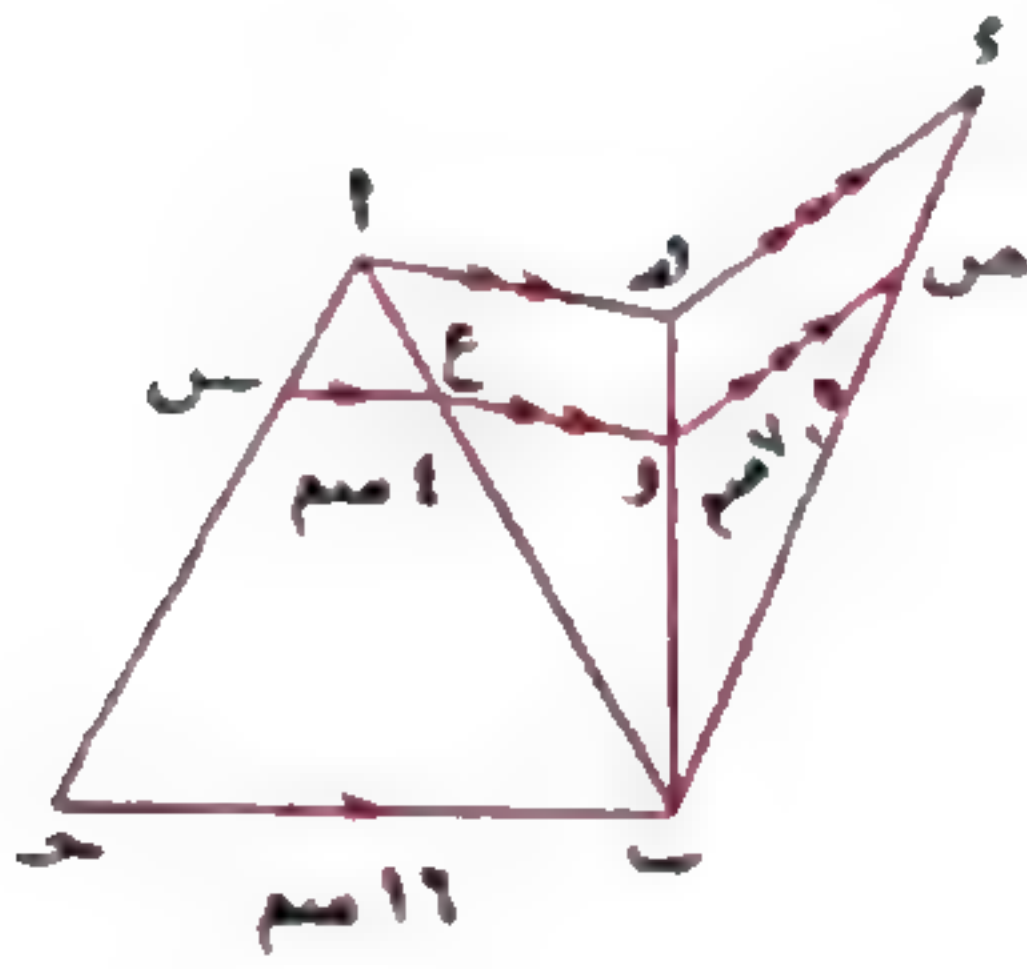
إذا كان محيط $\Delta د س ص$ = ٨ سم

فإن محيط $\Delta ا ب ح$ = سم

- (١) ١٨ (ب) ٢٤

(ج) ٣٦ (د) ٤٨





(٥) في الشكل المقابل :

سم = هـ

(١) ٨

(ب) ١٠

(ج) ١٢

(د) ١٥

(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ح = ٩ سم ، ب د = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم

فإن محيط Δ هـ أ = سم

(١) ١٨

(ب) ١٦

(ج) ١٤

(د) ١٢

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : ب د (أ د) = ب د (د د)

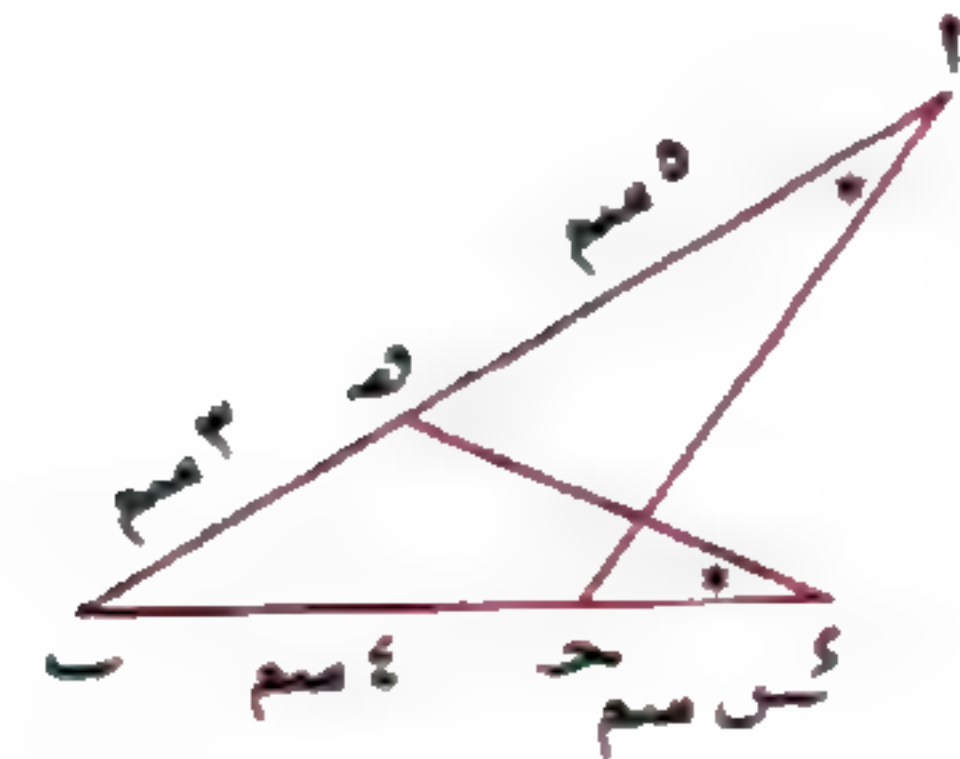
فإن : س = سم

(١) ٥

(ب) ٤

(ج) ٢

(د) ٢



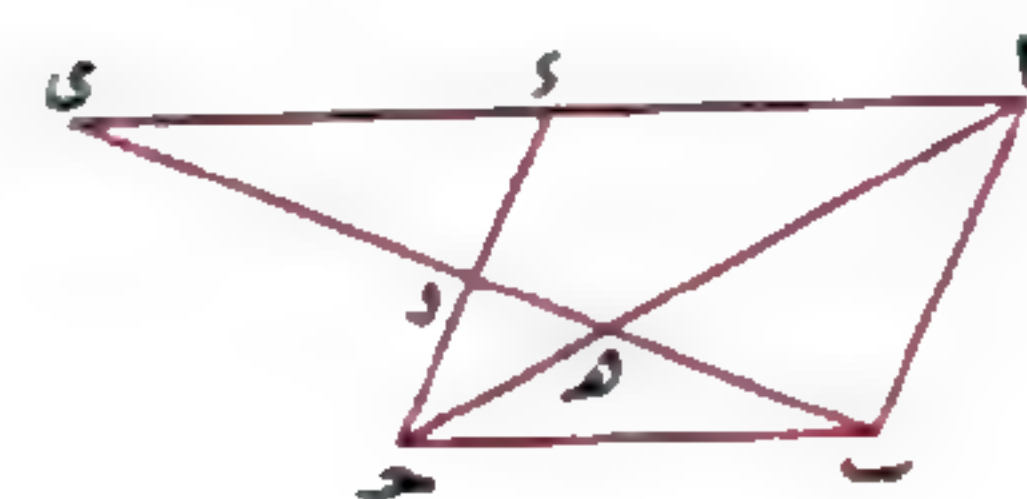
١١ في الشكل المقابل :

أ ب ح متوازي أضلاع ، و \exists د ح

رسم ب و فقطع أ ح في هـ ، وقطع أ د في ي

أثبت أن : (١) Δ هـ أ ي \sim Δ ح د ب

(٢) $(هـ ب)^2 = هـ ي \times هـ و$



١٢ أ ب ، د ح وتران في دائرة ، أ ب \cap د ح = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة

أ ب = ٤ سم ، د ح = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم

أثبت أن : Δ هـ أ د \sim Δ ح ب هـ ، ثم أوجد : طول ح د

١٢٠ سم

١٣ أ ب قطر في دائرة ، ح نقطة تنتمي للدائرة ، رسم أ ح فقطع المماس للدائرة عند ب في نقطة د

أثبت أن : (ب ح)^2 = ح أ \times ح د

١٤ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في أ ، رسم أ د \perp ب ح ليقطعه في د

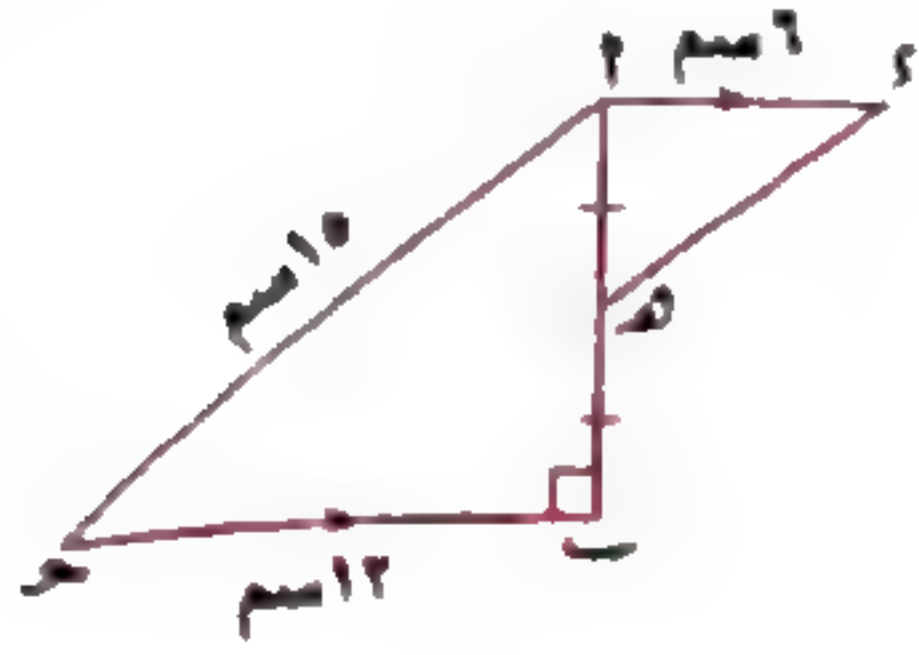
إذا كان : $\frac{ب}{ح} = \frac{١}{٢}$ ، أ د = ٦ ، $\sqrt{٢٦}$ سم

٦ سم ، $\sqrt{٢٦}$ سم ، $\sqrt{٦٢}$ سم

أوجد : طول كل من ب د ، أ ب ، أ ح

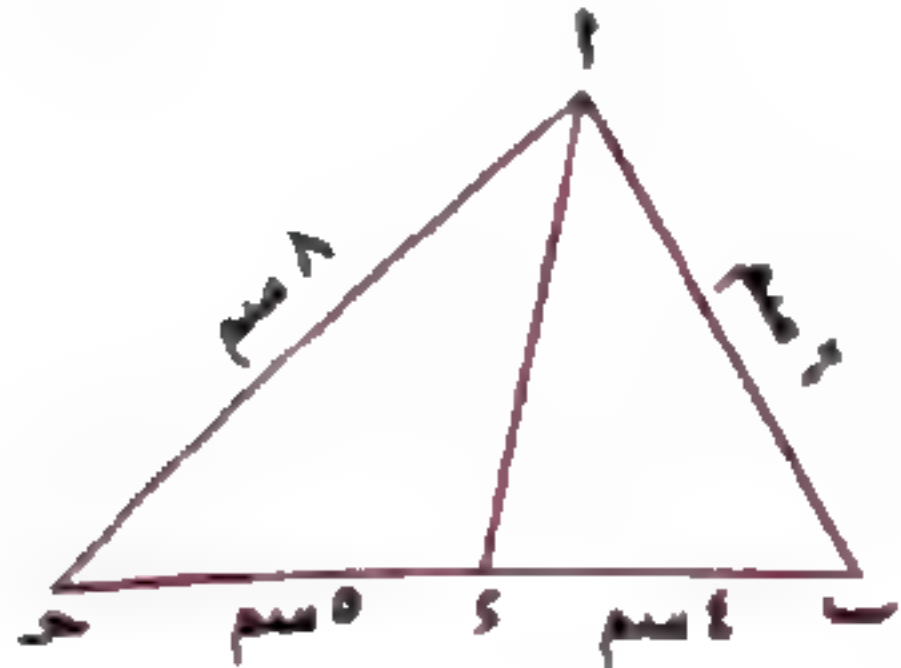
٢٥ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ح = ١٥ سم ، ب ح = ١٢ سم
 د منتصف أ ب ، د ع // ب ح بحيث أ د = ٦ سم
 أثبت أن : $\Delta أ ب ح \sim \Delta د ع ح$ واستنتج أن : $د ع // أ ح$



٢٦ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : د ع // ب ح بحيث : ب د = ٤ سم
 د ح = ٥ سم فإذا كانت : أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٨ سم
 (١) أثبت أن : $\Delta أ ب ح \sim \Delta د ع ح$



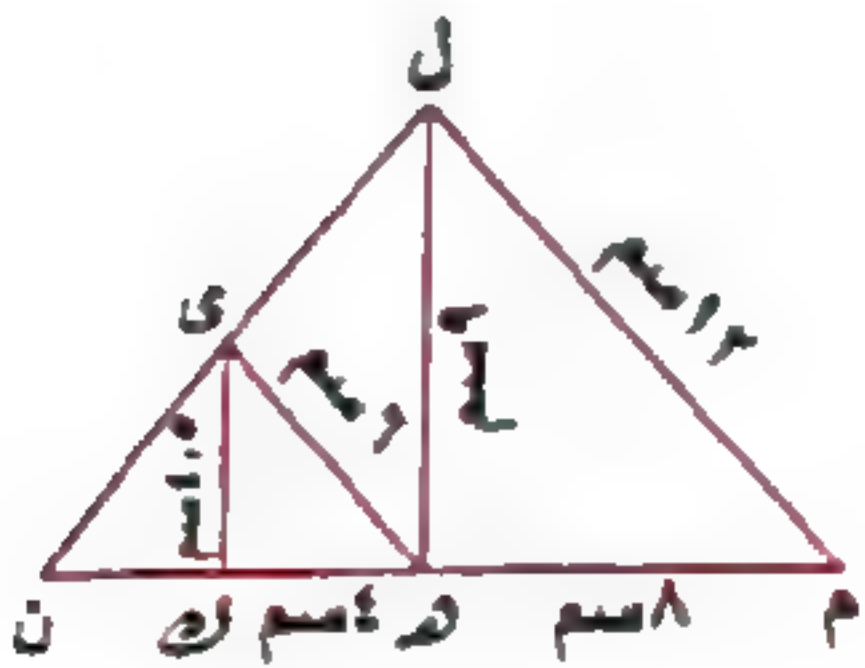
"١/٣ سم"

(٢) أوجد : طول أ د

(٣) أثبت أن : أ ب مماسة للدائرة المارة برءوس $\Delta د ع ح$

٢٧ في الشكل المقابل :

ل م ن مثلث ، د ع // م ن ، ه ح // م ن ، ي ع // ل ن
 ل م = ١٢ سم ، م ن = ٨ سم ، ل ن = ٩ سم
 ه ي = ٦ سم ، ه د = ٤ سم ، ل ه = ٥ سم
 أثبت أن : $ي ع // ل ه$ ، $ه ي // م ل$ ثم احسب : طول ن ه



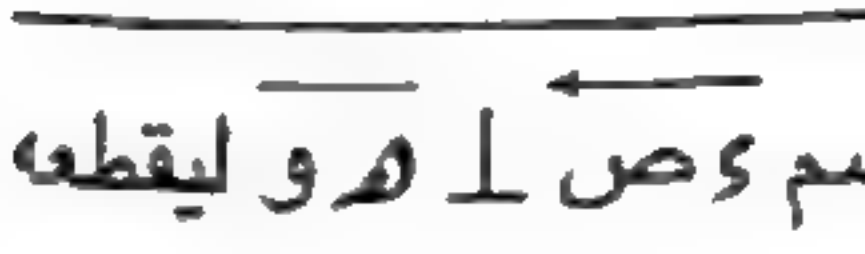
"٤ سم"

٢٨ س ص ع ، ل م ن مثلثان متساويان في قياسات زواياهما المتناظرة ، ص ع = ٨ سم

م ن = ١٢ سم ، رسم س د \perp ص ع قابله في د ورسم ل ه \perp م ن قابله في ه
 فإذا كان : د س = ٧ سم فأوجد : طول ل ه

"١٠ ١/٢ سم"

٢٩ أ ب ح ، د ه و مثلثان متشابهان. رسم أ س \perp ب ح ليقطعه في س ، ورسم د ص \perp ه و ليقطعه في ص أثبت أن : ب س \times ص و = ح س \times ص ه



٣٠ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، ب ح = ١٢ سم ، أ ح = ١٥ سم ، د ع // ب ح

بحيث د ع = ١/٤ ب ح ، رسم د ه \perp ب ح قطع أ ح في ه

أوجد : مساحة الشكل أ ب د ه

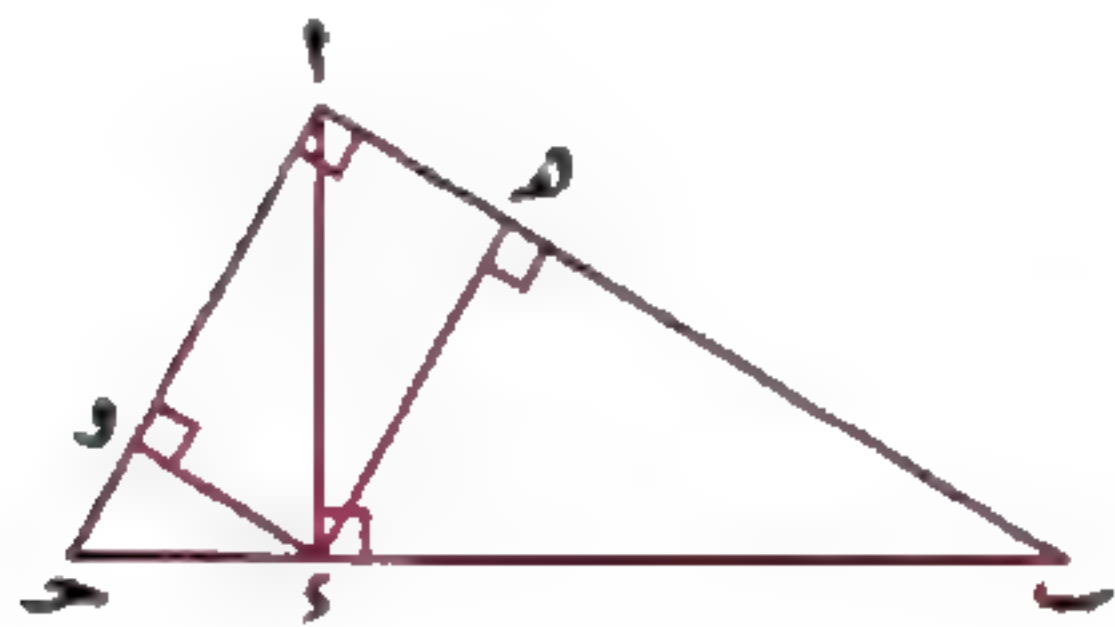
"٢٣ ٥/٨ سم^٢"

٣١ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في أ ، د ع // ب ح بحيث : $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{د ع}{أ ب}$

أثبت أن : (١) $\Delta أ ب ح \sim \Delta د ع ح$ (٢) $د ع \perp أ ب$

٢١ إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta AED$ وكانت S منتصف BC ، V منتصف AD ،
حيث $BC \parallel AD$ ، W ضلعان متناظران في المثلثين فأثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$

٢٢ AB جزء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه AC ، BD في E ، فإذا كان : $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$ ،
أثبت أن : (١) $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (٢) BE ينصف AD BC



٢٣ في الشكل المقابل :

AB مثلث قائم الزاوية في A

$AD \perp BC$ ، $AE \perp AD$ ، $DE \perp AC$ ،

أثبت أن : (١) $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$

(٢) مساحة المستطيل $AEDF = AD \times DE = AC \times EF$

٢٤ AB جزء مستطيل ، رسم $DE \perp AC$ فقطع AB في E ، BC في F و

أثبت أن : مساحة المستطيل $AEDF = AD \times DE = AC \times EF$

٢٥ AB جزء شبه منحرف فيه : $DE \parallel BC$ تقاطع قطراه AC ، BD في M

أثبت أن : $AM \times BM = CM \times DM$

وإذا كان : $AE = 9$ سم ، $BE = 12$ سم ، $CE = 14$ سم احسب : طول AM « ٦ سم »

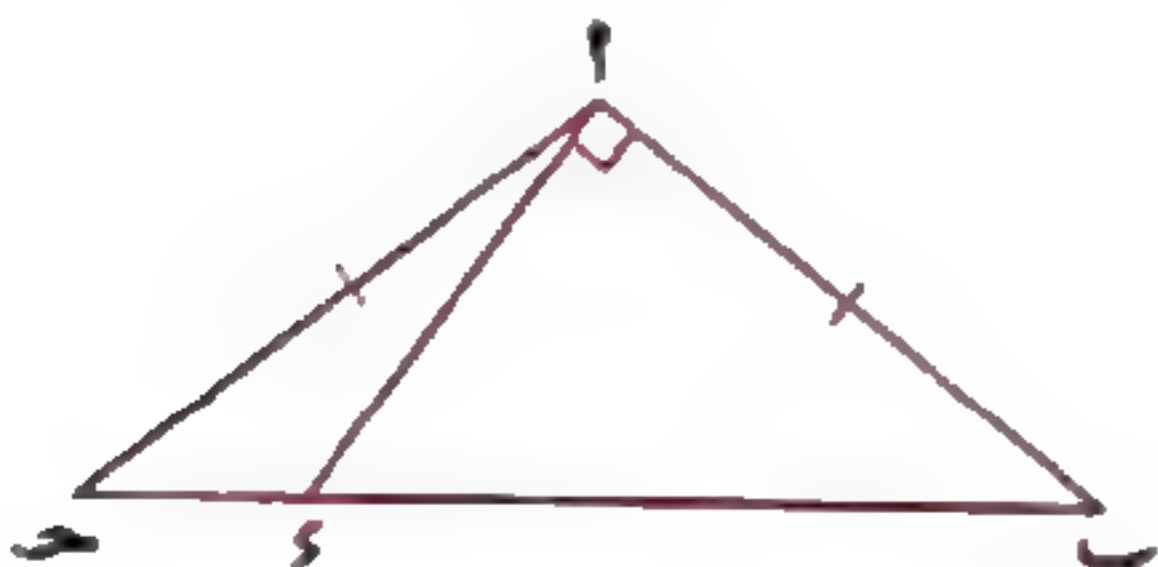
٢٦ AB جزء مثلث ، $E \in BC$ ، رسمت AE وفرضت عليها نقطة F ثم رسم

$EF \parallel AB$ ويقطع AE في S ، ورسم $FD \parallel AC$ ويقطع AE في V

أثبت أن : (١) $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (٢) $SV \times VE = AE \times EV$

٢٧ AB قطر في دائرة M ، $C \in AB$ وتقع خارج الدائرة ، رسمت CD مماسة للدائرة تمسها عند D

ثم رسم $DE \perp AB$ قطعه في E أثبت أن : $(CD)^2 = CE \times CB = CM \times CB$



٢٨ في الشكل المقابل :

AB مثلث منفرج الزاوية في A ، $AB = AC$

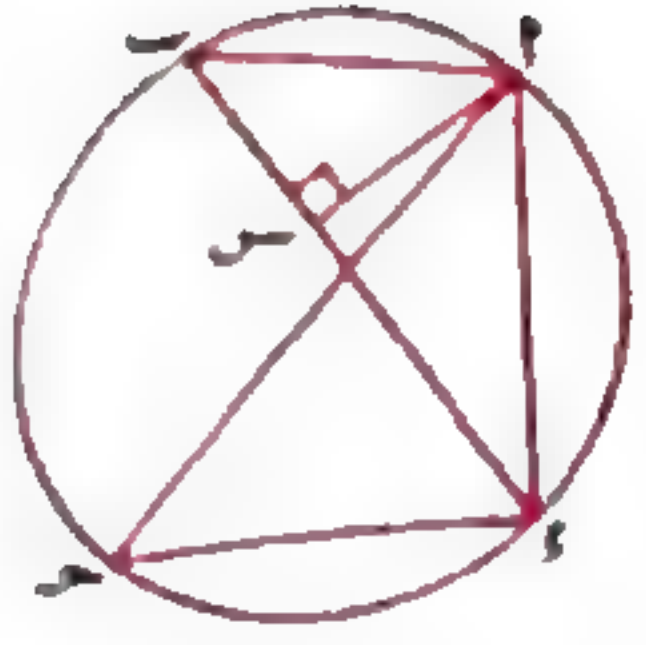
رسم $AD \perp AB$ ويقطع BC في D

أثبت أن : $2(AB)^2 = BC \times BD$

٢٩ AB جزء شبه منحرف فيه : $DE \parallel BC$ ، $U \in AD$ ، $90^\circ = \angle AEU$ ، $EU \perp AD$

بحيث $AB \times AC = AD \times DE$ ، $BC \times CD = AD \times DE$

أثبت أن : $2(AB)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2$



3 في الشكل المقابل :

$$AS \perp PS, \frac{AS}{AP} = \frac{PS}{BP}$$

(2) أح قطر في الدائرة.

أثبت أن : (1) $\Delta APS \sim \Delta BPS$

3 أح مثلث فيه : $AP = BP$ ، \exists ح خارج المثلث، \exists ح خارج المثلث بحيث $(AP)^2 = PS \times PS$ ، أثبت أن : $\Delta APS \sim \Delta BPS$

تقيس مستويات عليا من التفكير



3 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } \frac{PS}{SV} = \frac{PS}{SV}$$

فإن : $AP = \dots$ سم

(ب) 15

(1) 16

(ج) 12

(د) 10



(2) في الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات ΔABC

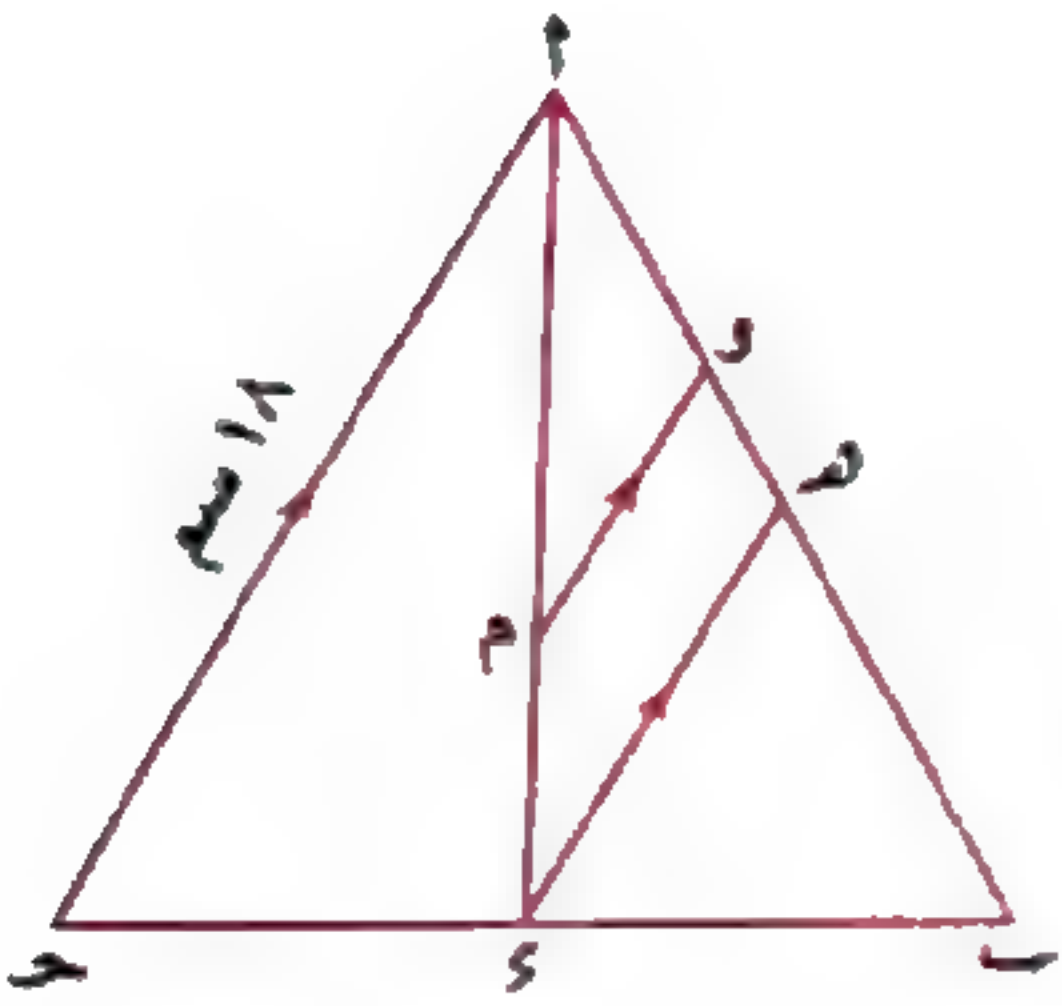
فإن : طول $OM = \dots$ سم

(1) 4

(ب) 5

(ج) 6

(د) 8



(3) في الشكل المقابل :

ح \exists س، $\frac{AS}{AP} = \frac{PS}{BP}$ ، $\frac{AS}{AP} = \frac{PS}{BP}$

، $AP = 6$ سم، $AS = 5$ سم

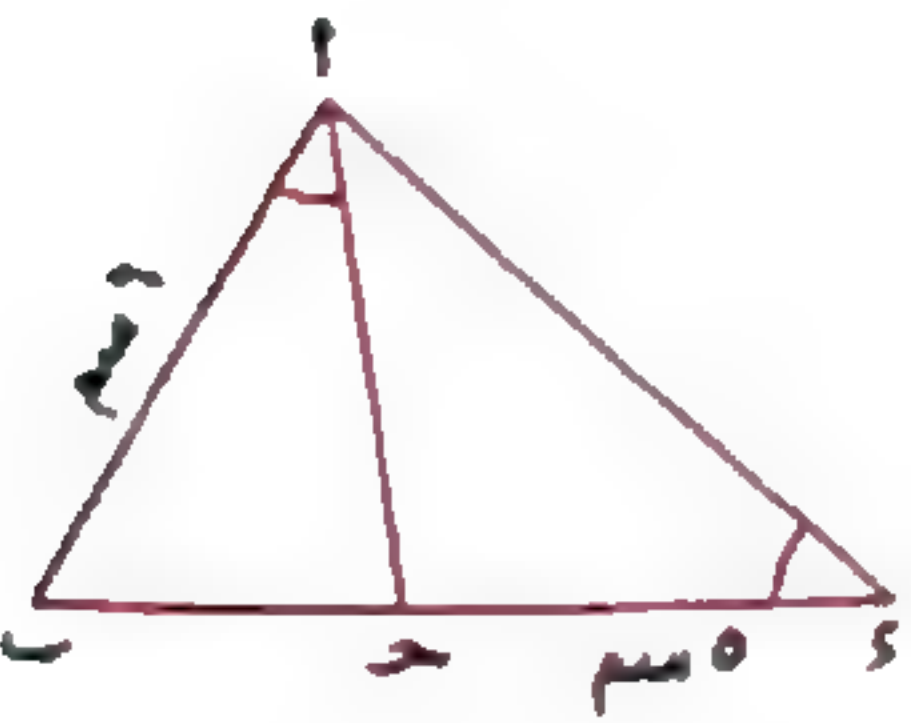
فإن : $PS = \dots$ سم

(1) 3

(ب) 4

(ج) 5

(د) 6



(4) في الشكل المقابل :

إذا كان : $PS^2 = AS \times AS$

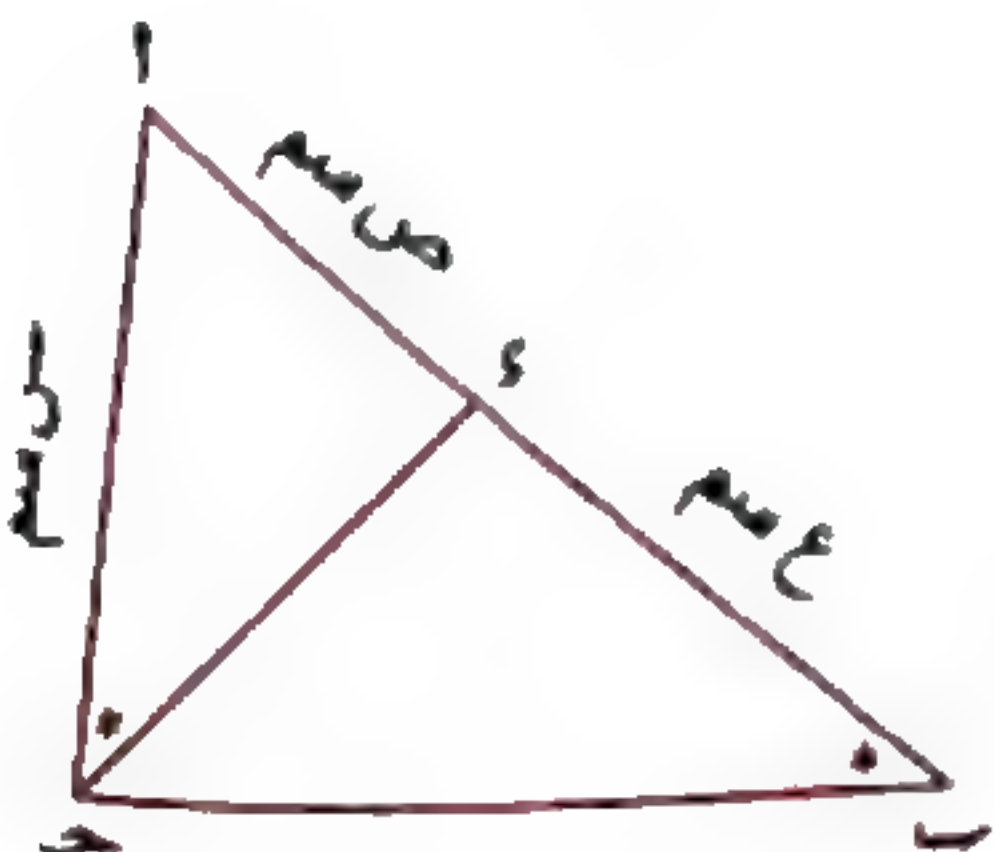
فإن : $PS \times PS = \dots$ سم

(1) 4

(ب) 8

(ج) 12

(د) 16

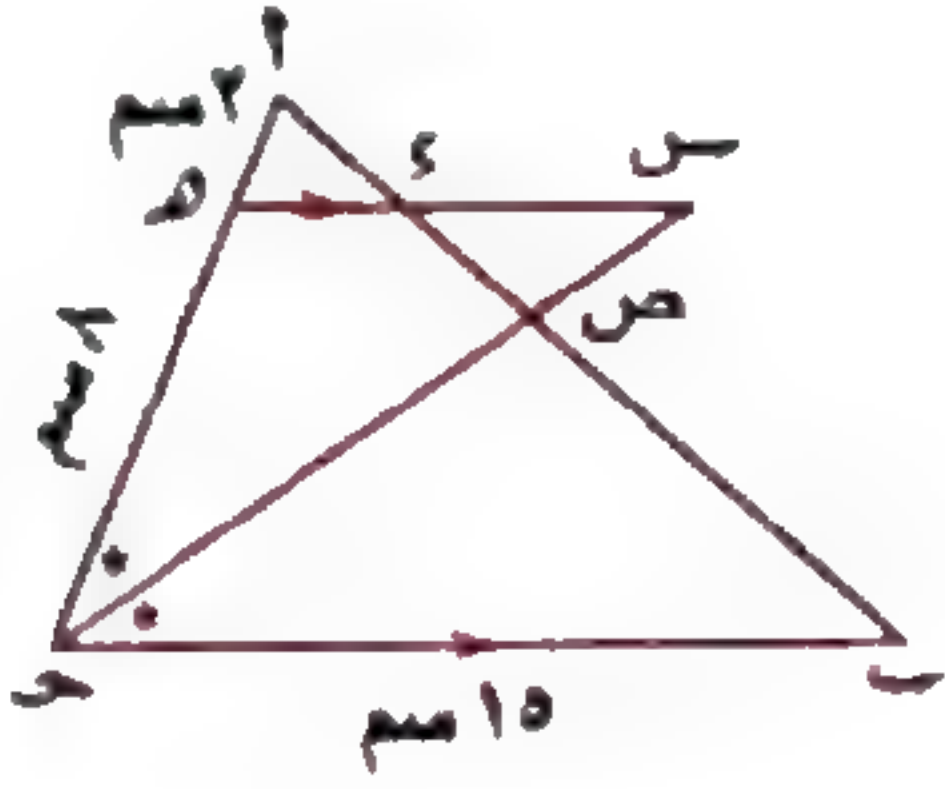


(٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{ح س}$ ينصف $\overrightarrow{د أ}$ ح ب
، $\overrightarrow{س د} // \overrightarrow{ب ح}$ ،

فإن : $س د =$ سم

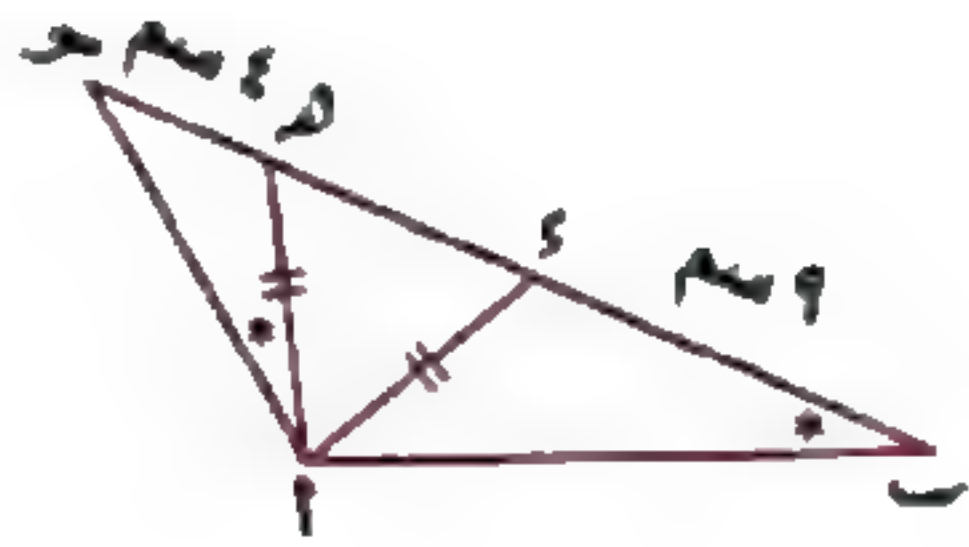
(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦



(٦) في الشكل المقابل :

$س أ =$ سم

(أ) ١٠ (ب) ٩ (ج) ٨ (د) ٦



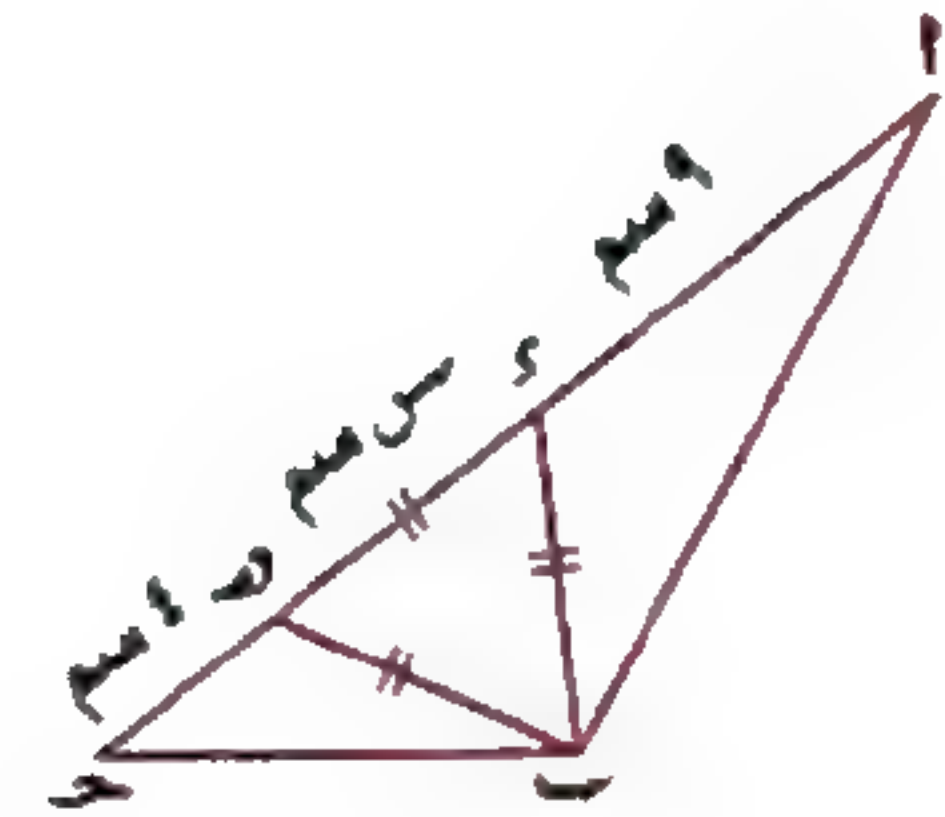
(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle (د أ ح) = 120^\circ$

، $\triangle س د ه$ متساوي الأضلاع

فإن : $س ح =$ سم

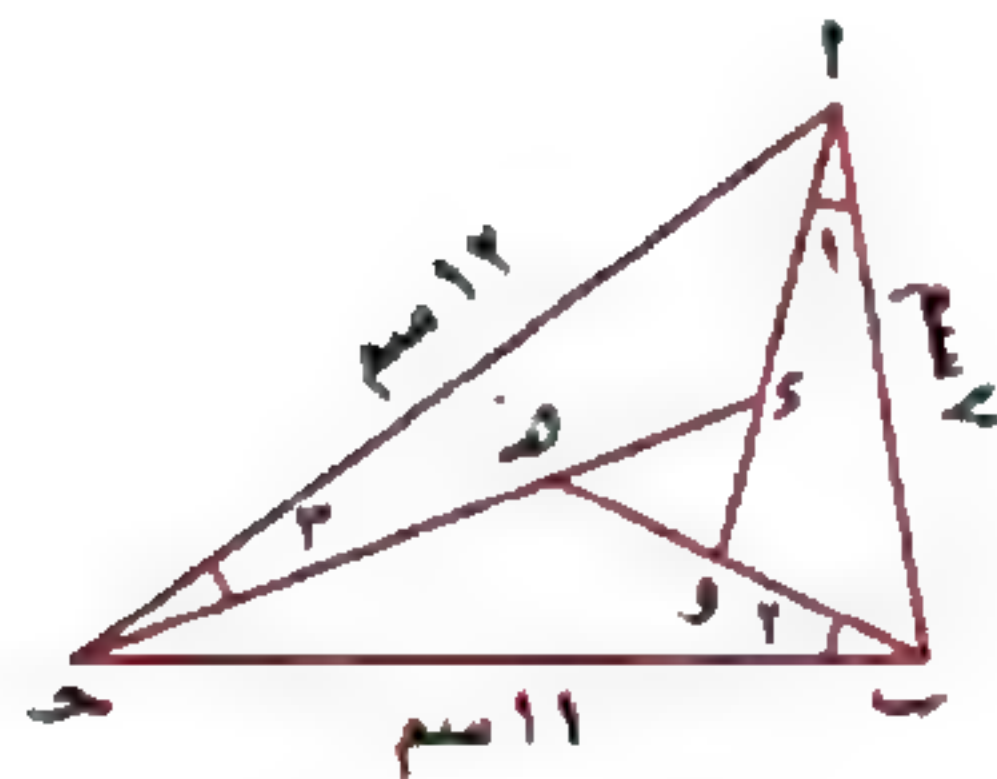
(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨



(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle (د أ ح) = \angle (د ب ح) = \angle (د ج ح)$

فإن : $س د ه : ه و : و د =$



(أ) ١٢ : ١١ : ٧ (ب) ١٢ : ١١ : ٧ (ج) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١٢ : ١١ : ٧

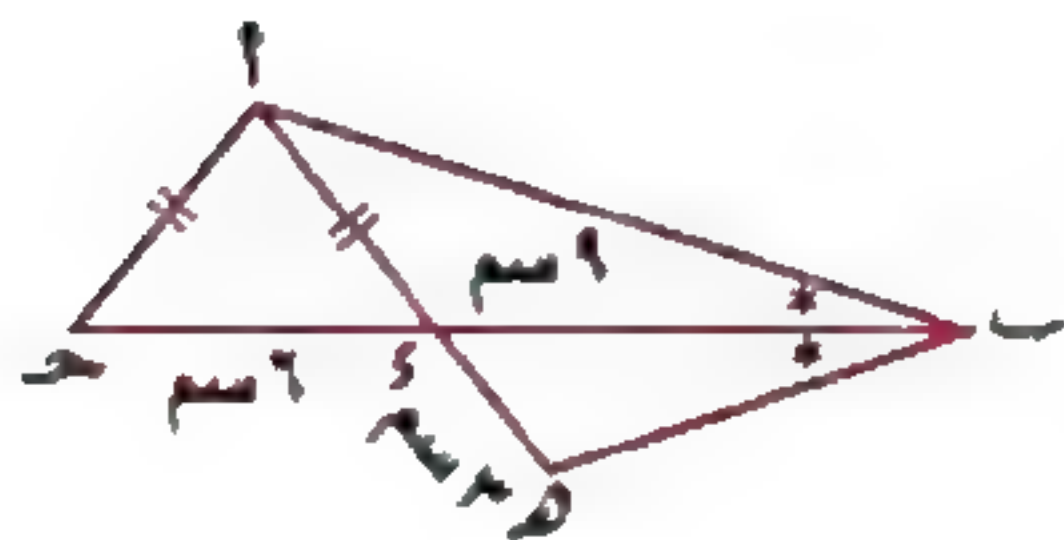
(٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{س د}$ ينصف $\overrightarrow{أ ب ه}$

، $س د = ٩$ سم ، $د ح = ٦$ سم ، $س ه = ٣$ سم

فإن محيط $\triangle س د ح =$ سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (ج) ١٦ (د) ١٨



(١٠) في الشكل المقابل :

$$\overline{سح} // \overline{دو} ، \overline{صا} // \overline{حز}$$

فإن : $دب = \dots\dots\dots$ سم

(ب) ٣

(١) ٢

(د) ٥

(ج) ٤

(١١) في الشكل المقابل :

$$س + ص = \dots\dots\dots \text{سم}$$

(ب) ١٥

(١) ١٢

(د) ٢١

(ج) ١٨

(١٢) في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } \overline{وس} \perp \overline{أب} ، \overline{دو} \perp \overline{صا} \perp \overline{بح}$$

$$، \overline{هـع} \perp \overline{أح} ، \overline{أح} = ٩ \text{ سم}$$

$$، \overline{بح} = ١٢ \text{ سم} ، \overline{دو} = ٤ \text{ سم}$$

فإن : $هو = \dots\dots\dots$ سم

(ب) ٣

(١) ٢

(ج) ٥

(د) ٦

(١٣) في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } \overline{سح} = \overline{دو} = ٢$$

فإن : $أه = \dots\dots\dots$ سم

(ب) ٢

(١) ١

(ج) ٣

(د) ٤

(١٤) في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } \overline{أب} \text{ مثلث قائم الزاوية في } \overline{أ}$$

$$، \overline{دو} \text{ و } \overline{صا} \text{ مربع}$$

$$، \overline{بم} = ٨ \text{ سم} ، \overline{وح} = ٢ \text{ سم}$$

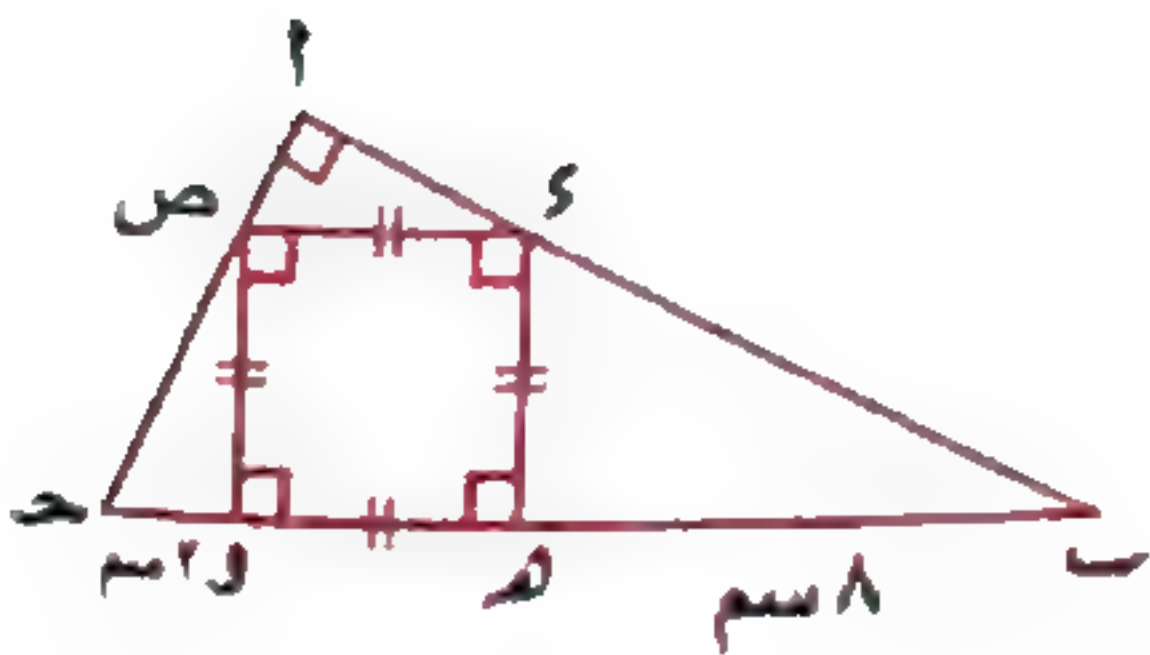
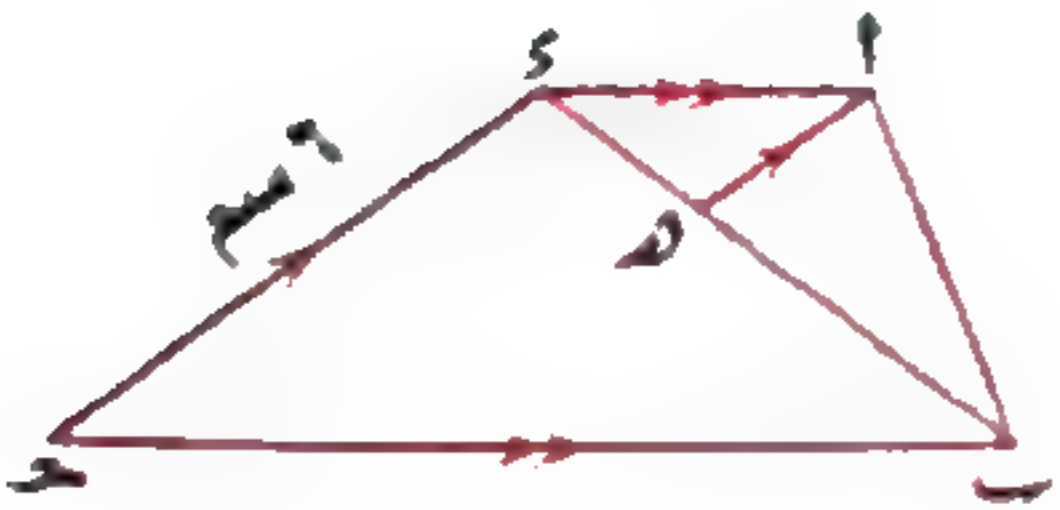
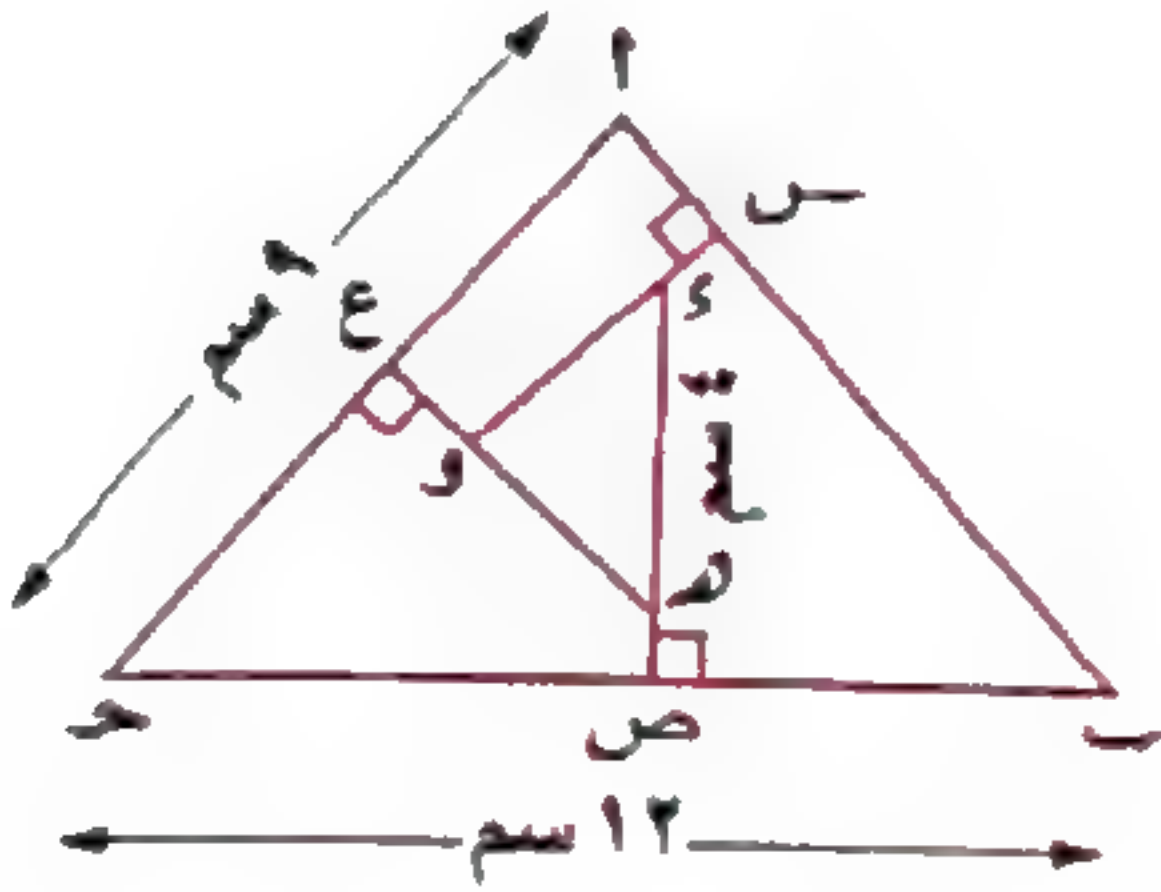
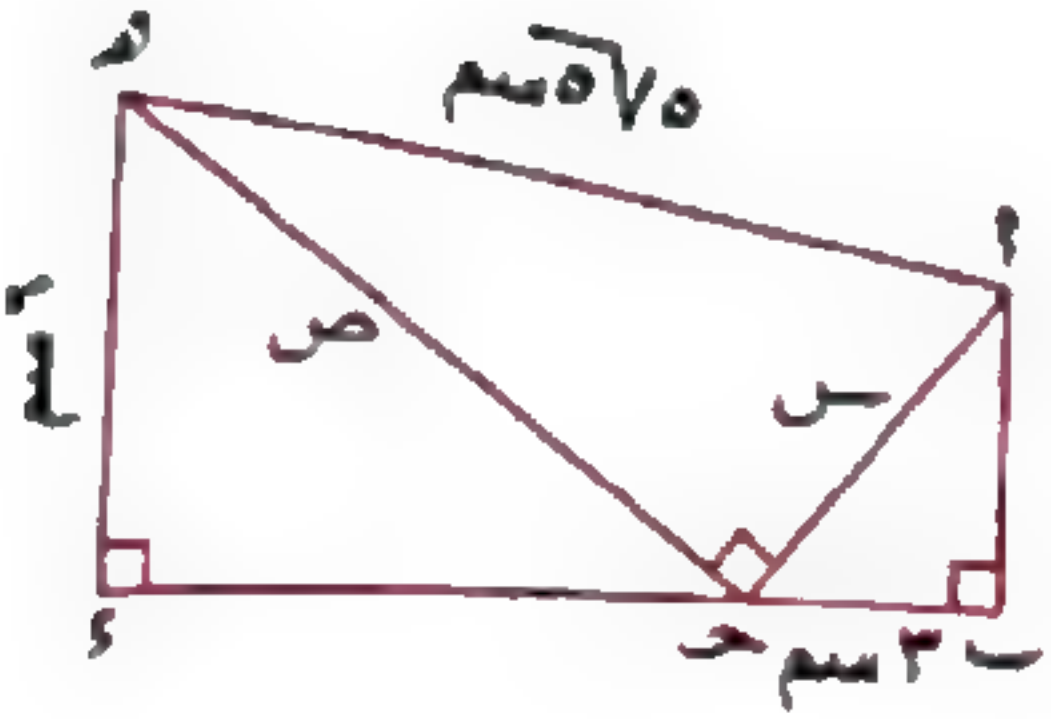
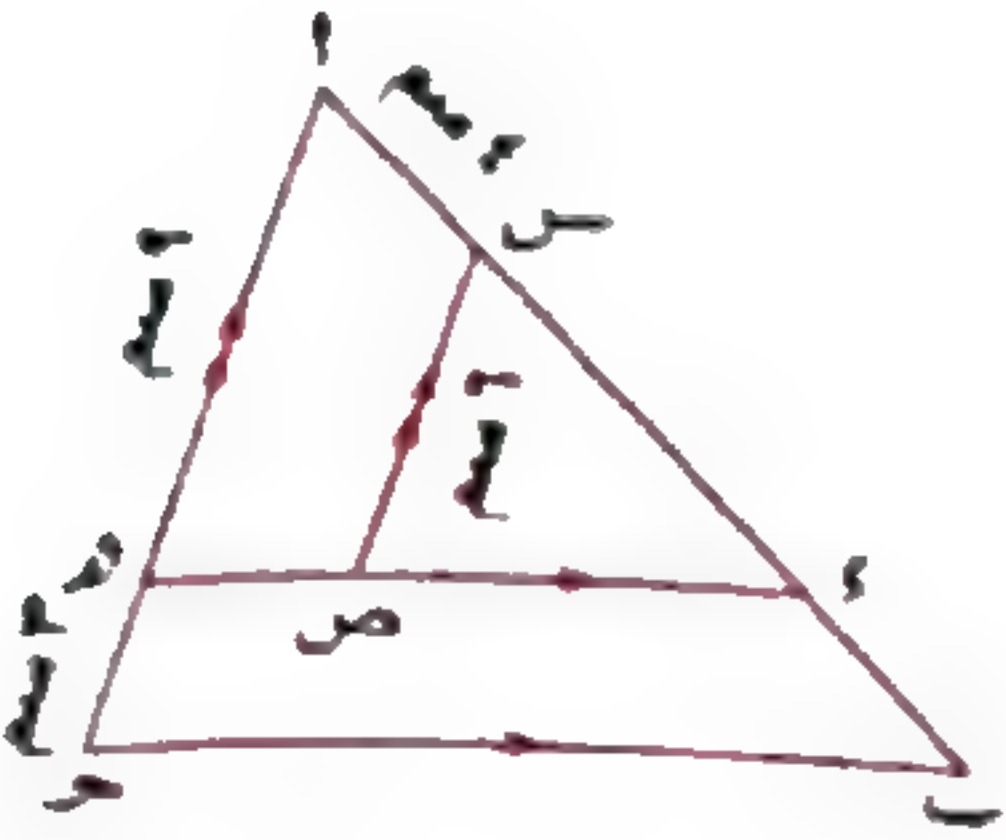
فإن : مساحة المربع $دو$ و $صا$ = $\dots\dots\dots$ سم^٢

(ب) ١٦

(١) ٤

(ج) ٢٠

(د) ٣٦



(١٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب} // \overline{وه} // \overline{حء}$

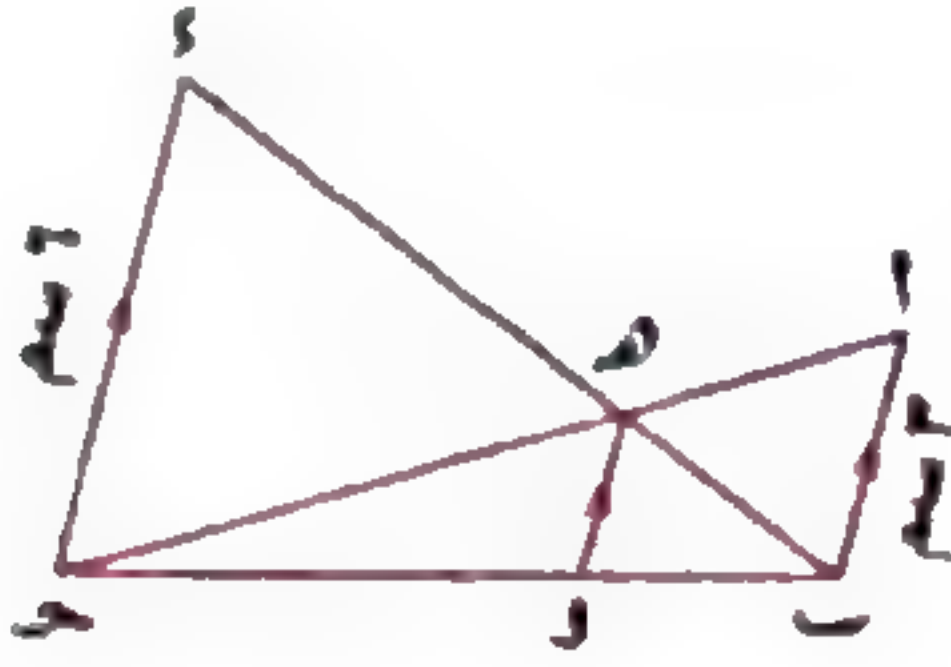
فإن : $وه = \dots \dots \dots$ سم

(أ) ٢,٥

(ب) ٢

(ج) ١,٥

(د) ١



(١٦) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{وه} // \overline{بء}$ ، $\overline{هء} // \overline{أء}$

، $بء = ٦$ سم ، $هء = ٨$ سم

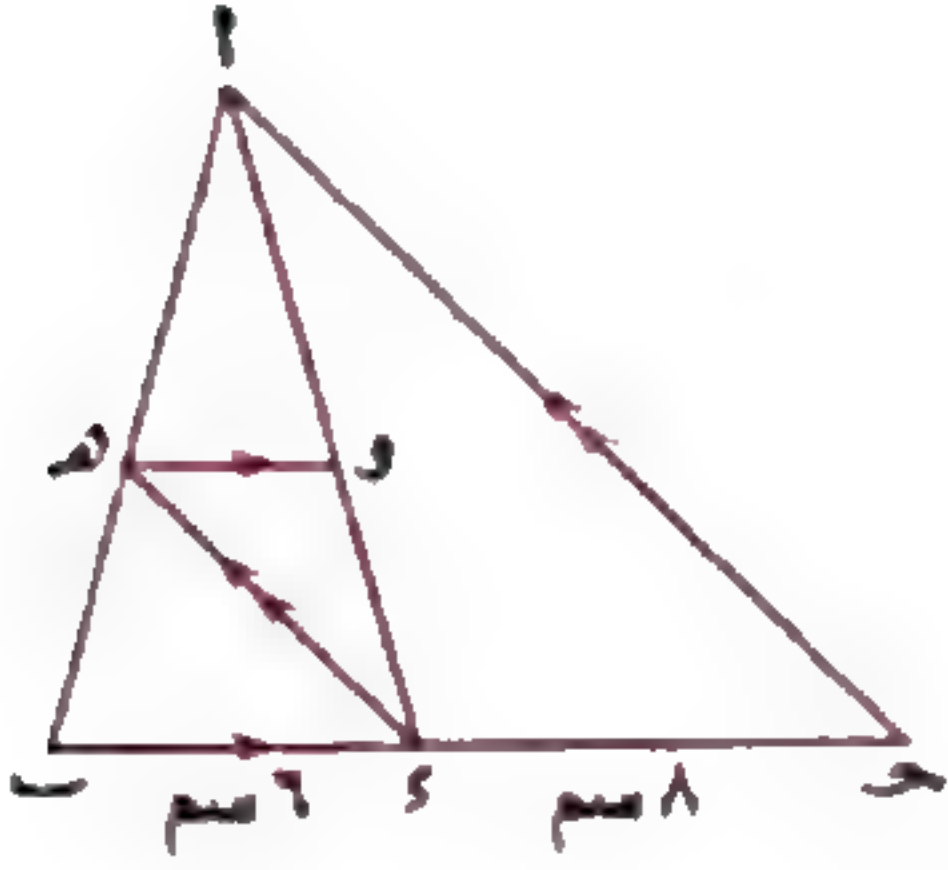
فإن : $وه = \dots \dots \dots$ سم

(أ) $\frac{١٢}{٧}$

(ب) $\frac{١٨}{٧}$

(ج) $\frac{٢٤}{٧}$

(د) $\frac{٢٨}{٧}$



(١٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle (أءء) = \angle (دءهء)$

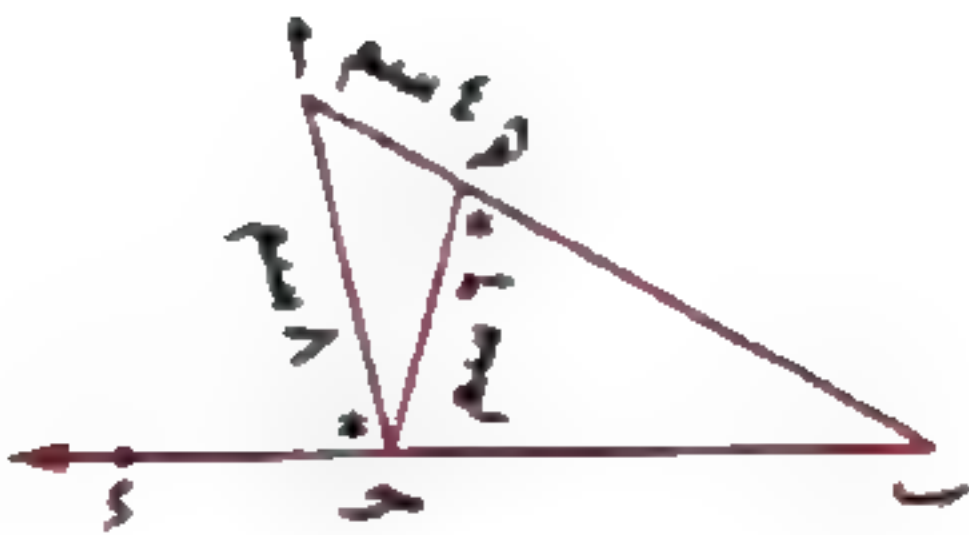
فإن : $بء + بء = \dots \dots \dots$ سم

(أ) ١٦

(ب) ١٨

(ج) ٢٠

(د) ٢٤



(١٨) في الشكل المقابل :

أءءء شبه منحرف

، $\angle (أءء) = \angle (دءهء) = ٩٠^\circ$

، $\overline{أء} \perp \overline{بء}$

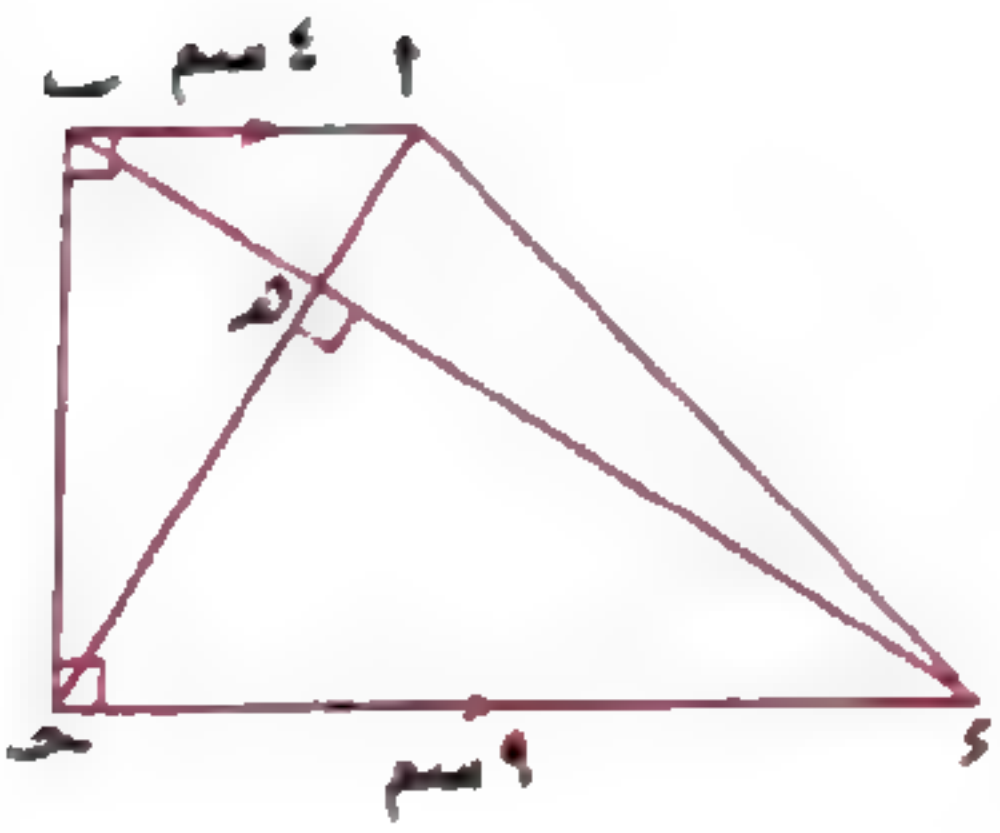
فإن مساحة شبه المنحرف أءءء = $\dots \dots \dots$ سم^٢

(أ) ١٢

(ب) ٢٦

(ج) ٣٩

(د) ٦٠





العلاقة بين مساحتي مضعين متشابهين

3 الدرس

نعلم أن النسبة بين محيطي مضعين متشابهين تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ، وفي هذا الدرس سنتناول العلاقة بين مساحتي مضعين متشابهين.

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين

أولاً

نظرية ٣

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

المعطيات

المطلوب

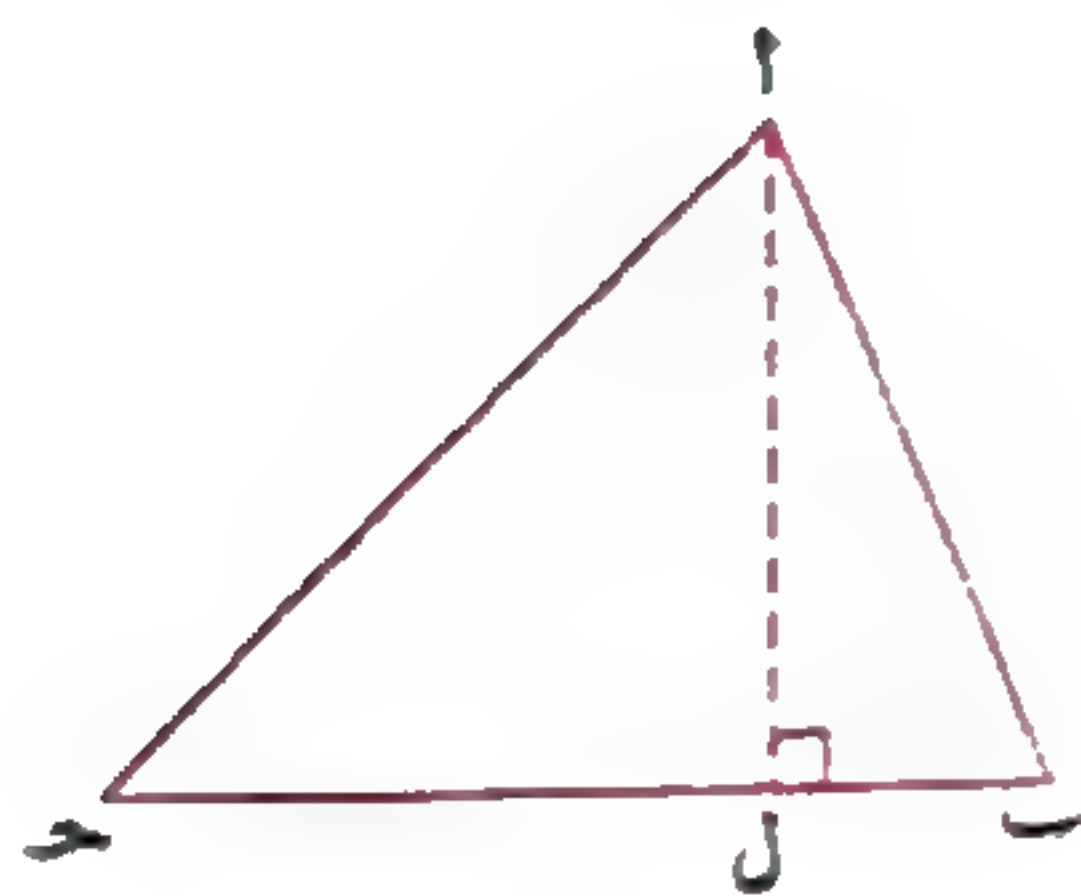
العمل

البرهان

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\text{إثبات أن : } \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$$

$$\left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 =$$



نرسم $AL \perp BC$ يقطعها في ل ، $A'L' \perp B'C'$ يقطعها في م

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

$$\therefore \Delta ABL \sim \Delta A'B'M, \quad \angle B = \angle B', \quad \angle ALB = \angle A'MB = 90^\circ$$

$$\therefore \frac{AL}{A'M} = \frac{AB}{A'B'} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{AL}{A'M} \times \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB \times BC}{A'B' \times B'C'} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} \quad (2)$$

وبالتعويض من (١) ، (٢) في (٣) ينتج أن :

$$\left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{BC}{B'C'} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} \quad (\text{وهو المطلوب})$$

ملاحظة ١

من برهان النظرية السابقة نستطيع ان نستنتج ان :

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

مثال ١

إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي $\frac{9}{16}$ ، ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم أوجد محيط المثلث الأكبر.

الحل

بفرض أن المثلثين المتشابهين هما : ΔABC ، ΔDEF حيث ΔABC هو المثلث الأصغر :

$$\frac{9}{16} = \frac{(\Delta ABC)}{(\Delta DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \therefore \frac{3}{4} = \frac{AB}{DE}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{AB}{DE} = \frac{\text{محيط } \Delta ABC}{\text{محيط } \Delta DEF} \therefore \frac{3}{4} = \frac{60}{\text{محيط } \Delta DEF}$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta DEF = \frac{4 \times 60}{3} = 80 \text{ سم}$$

(وهو المطلوب)

مثال ٢

ΔABC مثلث مساحته ٦٢,٥ سم^٢ ، رسم $DE \parallel BC$ ويقطع AB في D ، AC في E فإذا كان $AD : DB = 2 : 2$ فأوجد : مساحة الشكل $DBCE$

الحل

في ΔABC : $DE \parallel BC$

$$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{(\Delta ADE)}{(\Delta ABC)}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{(\Delta ADE)}{62,5}$$

$$\therefore (\Delta ADE) = 62,5 \times \frac{4}{9} = 10 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة الشكل } DBCE = (\Delta ABC) - (\Delta ADE) = 62,5 - 10 = 52,5 \text{ سم}^2$$

(وهو المطلوب)

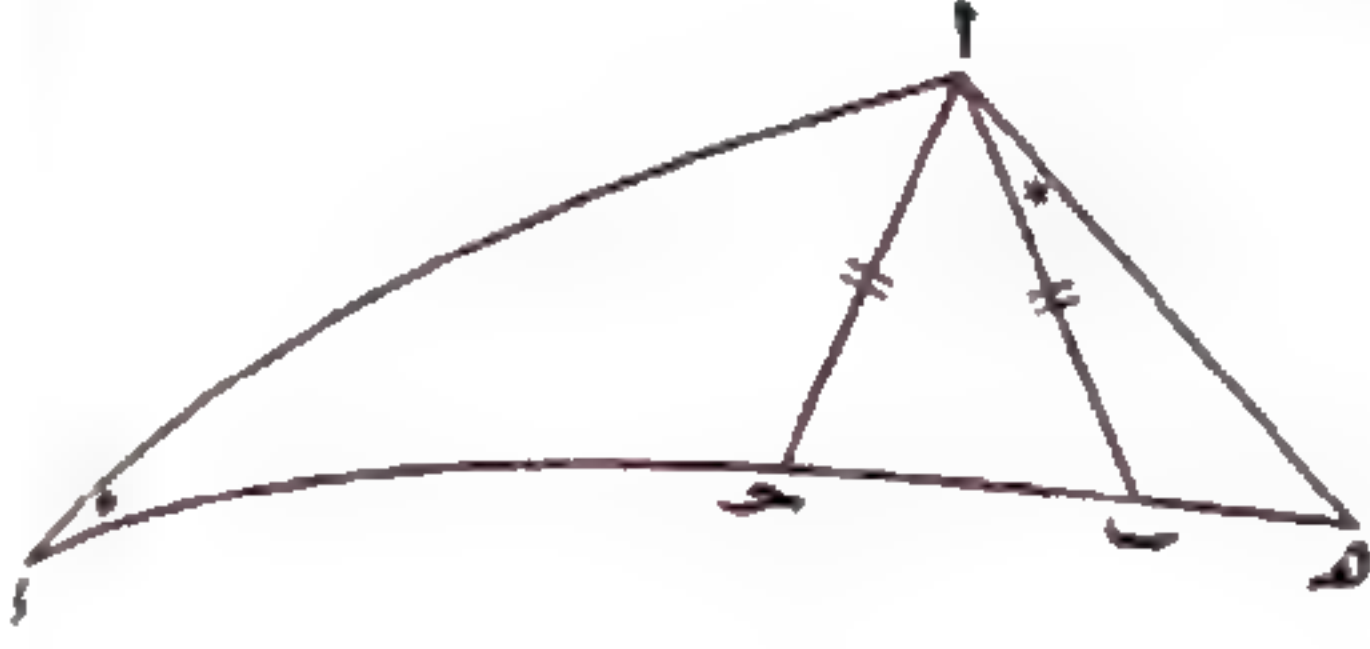
مثال ٣

ΔABC مثلث فيه : $AD = DB$ ، $DE \parallel BC$ خارج المثلث ، DE خارج المثلث بحيث

$(\Delta ADE) = (\Delta BDE)$ فإذا كانت مساحة ΔABC أربعة أمثال مساحة ΔADE

فأثبت أن : $DE = 2BC$

الحل



$\therefore \Delta \text{أ ب م} \sim \Delta \text{د ح أ}$ ، فيهما : د ح مشتركة

$$\frac{\text{ق (د أ ب م)}}{\text{ق (د ح أ)}} = \frac{\text{ق (أ ب م)}}{\text{ق (أ ح د)}}$$

، $\frac{\text{ق (د أ ب م)}}{\text{ق (د ح أ)}} = \frac{\text{ق (أ ب م)}}{\text{ق (أ ح د)}}$ (مكملتان لزاويتين متساويتين في القياس)

$$\therefore \frac{\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ح د}}\right)^2}{\left(\frac{\text{أ ح}}{\text{د ح}}\right)^2} = \frac{\text{م (أ ب م)}}{\text{م (أ ح د)}}$$

$$\therefore \Delta \text{أ ب م} \sim \Delta \text{د ح أ}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ح د}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{ح د}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ح د}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{ح د}$$

$$\therefore \text{ح د} = 2 \text{أ ب}$$

(وهو المطلوب)

مثال ٤

أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{5}{3}$ ، رسم آ د مماساً للدائرة عند أ قطع ب ح في د

أوجد : م (أ ح د) : م (أ ب د)

الحل

$\therefore \Delta \text{أ ب د} \sim \Delta \text{أ ح د}$ ، فيهما : د ح مشتركة

، $\frac{\text{ق (أ ب د)}}{\text{ق (أ ح د)}} = \frac{\text{ق (أ ب د)}}{\text{ق (أ ح د)}}$ (مماسية ومحيطية مشتركتان في أ ح)

$$\therefore \Delta \text{أ ب د} \sim \Delta \text{أ ح د}$$

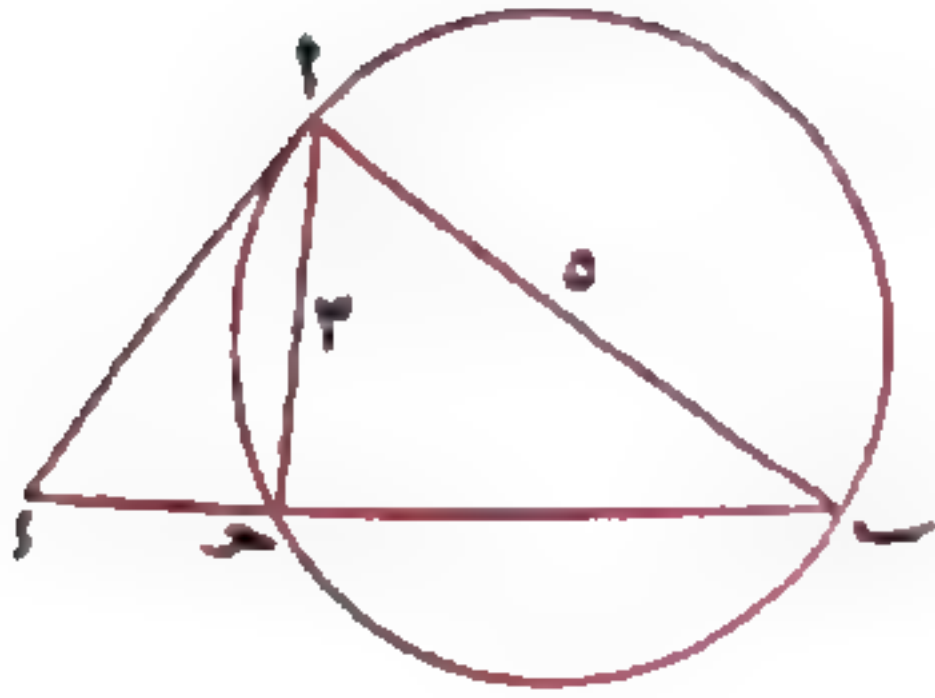
$$\therefore \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}\right)^2 = \frac{\text{م (أ ب د)}}{\text{م (أ ح د)}}$$

$$\therefore \frac{9}{25} = \frac{\text{م (أ ب د)}}{\text{م (أ ح د)} + \text{م (أ ب د)}}$$

$$\therefore 25 \text{ م (أ ح د)} = 9 \text{ م (أ ب د)} + 9 \text{ م (أ ح د)}$$

$$\therefore 16 \text{ م (أ ح د)} = 9 \text{ م (أ ب د)}$$

$$\therefore \frac{9}{16} = \frac{\text{م (أ ب د)}}{\text{م (أ ح د)}}$$



(وهو المطلوب)

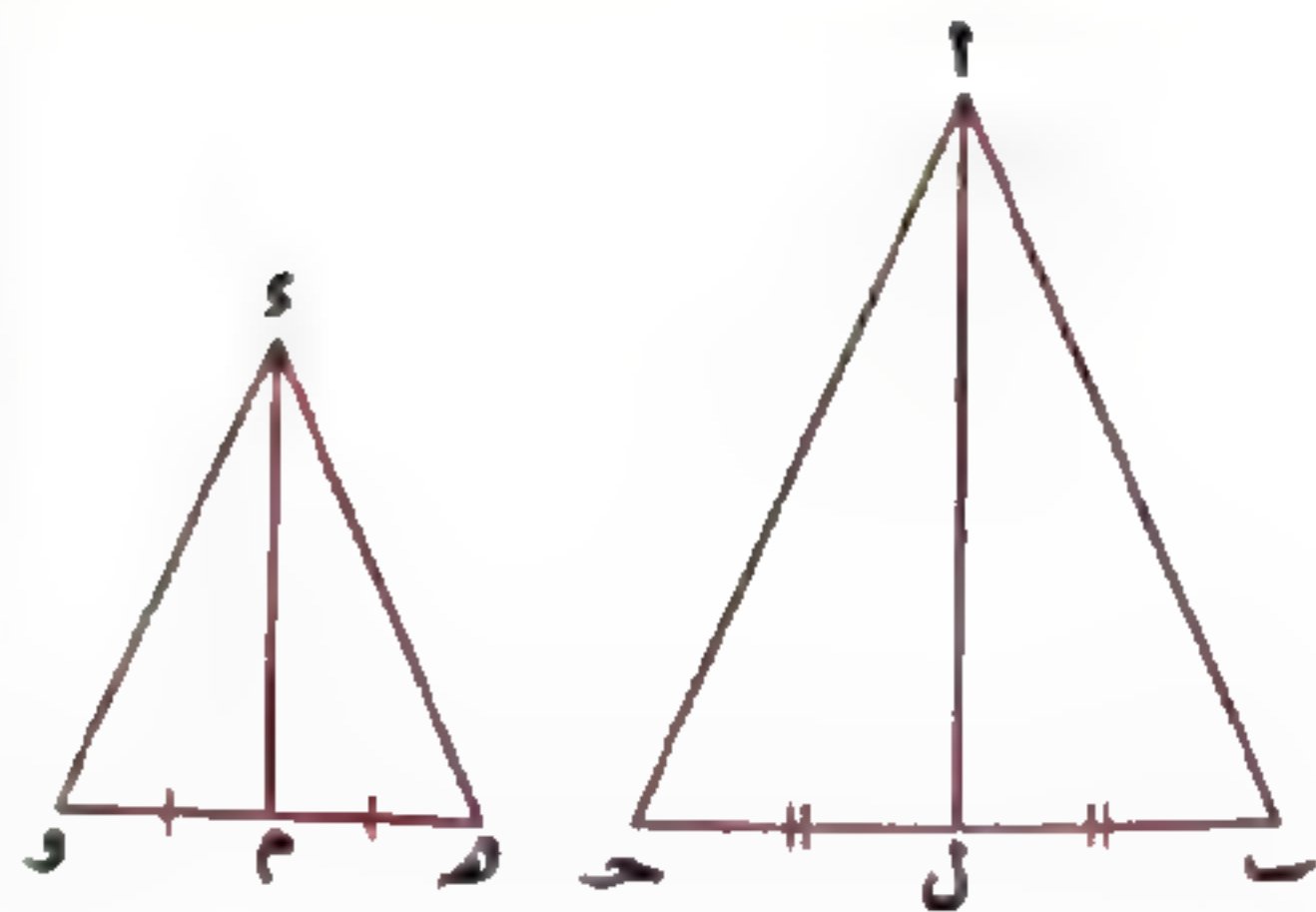
حاول بنفسك

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر ١٥٠ سم^٢ احسب مساحة المثلث الأصغر.

ملاحظة

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي متوسطين متناظرين فيهما.

في الشكل المقابل :



إذا كان : $\triangle ا ب ح \sim \triangle س م و$

، $ل$ منتصف $ب ح$ ، $م$ منتصف $و و$

$$\text{فإن : } \frac{م}{م} = \frac{(\triangle ا ب ح)}{(\triangle س م و)} = \left(\frac{ل}{م} \right)^2$$

الإثبات

$$\triangle ا ب ح \sim \triangle س م و$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{ل}{م} \text{ ، } \frac{ح}{و} = \frac{و}{و}$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{ل}{م}$$

$$\triangle ا ب ل \sim \triangle س م و$$

$$\therefore \frac{م}{م} = \frac{(\triangle ا ب ح)}{(\triangle س م و)} = \left(\frac{ب}{م} \right)^2$$

$$\text{من (١) ، (٢) : } \frac{م}{م} = \frac{(\triangle ا ب ح)}{(\triangle س م و)} = \left(\frac{ل}{م} \right)^2$$

ملاحظة

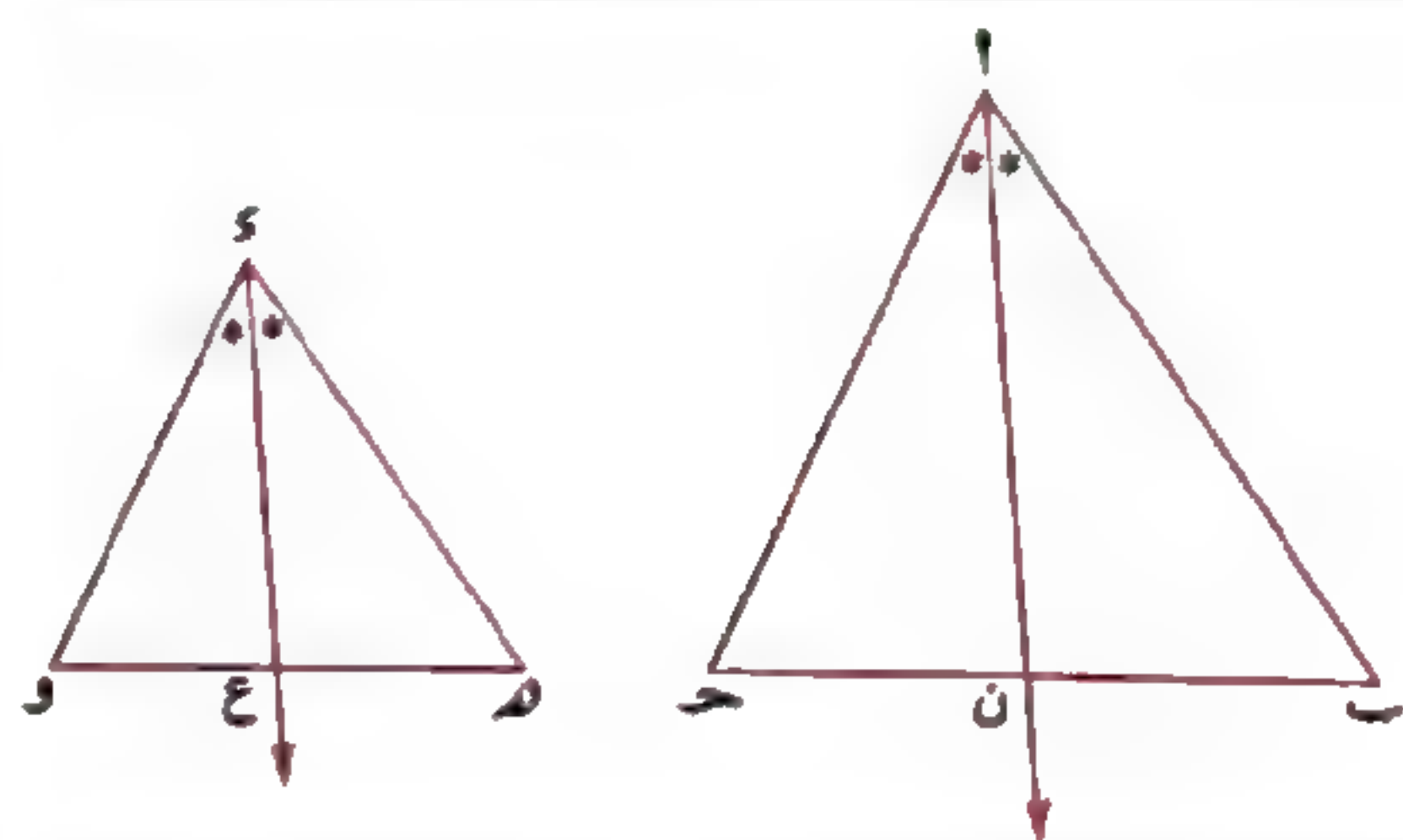
في الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle ا ب ح \sim \triangle س م و$

، $أ$ منتصف $ب ح$ ويقطع $ب ح$ في $ن$

، $ع$ منتصف $و و$ ويقطع $و و$ في $ع$

$$\text{فإن : } \frac{م}{م} = \frac{(\triangle ا ب ح)}{(\triangle س م و)} = \left(\frac{أ}{ع} \right)^2$$



الإثبات

$$\triangle ا ب ح \sim \triangle س م و$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{أ}{ع} = \frac{ح}{و}$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{أ}{ع}$$

$$\therefore \frac{م}{م} = \frac{(\triangle ا ب ح)}{(\triangle س م و)} = \left(\frac{أ}{ع} \right)^2$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{أ}{ع} = \frac{ح}{و}$$

$$\therefore \frac{ب}{م} = \frac{أ}{ع}$$

$$\triangle ا ب ن \sim \triangle س م و$$

(١)

(٢)

$$\therefore \left(\frac{بأ}{دع} \right)^2 = \frac{م(\Delta أبأ)}{م(\Delta دأع)}$$

$$\text{من (١) ، (٢) : } \therefore \left(\frac{بأ}{دع} \right)^2 = \frac{م(\Delta أبأ)}{م(\Delta دأع)}$$

ملاحظة ٤

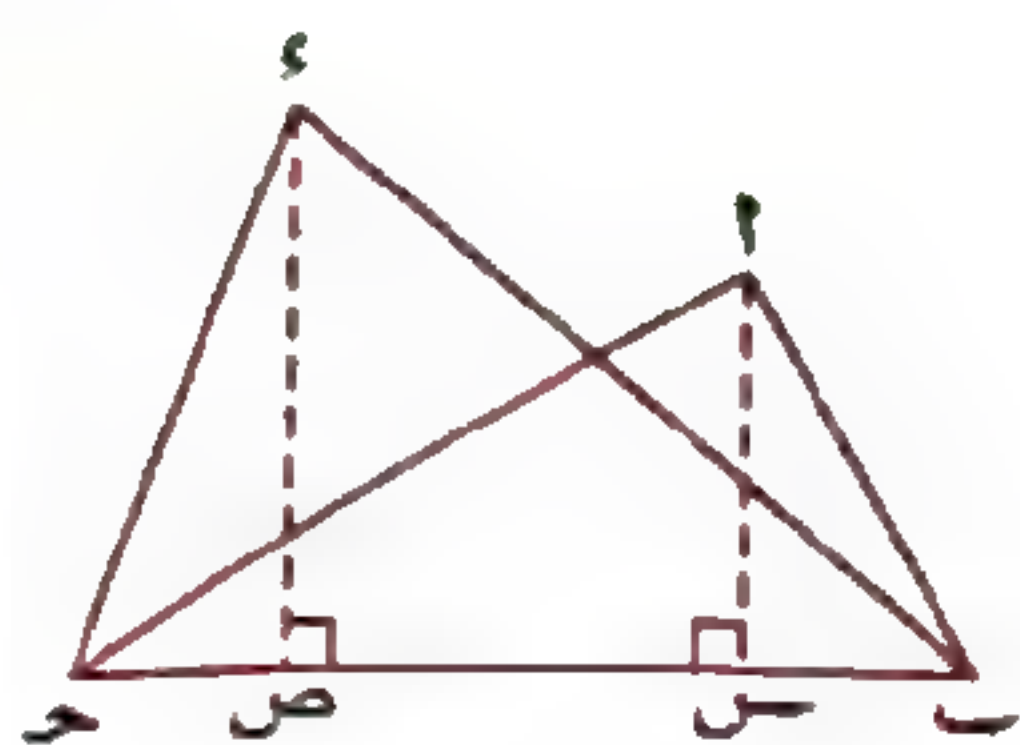
النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيهما.

في الشكل المقابل :

بأ قاعدة مشتركة بين $\Delta أبأ$ ، $\Delta دأع$

$$\therefore \frac{م(\Delta أبأ)}{م(\Delta دأع)} = \frac{\frac{1}{2} \times با \times أس}{\frac{1}{2} \times با \times دص} = \frac{أس}{دص}$$

مع ملاحظة أنه ليس من الضروري أن يكون المثلثان متشابهين.



ملاحظة ٥

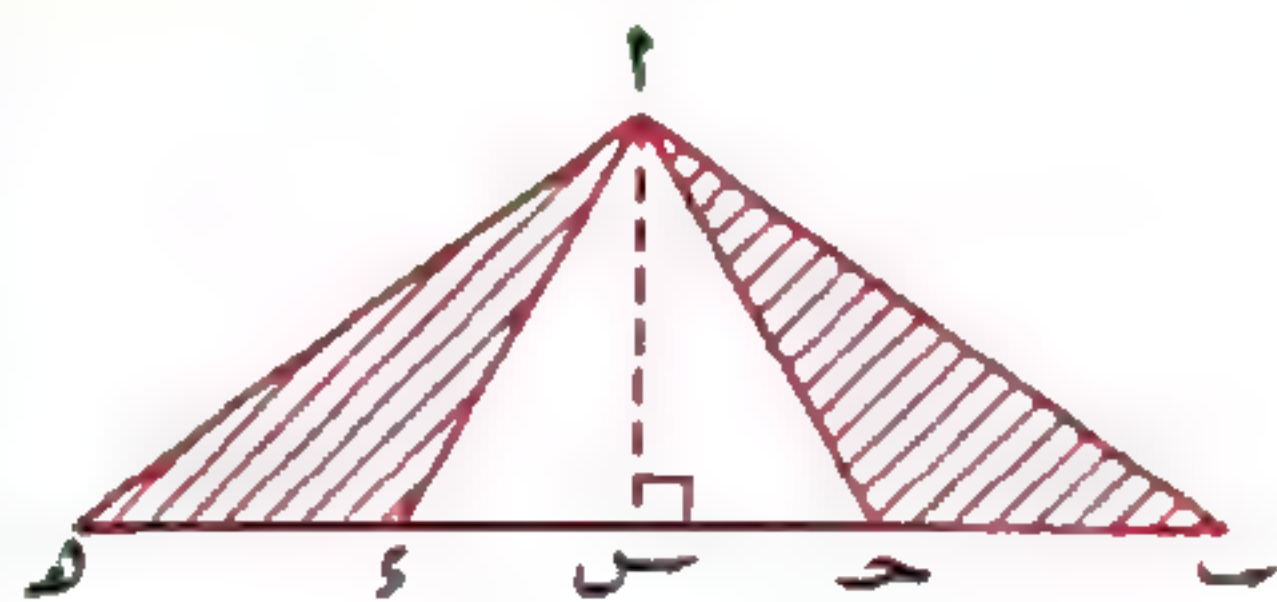
النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما.

في الشكل المقابل :

أس ارتفاع مشترك بين $\Delta أبأ$ ، $\Delta دأع$

$$\therefore \frac{م(\Delta أبأ)}{م(\Delta دأع)} = \frac{\frac{1}{2} \times با \times أس}{\frac{1}{2} \times دأ \times أس} = \frac{با}{دأ}$$

مع ملاحظة أنه ليس من الضروري أن يكون المثلثان متشابهين.

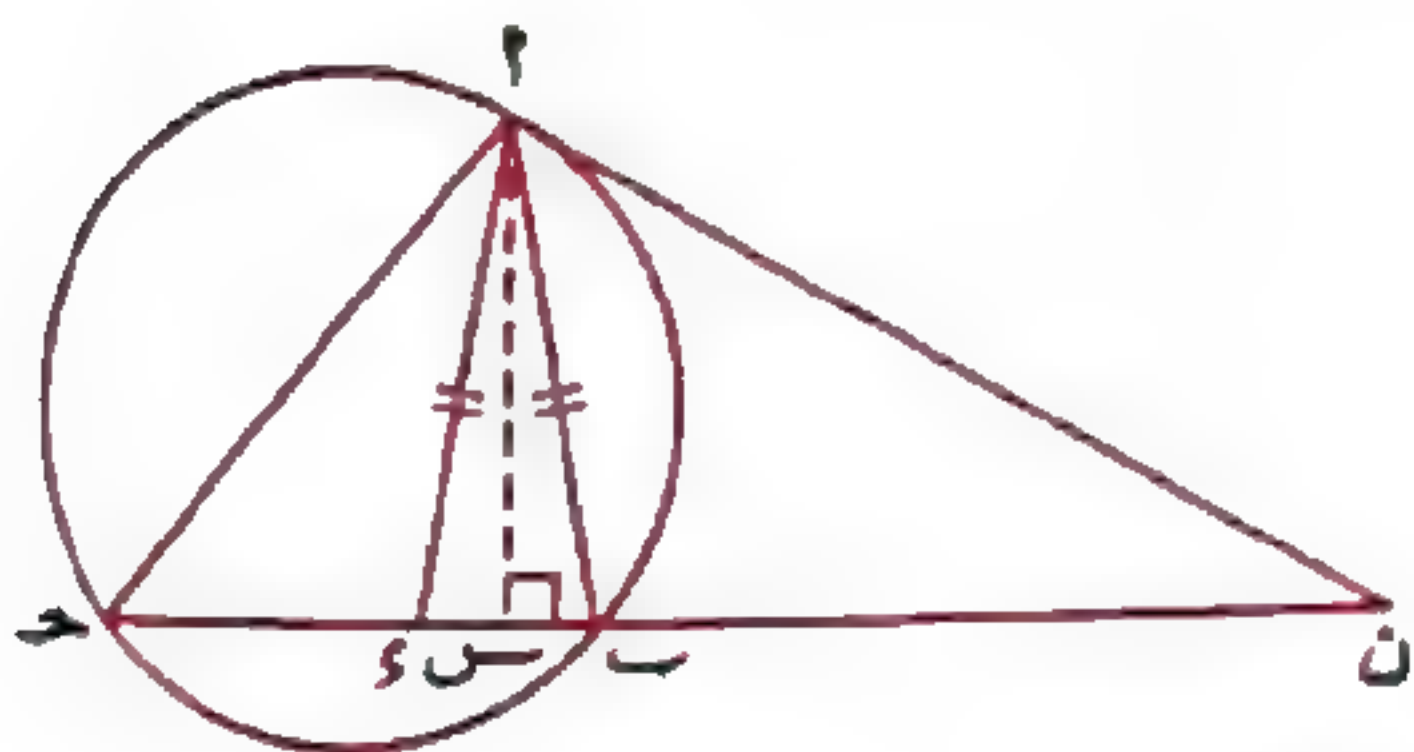


مطلوب

أب ح مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث : $أب < أ ح$ ، $د \in با$

بحيث : $أد = أ ب$ ، رسم أن يمس الدائرة عند أ ويقطع ح ب في ن

أثبت أن : $ب ن : د ن = أ ن : أ ح$



الحل

$$\therefore \frac{م(\Delta أبأ)}{م(\Delta دأع)} = \frac{\frac{1}{2} \times با \times أس}{\frac{1}{2} \times دأ \times أس} = \frac{با}{دأ}$$

(١)

$$\therefore \frac{ب ن : د ن}{أ ن : أ ح} = \frac{ب ن : د ن}{أ ن : أ ح} \quad \therefore \frac{ب ن}{د ن} = \frac{أ ن}{أ ح} \quad \therefore \frac{ب ن}{د ن} = \frac{أ ن}{أ ح}$$

$$(٢) \quad \frac{ب ن}{د ن} = \frac{أ ن}{أ ح} \quad \therefore \frac{ب ن}{د ن} = \frac{أ ن}{أ ح}$$

(وهو المطلوب)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $ب ن : د ن = أ ن : أ ح$

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

ثانياً

حقيقة

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

ففي الشكل المقابل :

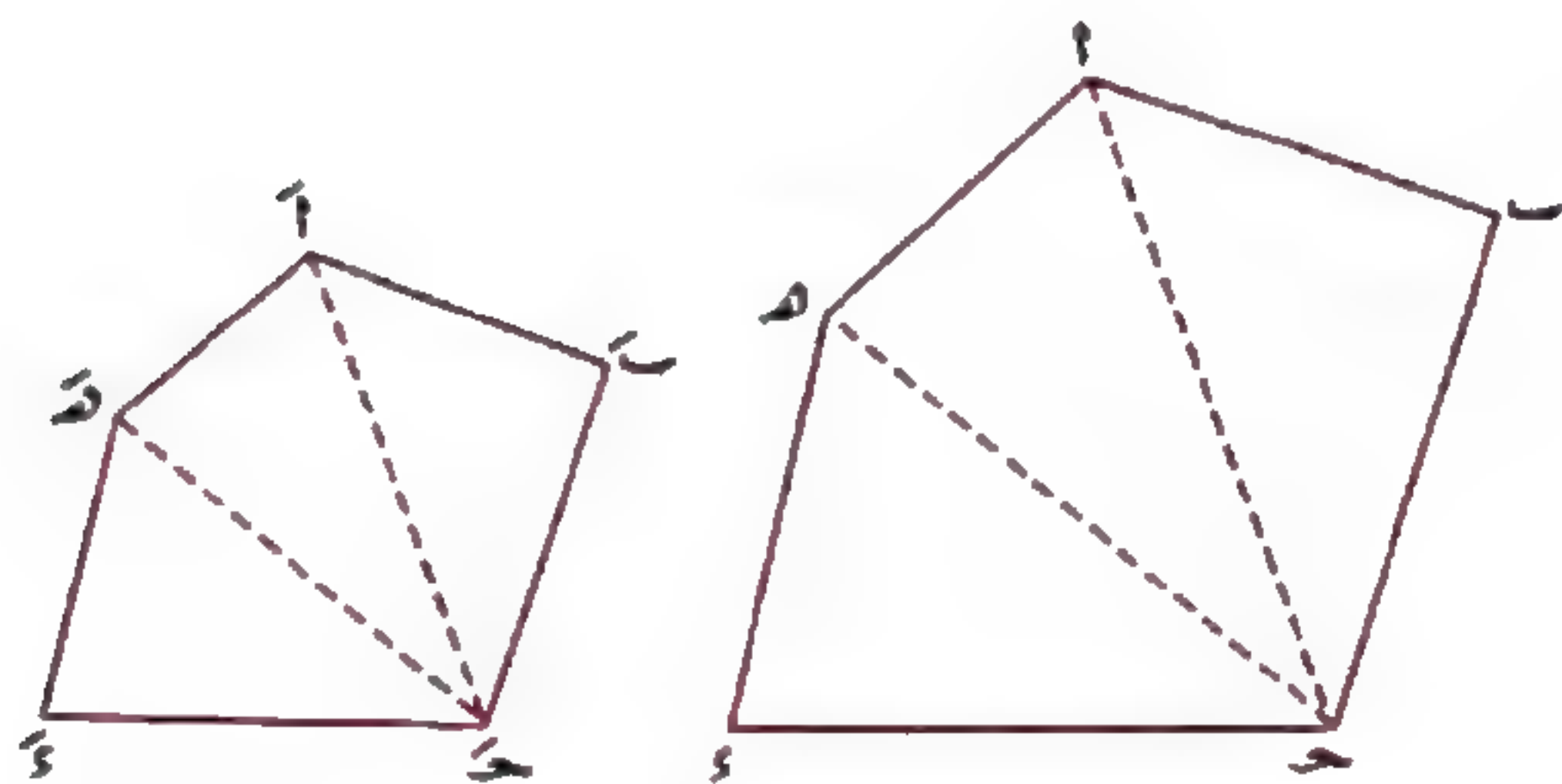
إذا كان المضلع $ABCDEF$ يشابه المضلع $A'B'C'D'E'F'$

ومن رأسين متناظرين مثل C ، C'

رسمنا CA ، CB ، CE ، $C'A'$ ، $C'B'$ ، $C'E'$

فإن كلاً من المضلعين ينقسم إلى ثلاثة مثلثات

ويكون : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ ، $\triangle CDE \sim \triangle C'D'E'$



ملاحظات

• الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع في المضلعين المتشابهين

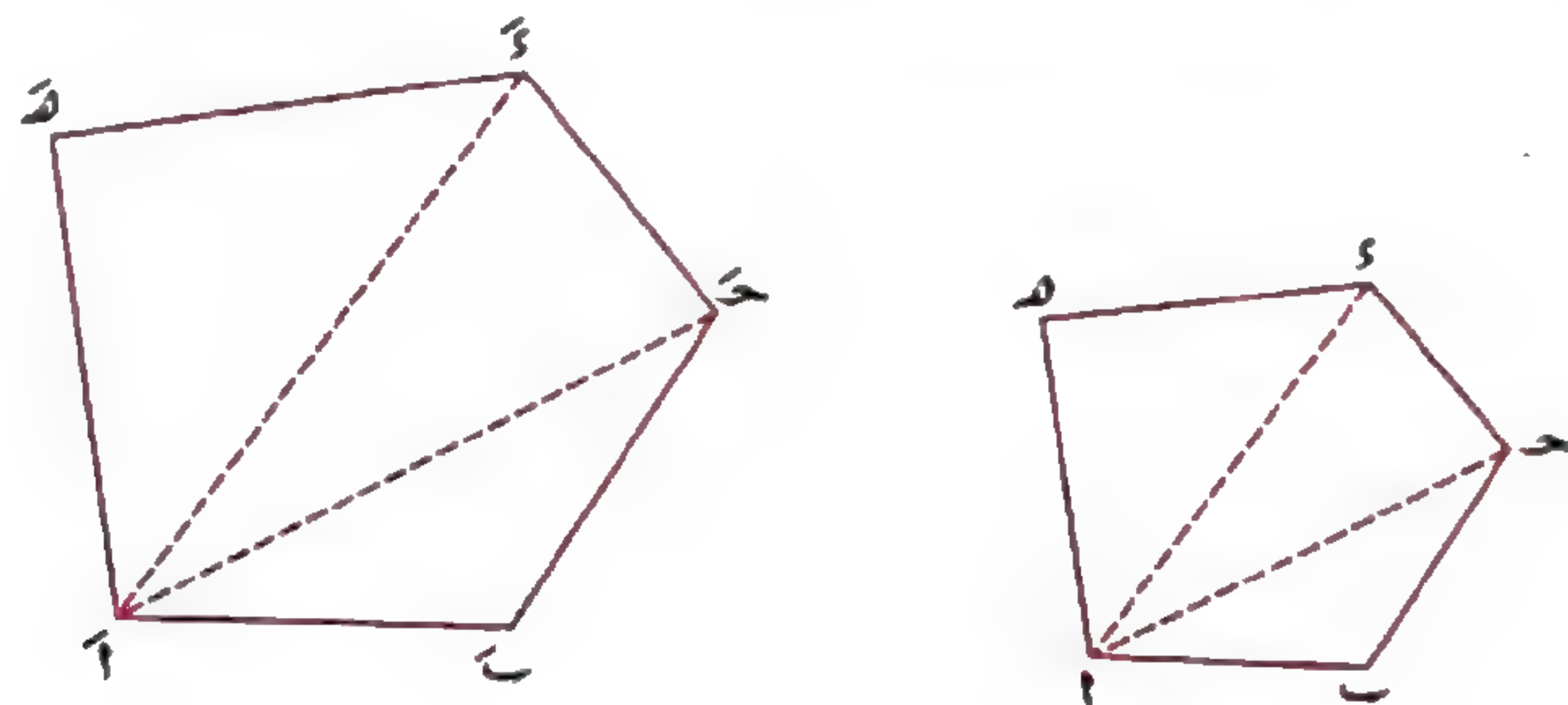
(المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع)

• إذا كان عدد أضلاع مضلع = n ضلعاً

فإن عدد المثلثات التي ينقسم إليها برسم الأقطار المشتركة في أحد الرؤوس = $(n - 2)$ مثلثاً.

نظرية

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



المضلع $ABCDEF \sim$ المضلع $A'B'C'D'E'F'$

$$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{\text{مساحة المضلع } ABCDEF}{\text{مساحة المضلع } A'B'C'D'E'F'}$$

من A ، A' نرسم AC ، AD ، $A'C'$ ، $A'D'$

المعطيات

المطلوب

العمل

البرهان

∴ المثلّع أ ب ح د هـ ∼ المثلّع أ ب ح د هـ

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات ، كل يشابه نظيره (حقيقة) ويكون :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right)$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right)$$

(وهو المطلوب)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{د هـ}{ح د} \right)$$

مثال ٦

مضلّعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومجموع مساحتيهما ١٩٥ سم^٢ أوجد مساحة كل منهما.

الحل

∴ النسبة بين محيطي المثلّعين المتشابهين = ٢ : ٣

∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٢ : ٣

∴ النسبة بين مساحتيهما = ٩ : ٤

ويفرض مساحة المثلّع الأول = ٩ س ، ومساحة الثاني = ٤ س

$$195 = 9س + 4س$$

$$195 = 13س$$

$$15 = س$$

∴ مساحة المثلّع الأول = ٩ × ١٥ = ١٣٥ سم^٢

، مساحة المثلّع الثاني = ٤ × ١٥ = ٦٠ سم^٢

(وهو المطلوب)

مثال ٧

أثبت أنه إذا أنشئ على أضلاع مثلث قائم الزاوية ثلاثة مضلّعات متشابهة بحيث تكون أضلاع المثلث أضلاعاً متناظرة فيها فإن مساحة المثلّع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المثلّعين المنشأين على ضلعي القائمة.

الحل

∴ المضلع ل ~ المضلع م

$$\frac{م (المضلع ل)}{م (المضلع م)} = \left(\frac{ل أ}{ب ح} \right)^2 = \frac{ل^2 (أ ب)}{ب^2 (ح أ)}$$

∴ المضلع ن ~ المضلع م

$$\frac{م (المضلع ن)}{م (المضلع م)} = \left(\frac{ن أ}{ب ح} \right)^2 = \frac{ن^2 (أ ب)}{ب^2 (ح أ)}$$

بجمع (١) ، (٢) :

$$\frac{م (المضلع ل)}{م (المضلع م)} + \frac{م (المضلع ن)}{م (المضلع م)} = \frac{ل^2 (أ ب)}{ب^2 (ح أ)} + \frac{ن^2 (أ ب)}{ب^2 (ح أ)}$$

$$\frac{م (المضلع ل) + م (المضلع ن)}{م (المضلع م)} = \frac{ل^2 (أ ب) + ن^2 (أ ب)}{ب^2 (ح أ)}$$

$$\therefore م (المضلع ل) + م (المضلع ن) = م (المضلع م)$$

(فيثاغورس)

(وهو المطلوب)

مثال ٨

أ ب ح د ، أ ب ح د مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول في م وقطرا الثاني في ن

$$\text{أثبت أن : } \frac{م (المضلع أ ب ح د)}{م (المضلع أ ب ح د)} = \frac{م (ب م)}{م (ن د)}$$

الحل

∴ المضلعان متشابهان.

$$\therefore \Delta أ ب ح د \sim \Delta أ ب ح د$$

وينتج أن : $\frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$ ، $\Delta أ ب م \sim \Delta أ ب م$

وينتج أن : $\frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$ ، $\Delta أ ب م \sim \Delta أ ب م$

$$\therefore \Delta أ ب م \sim \Delta أ ب م$$

$$\therefore \frac{م (المضلع أ ب ح د)}{م (المضلع أ ب ح د)} = \frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$$

$$\therefore \frac{ب م}{ن د} = \frac{م (ب م)}{م (ن د)}$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب ح د ، أ ب ح د مضلعان متشابهان فإذا كانت : $\frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$ ، $\frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$

$$\text{فأثبت أن : } \frac{م (المضلع أ ب ح د)}{م (المضلع أ ب ح د)} = \frac{م (ب م)}{م (ن د)} = \frac{م (أ ب)}{م (أ ب)}$$



على العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

من أسئلة الكتاب المدرسي



3

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان طولاً ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٧ سم ، ١١ سم فإن النسبة بين محيطيهما

- (أ) $\frac{11}{18}$ (ب) $\frac{7}{18}$ (ج) $\frac{7}{11}$ (د) $\frac{11}{18}$

(٢) إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وكان $AB = 3$ سم $EF = 4$ سم فإن :

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{EF}$$

- (أ) ٣ (ب) ٩ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{9}$

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٩ : ٤٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما

- (أ) ٧ : ٣ (ب) ٩ : ٤٩ (ج) ٣ : ١٠ (د) ٣ : ١٠

(٤) إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، $AB = 3$ سم ، $BC = 4$ سم ، $AC = 5$ سم ، وكان $DE = 6$ سم فإن $EF =$ سم

- (أ) $\frac{4}{3}$ (ب) ١٢ (ج) ٩ (د) ٣٦

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٩ : ٤ فتكون النسبة بين مساحتيهما

- (أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (ج) ٣ : ٢ (د) ١٦ : ٨١

(٦) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٩ : ٢٥ وكان طول أحد أضلاع المضلع الأصغر ٣ سم فإن طول نظيره في المضلع الأكبر سم

- (أ) $\frac{25}{3}$ (ب) $\frac{9}{5}$ (ج) ٧٥ (د) ٥

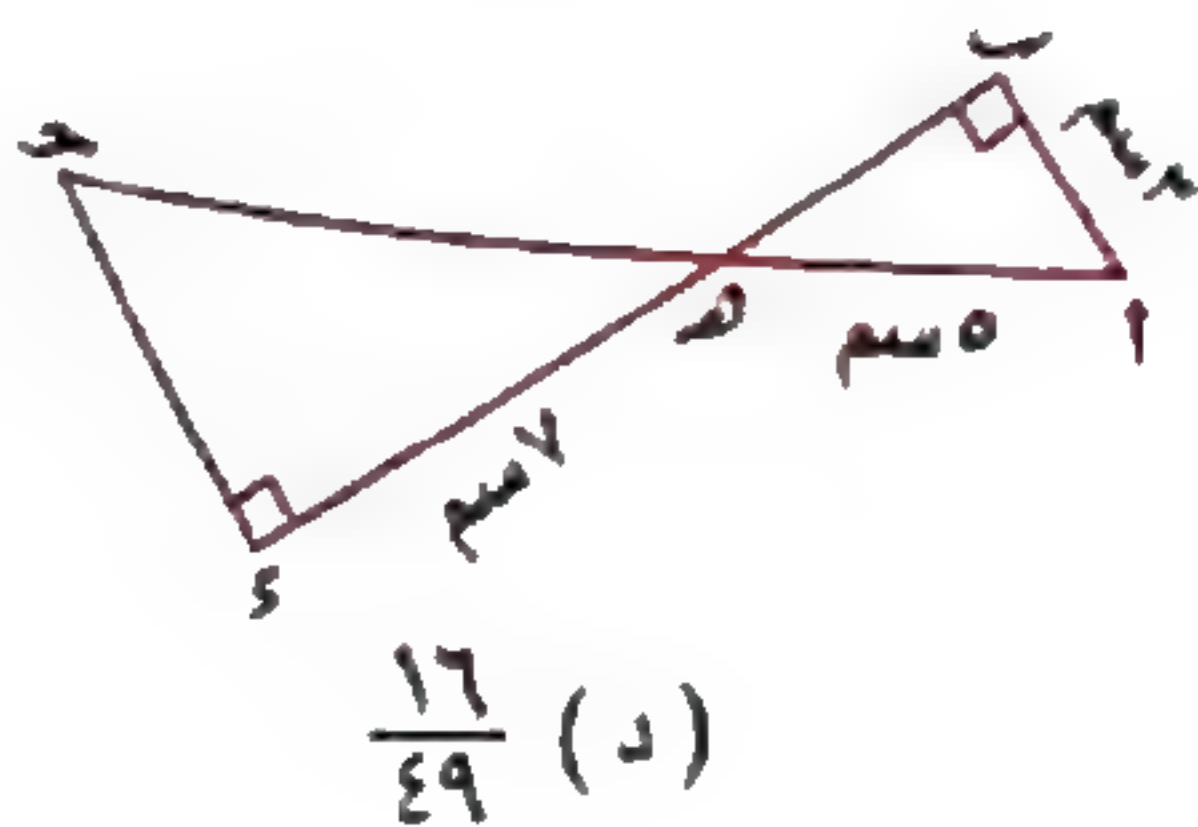
(٧) مربعان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم^٢ فإن مساحة أكبرهما سم^٢

- (أ) ٢٥ (ب) ١٦ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(٨) في الشكل المقابل :

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{EF}$$

- (أ) $\frac{9}{49}$ (ب) $\frac{25}{49}$ (ج) $\frac{9}{25}$ (د) $\frac{16}{49}$



(٩) في الشكل المقابل :

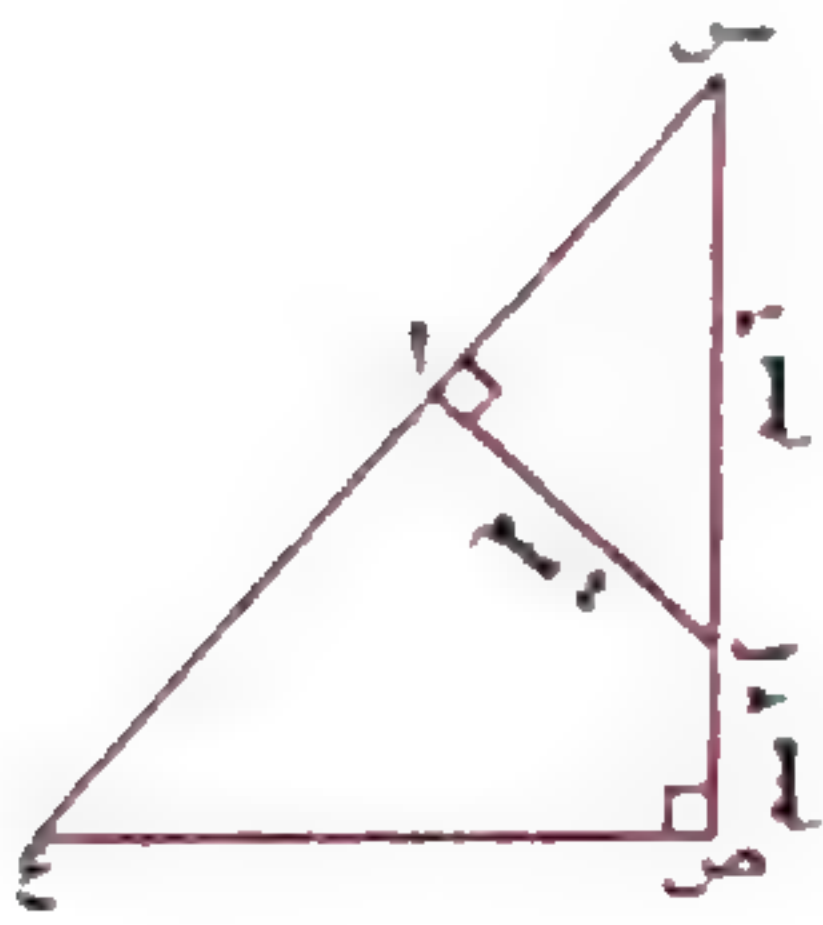
$$\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ س أ ب})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ س ص ع})} = \dots\dots\dots$$

(أ) $\frac{2}{5}$

(ب) $\frac{9}{25}$

(ج) $\frac{5}{16}$

(د) $\frac{4}{5}$



(١٠) في الشكل المقابل :

إذا كان أ س : س ب = ٣ : ٥

، م = (Δ أ ب ح) = ٢٥ سم^٢

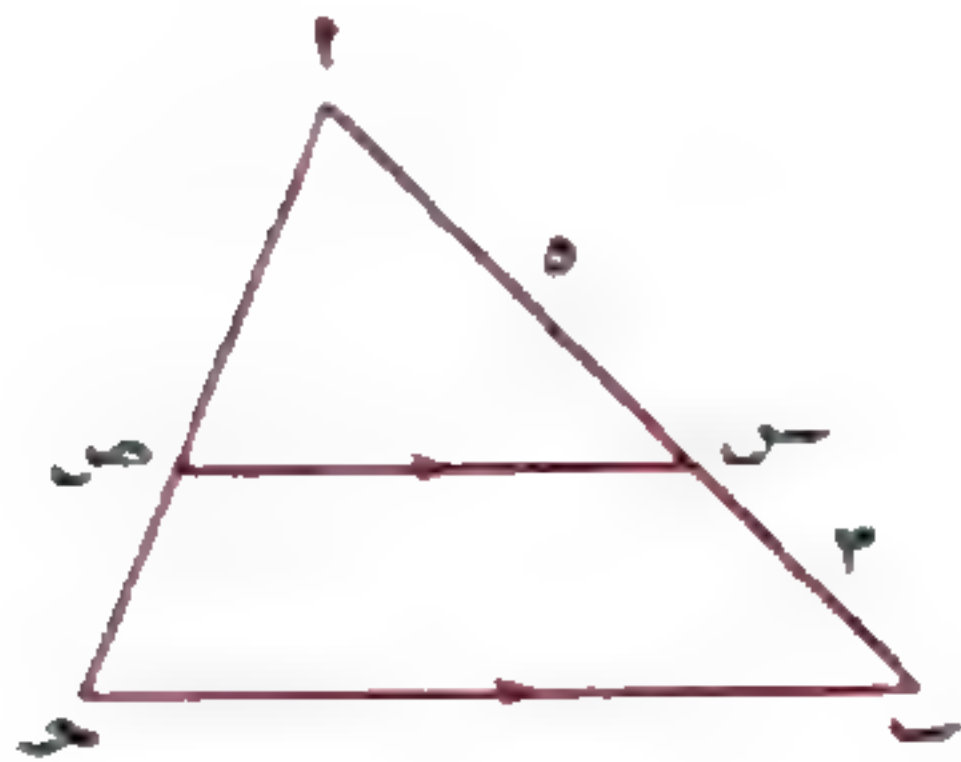
فإن : م = (Δ أ س ص) = سم^٢

(أ) ١٠

(ب) ١٦

(ج) ٤١

(د) ٦٥.٥



(١١) في الشكل المقابل :

إذا كانت : ب ه // ع د

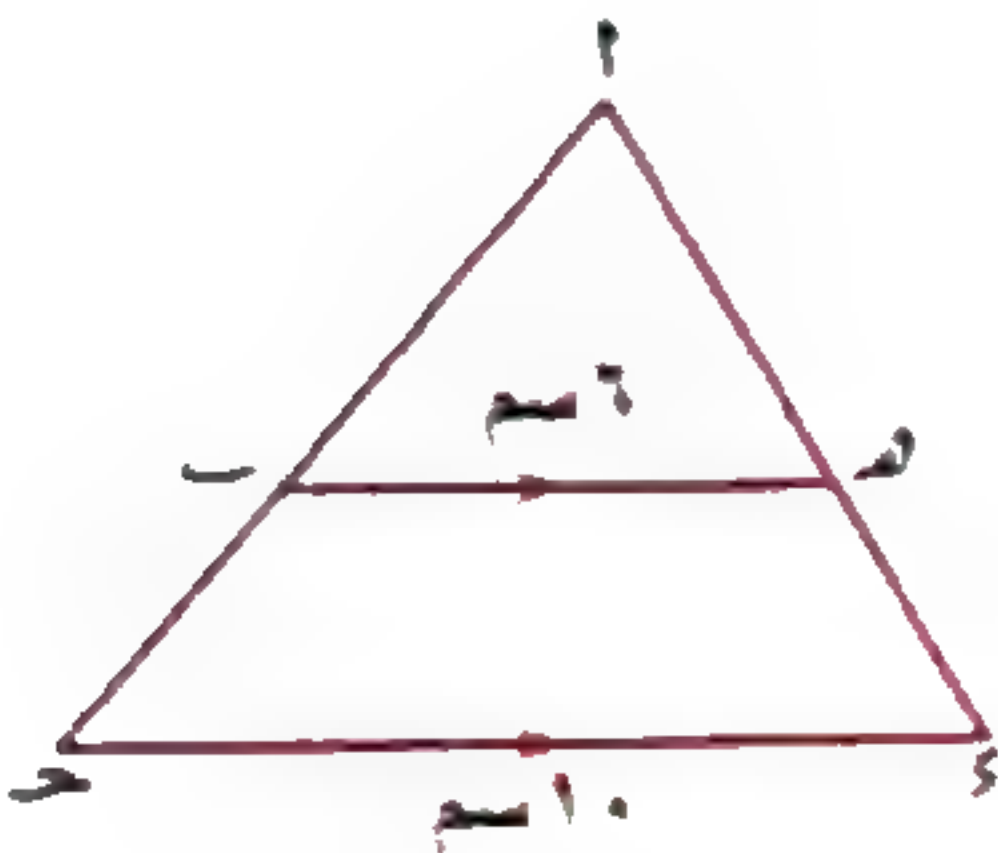
فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ه}}{\text{مساحة شبه المنحرف ب ح د ه}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{25}{81}$

(ب) $\frac{9}{16}$

(ج) $\frac{3}{5}$

(د) $\frac{9}{25}$



(١٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أ ب ه د = ٤٢ سم^٢

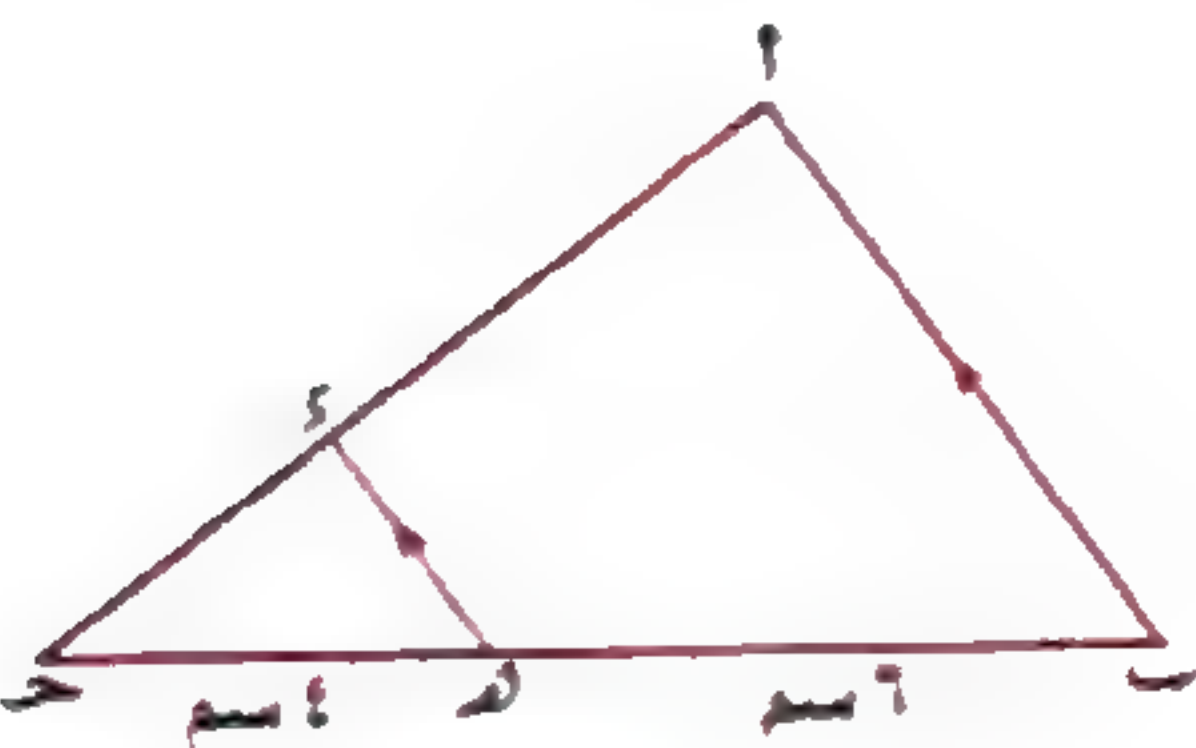
فإن مساحة Δ ح د ه = سم^٢

(أ) ٨

(ب) ١٢

(ج) ١٦

(د) ٢٠



(١٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : الشكل أ ب ح د ~ الشكل أ ه و ي

وكانت مساحة الشكل أ ب ح د = ٣٢ سم^٢

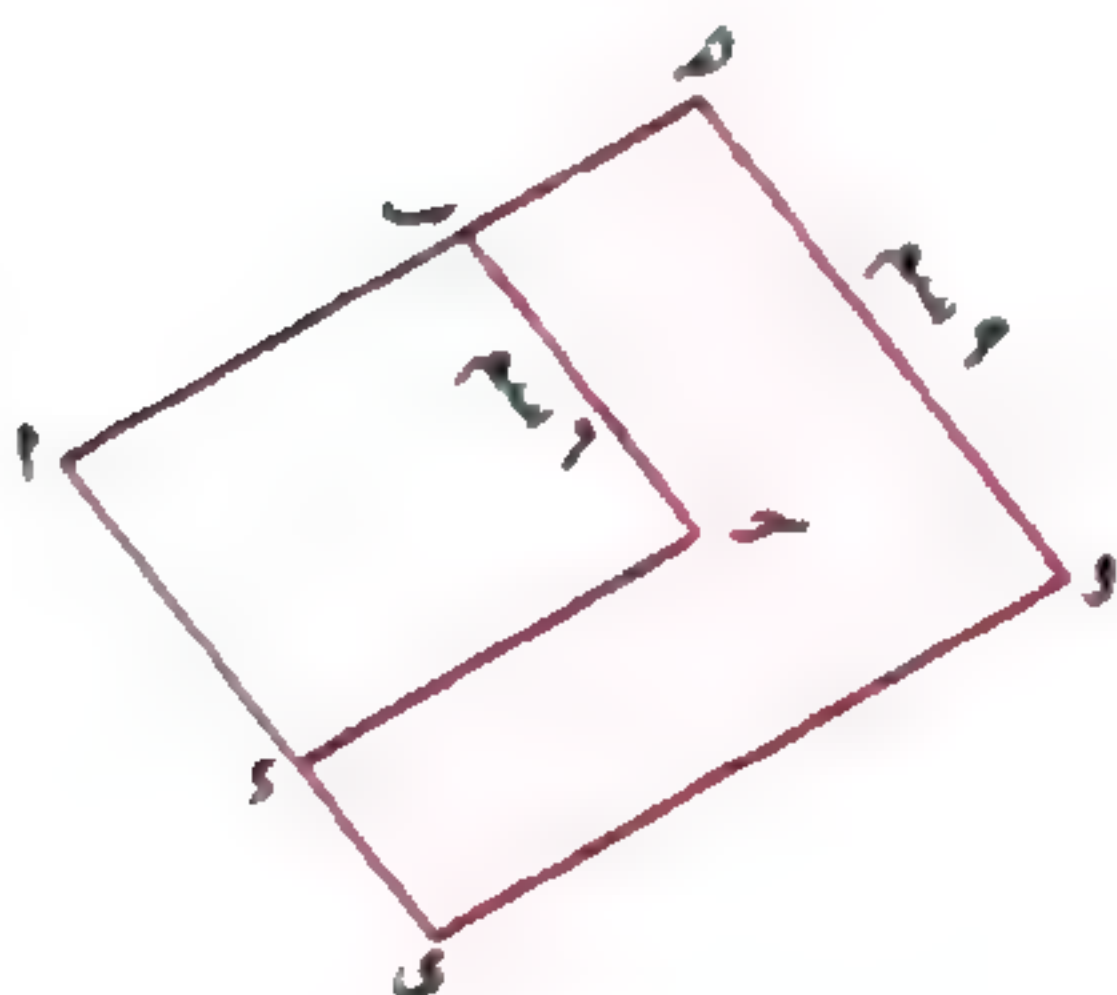
فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(أ) ٧٢

(ب) ٤٨

(ج) ٤٠

(د) ١٦



إذا كان المضلع أ ب ح د ~ المضلع أ ب ه د ، $\frac{1}{3} = \frac{ب ه}{ب د}$

فاكتب ما يساويه كل من : $\frac{\text{م (المضلع أ ب ح د)}}{\text{م (المضلع أ ب ه د)}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب ح د}}{\text{محيط المضلع أ ب ه د}}$

٣ إذا كان طول ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم^٢ فأوجد مساحة المضلع الأكبر.

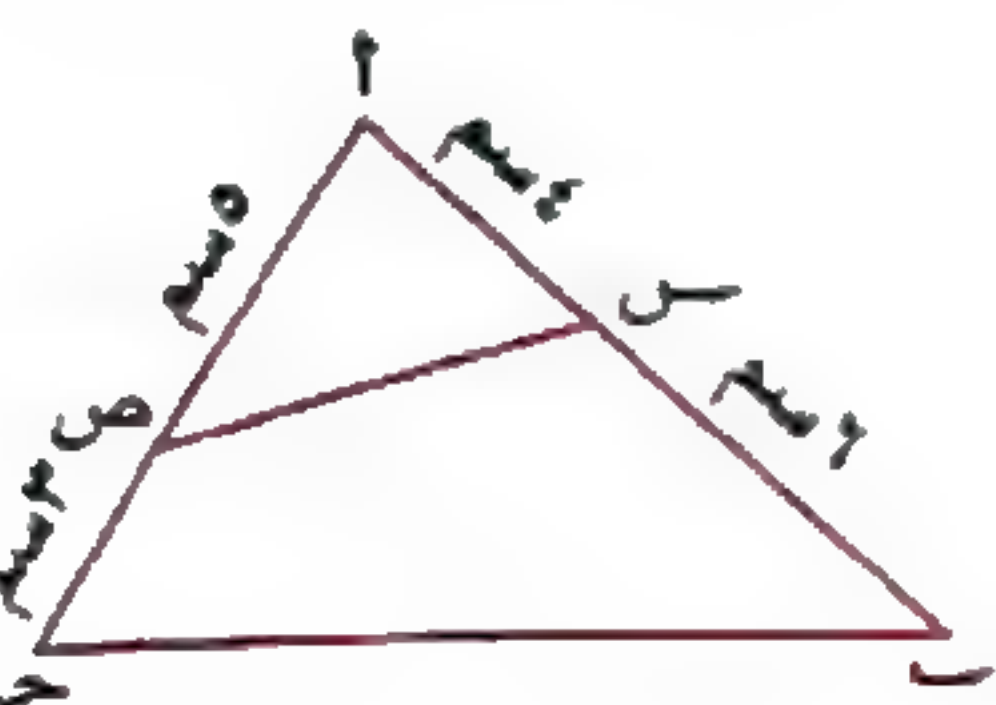
٤ مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأول ١٦ سم^٢ فما مساحة المثلث الثانى ؟

٥ مضلعان متشابهان مساحتهما ١٠٠ سم^٢ ، ٦٤ سم^٢ ، فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم فأوجد محيط الثانى.

٦ مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم^٢ أوجد مساحة كل منهما.

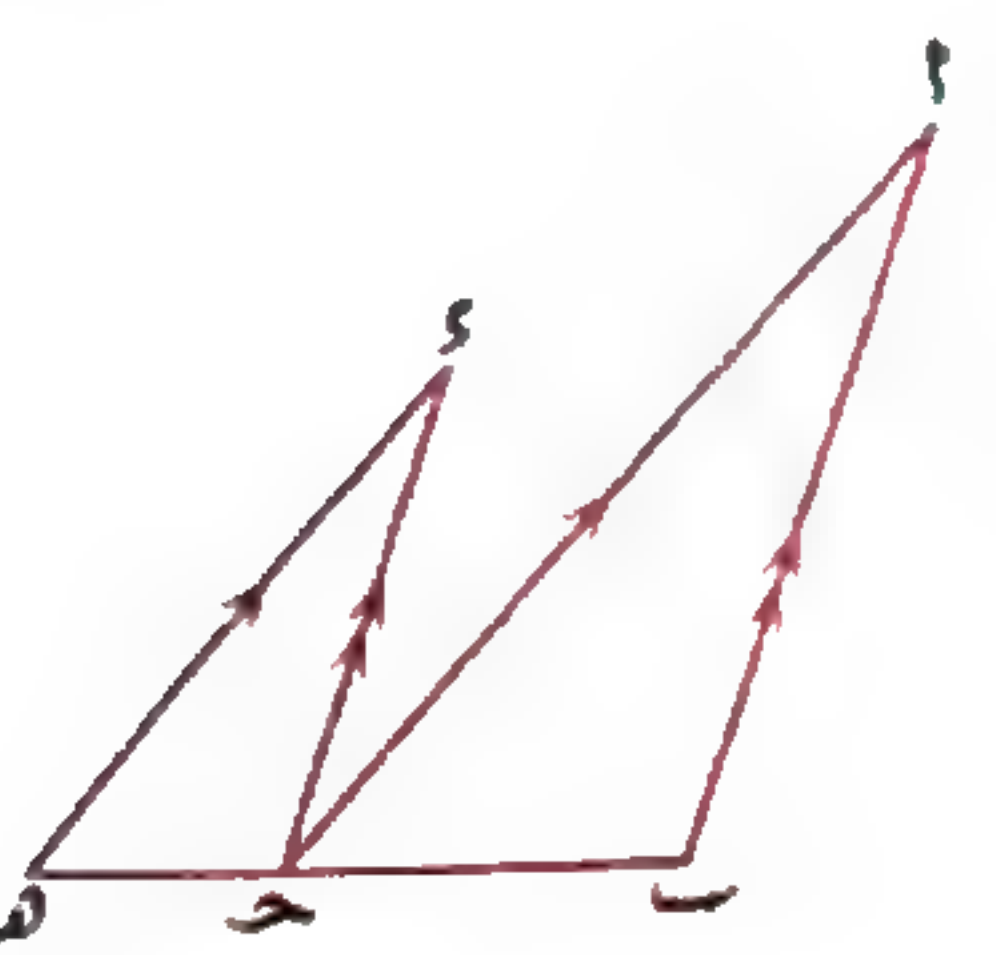
٧ مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^٢ فأوجد مساحة كل منهما.

٨ في الشكل المقابل :



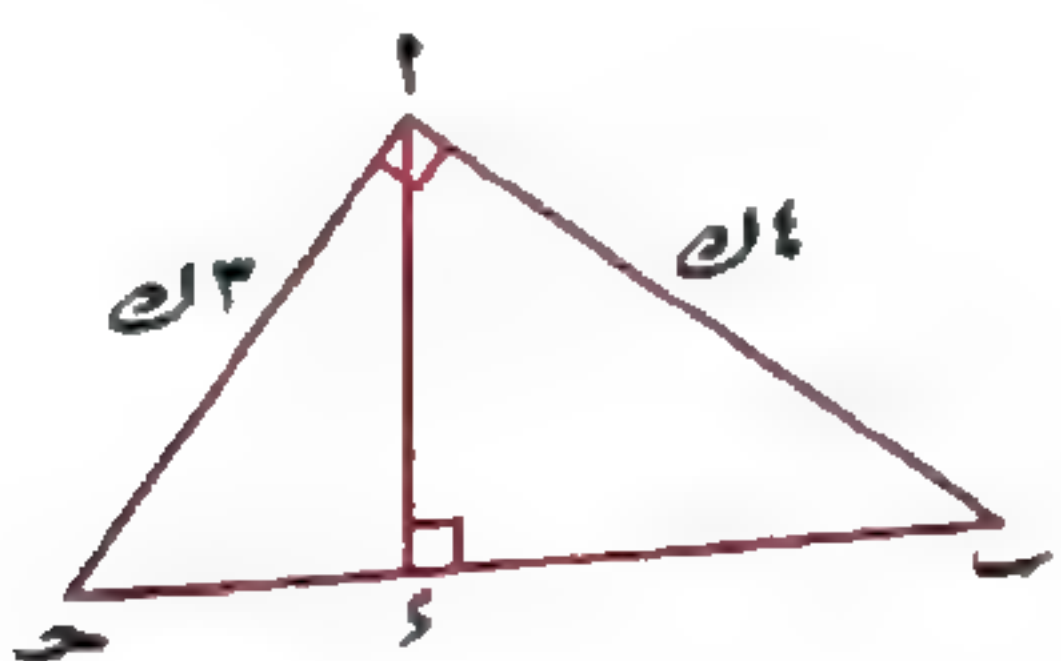
أوجد : $\frac{m(\triangle ADE)}{m(\triangle ABC)}$

٩ في الشكل المقابل :

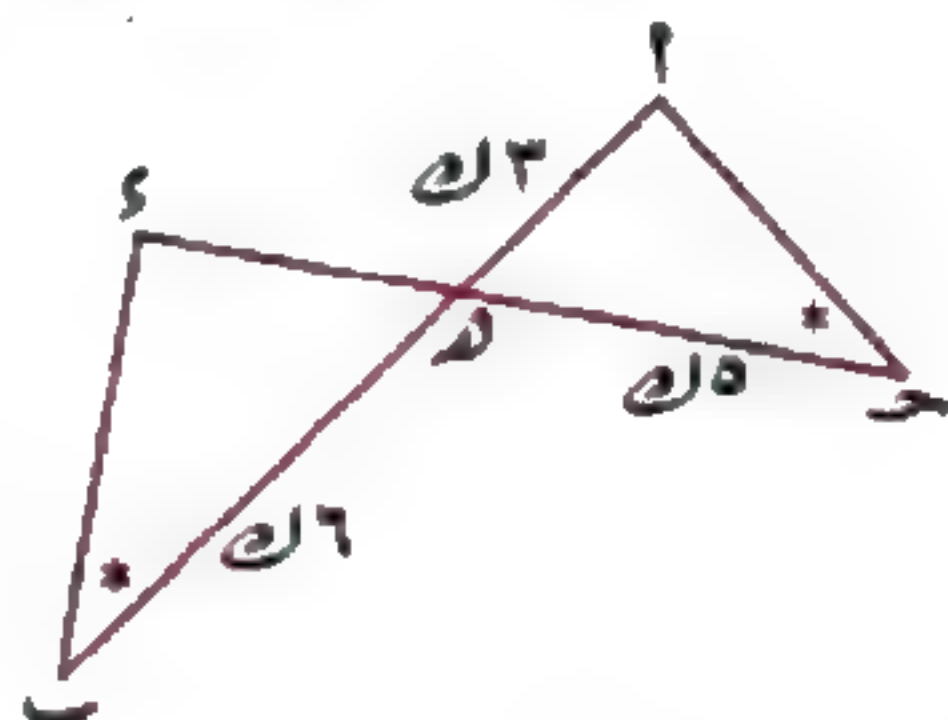


أوجد : مساحة $\triangle ABC$

١٠ ادرس كلاً من الشكلين التاليين ، حيث \angle ثابت تناسب ، ثم أوجد المطلوب تحت كل شكل :



(٢)
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\angle A = 90^\circ$ ،
 $m(\triangle ADE) = 180$ سم^٢ ،
 أوجد : $m(\triangle ABC)$



(١)
 $\{D\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$
 $m(\triangle ADE) = 900$ سم^٢ ،
 أوجد : $m(\triangle ABC)$

١١ ΔABC مثلث ، $E \in AB$ حيث $AE = 2$ سم ، $D \in AC$ حيث $AD = 4$ سم ، $DE \parallel BC$ إذا كانت مساحة $\Delta ADE = 6$ سم² أوجد : مساحة شبه المنحرف $DECB$

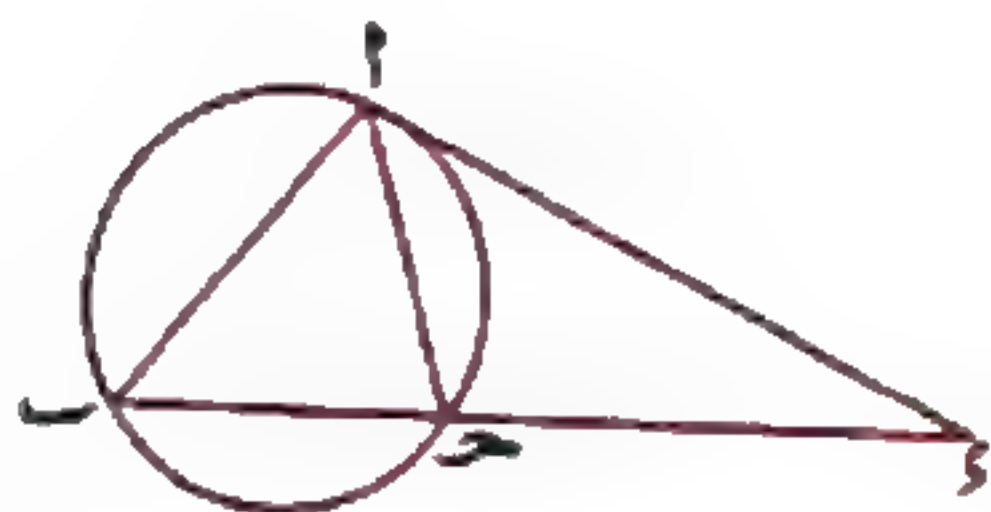
« ٧٥ سم² »

١٢ ΔABC مثلث فيه : $AB = 8$ سم ، $AC = 6$ سم ، $E \in AB$ حيث $AE = 3$ سم ، $D \in AC$ حيث $AD = 2$ سم أوجد : $\frac{m(\Delta ADE)}{m(\text{الشكل } DECB)}$

« $\frac{1}{4}$ »

١٣ ΔABC ، AD جزء مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول في S وقطرا الثاني في V أثبت أن : $\frac{m(\text{المضلع } ABCD)}{m(\text{المضلع } AEDC)} = \frac{(S)}{(V)}$

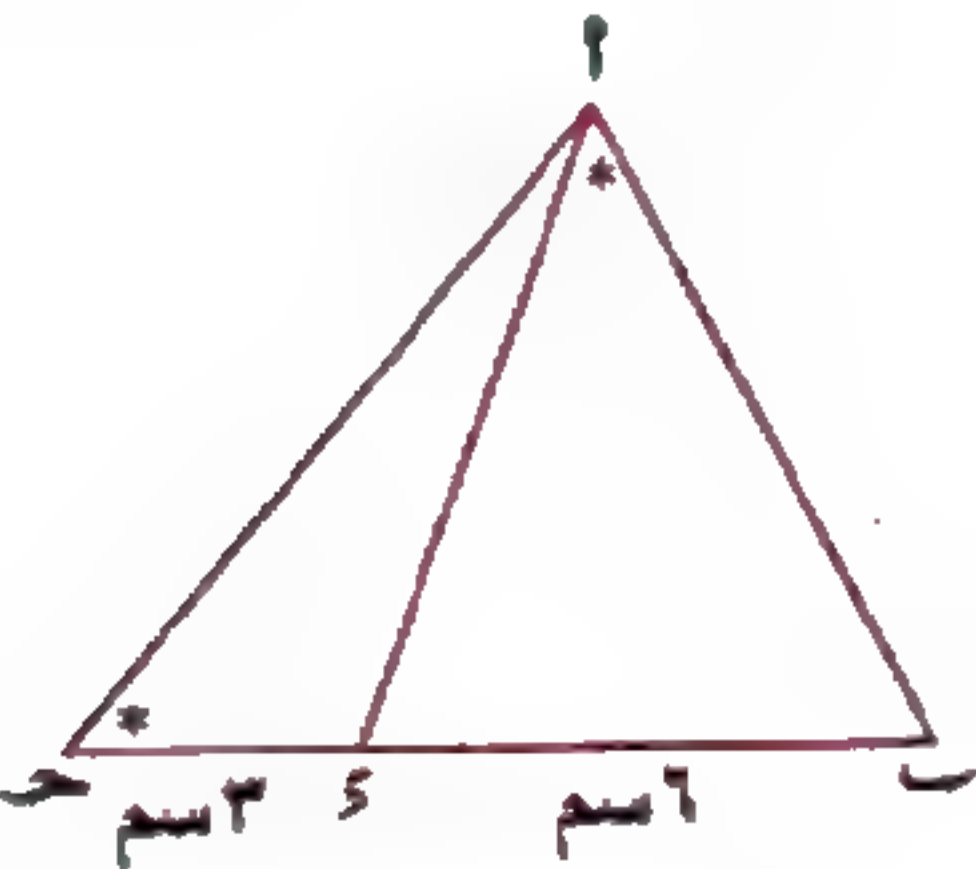
١٤ في الشكل المقابل :



« $\frac{4}{5}$ »

أر قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس ΔABC ، $AD=2$ ، $DE=3$ ، $EC=4$ أوجد : $\frac{m(\Delta ADE)}{m(\Delta ABC)}$

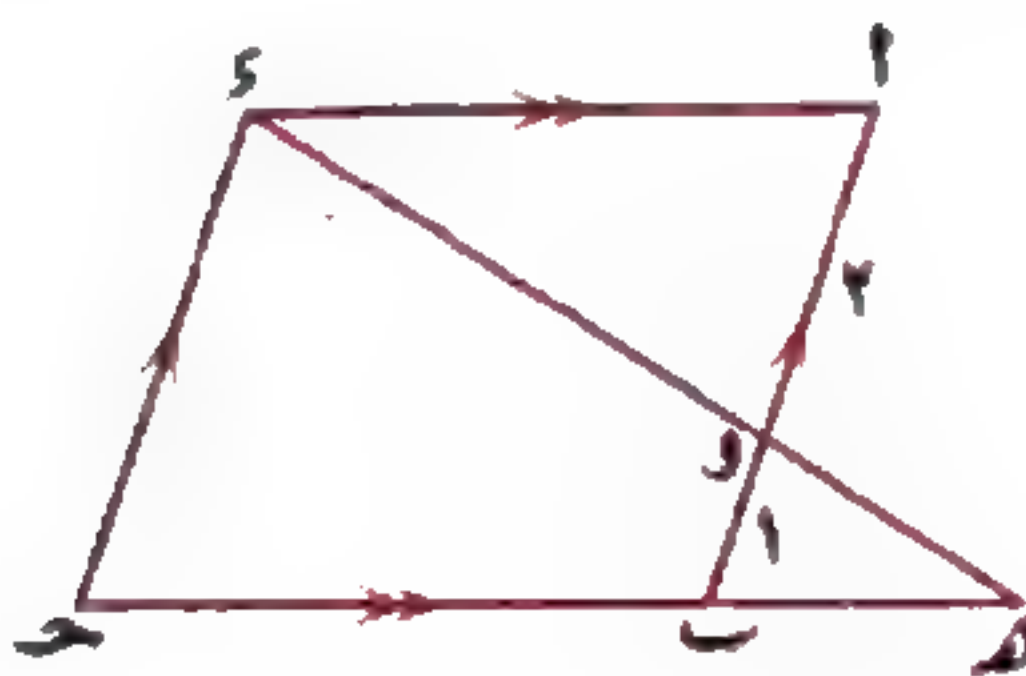
١٥ في الشكل المقابل :



« $2\sqrt{3}$ سم ، $2:3$ »

ΔABC مثلث فيه : $AB = 9$ سم ، $E \in AB$ بحيث $AE = 6$ سم فإذا كان $DE \parallel BC$ ، $AD = 3$ ، $DE = 4$ فاثبت أن : $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ واحسب : طول AC ثم أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين : ΔABC ، ΔADE

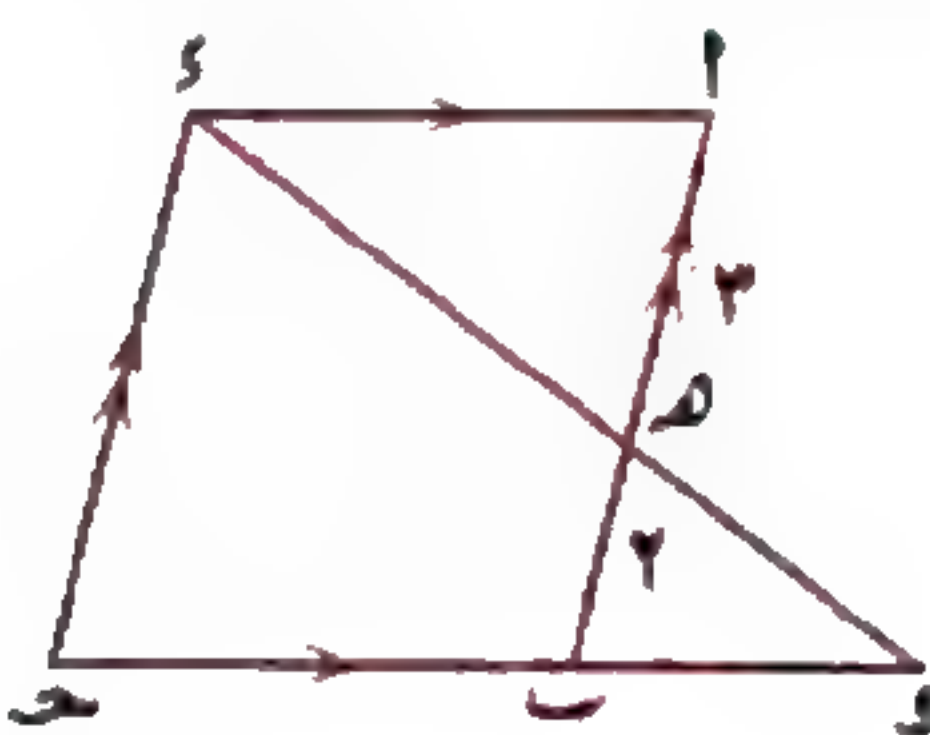
١٦ في الشكل المقابل :



« ١٠٨ سم² »

ΔABC متوازي أضلاع ، $\frac{1}{2} = \frac{AE}{AB}$ ، $AE = 9$ سم ، $DE = 3$ أوجد : مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$

١٧ في الشكل المقابل :



« $\frac{20}{9}$ »

(٢) أوجد : $\frac{m(\Delta ADE)}{m(\Delta ABC)}$

ΔABC متوازي أضلاع ، $E \in AB$ ، $F \in CD$ ، $EF \parallel AD$ ، $AE = 3$ ، $EF = 4$ ، $FD = 2$ حيث $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{EF}{AD} = \frac{2}{3}$ ، $\{O\} = EF \cap AC$ أثبت أن : $\Delta AEO \sim \Delta CFO$

(١) أثبت أن : $\Delta AEO \sim \Delta CFO$

١٨
٢ ح مثلث قائم الزاوية في ١، ٢، ٣ \perp ح يقطعه في ٤، رسم المثلثان المتساويان الأضلاع ١ ح ٢، ٢ ح ٣ خارج المثلث ١ ح ٢

أثبت أن: (١) المضلع $ABCD$ - المضلع $CDAB$ و

$$\frac{س}{ح} = \frac{م (المضلع أ س م)}{م (المضلع ح د م)} \quad (2)$$

١٩ ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، د ⊥ ا ح يقطعه في د ، رُسم على ا ب
ب ح المربعان ا س ص ب ، م ن ح خارج المثلث ا ب ح

(١) أثبت أن : المضلع و ٢ من ص - ~ المضلع و ٣ م ن ح

(۲) إذا كان: $a = 6$ سم، $a = 10$ سم

أوجد : النسبة بين مساحتي سطحى المضلعين.

$$\frac{1}{17}$$

٣٠ ١- ح مثلث فيه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ح}$ ، $\overline{أ ح}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ع}$ ، $\overline{ع س}$ على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع $S = 40$ سم² ، ومساحة المضلع $S = 80$ سم² ، ومساحة المضلع $E = 120$ سم² أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

۱۸ ا ح ء شکل رباعی ، ه \equiv ب ء ، رسم ه و // ء ا و یقطع ا ب فی و
رسم ه م // ء ح و یقطع ب ح فی م

أثبت أن : م - (المضلع ب م ه و) : م - (المضلع ب ح د و) = $\frac{ب م \times و ح}{ب ح \times م د}$

٣ : ١ : ٢ : ٣ : ٤ : ٥ : ٦ : ٧ : ٨ : ٩ : ١٠ : ١١ : ١٢ : ١٣ : ١٤ : ١٥ : ١٦ : ١٧ : ١٨ : ١٩ : ٢٠ : ٢١ : ٢٢ : ٢٣ : ٢٤ : ٢٥ : ٢٦ : ٢٧ : ٢٨ : ٢٩ : ٣٠ : ٣١ : ٣٢ : ٣٣ : ٣٤ : ٣٥ : ٣٦ : ٣٧ : ٣٨ : ٣٩ : ٤٠ : ٤١ : ٤٢ : ٤٣ : ٤٤ : ٤٥ : ٤٦ : ٤٧ : ٤٨ : ٤٩ : ٥٠ : ٥١ : ٥٢ : ٥٣ : ٥٤ : ٥٥ : ٥٦ : ٥٧ : ٥٨ : ٥٩ : ٦٠ : ٦١ : ٦٢ : ٦٣ : ٦٤ : ٦٥ : ٦٦ : ٦٧ : ٦٨ : ٦٩ : ٧٠ : ٧١ : ٧٢ : ٧٣ : ٧٤ : ٧٥ : ٧٦ : ٧٧ : ٧٨ : ٧٩ : ٨٠ : ٨١ : ٨٢ : ٨٣ : ٨٤ : ٨٥ : ٨٦ : ٨٧ : ٨٨ : ٨٩ : ٩٠ : ٩١ : ٩٢ : ٩٣ : ٩٤ : ٩٥ : ٩٦ : ٩٧ : ٩٨ : ٩٩ : ١٠٠ : ١٠١ : ١٠٢ : ١٠٣ : ١٠٤ : ١٠٥ : ١٠٦ : ١٠٧ : ١٠٨ : ١٠٩ : ١١٠ : ١١١ : ١١٢ : ١١٣ : ١١٤ : ١١٥ : ١١٦ : ١١٧ : ١١٨ : ١١٩ : ١٢٠ : ١٢١ : ١٢٢ : ١٢٣ : ١٢٤ : ١٢٥ : ١٢٦ : ١٢٧ : ١٢٨ : ١٢٩ : ١٣٠ : ١٣١ : ١٣٢ : ١٣٣ : ١٣٤ : ١٣٥ : ١٣٦ : ١٣٧ : ١٣٨ : ١٣٩ : ١٤٠ : ١٤١ : ١٤٢ : ١٤٣ : ١٤٤ : ١٤٥ : ١٤٦ : ١٤٧ : ١٤٨ : ١٤٩ : ١٥٠ : ١٥١ : ١٥٢ : ١٥٣ : ١٥٤ : ١٥٥ : ١٥٦ : ١٥٧ : ١٥٨ : ١٥٩ : ١٦٠ : ١٦١ : ١٦٢ : ١٦٣ : ١٦٤ : ١٦٥ : ١٦٦ : ١٦٧ : ١٦٨ : ١٦٩ : ١٧٠ : ١٧١ : ١٧٢ : ١٧٣ : ١٧٤ : ١٧٥ : ١٧٦ : ١٧٧ : ١٧٨ : ١٧٩ : ١٨٠ : ١٨١ : ١٨٢ : ١٨٣ : ١٨٤ : ١٨٥ : ١٨٦ : ١٨٧ : ١٨٨ : ١٨٩ : ١٩٠ : ١٩١ : ١٩٢ : ١٩٣ : ١٩٤ : ١٩٥ : ١٩٦ : ١٩٧ : ١٩٨ : ١٩٩ : ٢٠٠ : ٢٠١ : ٢٠٢ : ٢٠٣ : ٢٠٤ : ٢٠٥ : ٢٠٦ : ٢٠٧ : ٢٠٨ : ٢٠٩ : ٢١٠ : ٢١١ : ٢١٢ : ٢١٣ : ٢١٤ : ٢١٥ : ٢١٦ : ٢١٧ : ٢١٨ : ٢١٩ : ٢٢٠ : ٢٢١ : ٢٢٢ : ٢٢٣ : ٢٢٤ : ٢٢٥ : ٢٢٦ : ٢٢٧ : ٢٢٨ : ٢٢٩ : ٢٣٠ : ٢٣١ : ٢٣٢ : ٢٣٣ : ٢٣٤ : ٢٣٥ : ٢٣٦ : ٢٣٧ : ٢٣٨ : ٢٣٩ : ٢٤٠ : ٢٤١ : ٢٤٢ : ٢٤٣ : ٢٤٤ : ٢٤٥ : ٢٤٦ : ٢٤٧ : ٢٤٨ : ٢٤٩ : ٢٥٠ : ٢٥١ : ٢٥٢ : ٢٥٣ : ٢٥٤ : ٢٥٥ : ٢٥٦ : ٢٥٧ : ٢٥٨ : ٢٥٩ : ٢٦٠ : ٢٦١ : ٢٦٢ : ٢٦٣ : ٢٦٤ : ٢٦٥ : ٢٦٦ : ٢٦٧ : ٢٦٨ : ٢٦٩ : ٢٧٠ : ٢٧١ : ٢٧٢ : ٢٧٣ : ٢٧٤ : ٢٧٥ : ٢٧٦ : ٢٧٧ : ٢٧٨ : ٢٧٩ : ٢٨٠ : ٢٨١ : ٢٨٢ : ٢٨٣ : ٢٨٤ : ٢٨٥ : ٢٨٦ : ٢٨٧ : ٢٨٨ : ٢٨٩ : ٢٩٠ : ٢٩١ : ٢٩٢ : ٢٩٣ : ٢٩٤ : ٢٩٥ : ٢٩٦ : ٢٩٧ : ٢٩٨ : ٢٩٩ : ٣٠٠ : ٣٠١ : ٣٠٢ : ٣٠٣ : ٣٠٤ : ٣٠٥ : ٣٠٦ : ٣٠٧ : ٣٠٨ : ٣٠٩ : ٣١٠ : ٣١١ : ٣١٢ : ٣١٣ : ٣١٤ : ٣١٥ : ٣١٦ : ٣١٧ : ٣١٨ : ٣١٩ : ٣٢٠ : ٣٢١ : ٣٢٢ : ٣٢٣ : ٣٢٤ : ٣٢٥ : ٣٢٦ : ٣٢٧ : ٣٢٨ : ٣٢٩ : ٣٣٠ : ٣٣١ : ٣٣٢ : ٣٣٣ : ٣٣٤ : ٣٣٥ : ٣٣٦ : ٣٣٧ : ٣٣٨ : ٣٣٩ : ٣٤٠ : ٣٤١ : ٣٤٢ : ٣٤٣ : ٣٤٤ : ٣٤٥ : ٣٤٦ : ٣٤٧ : ٣٤٨ : ٣٤٩ : ٣٥٠ : ٣٥١ : ٣٥٢ : ٣٥٣ : ٣٥٤ : ٣٥٥ : ٣٥٦ : ٣٥٧ : ٣٥٨ : ٣٥٩ : ٣٦٠ : ٣٦١ : ٣٦٢ : ٣٦٣ : ٣٦٤ : ٣٦٥ : ٣٦٦ : ٣٦٧ : ٣٦٨ : ٣٦٩ : ٣٧٠ : ٣٧١ : ٣٧٢ : ٣٧٣ : ٣٧٤ : ٣٧٥ : ٣٧٦ : ٣٧٧ : ٣٧٨ : ٣٧٩ : ٣٨٠ : ٣٨١ : ٣٨٢ : ٣٨٣ : ٣٨٤ : ٣٨٥ : ٣٨٦ : ٣٨٧ : ٣٨٨ : ٣٨٩ : ٣٩٠ : ٣٩١ : ٣٩٢ : ٣٩٣ : ٣٩٤ : ٣٩٥ : ٣٩٦ : ٣٩٧ : ٣٩٨ : ٣٩٩ : ٤٠٠ : ٤٠١ : ٤٠٢ : ٤٠٣ : ٤٠٤ : ٤٠٥ : ٤٠٦ : ٤٠٧ : ٤٠٨ : ٤٠٩ : ٤١٠ : ٤١١ : ٤١٢ : ٤١٣ : ٤١٤ : ٤١٥ : ٤١٦ : ٤١٧ : ٤١٨ : ٤١٩ : ٤٢٠ : ٤٢١ : ٤٢٢ : ٤٢٣ : ٤٢٤ : ٤٢٥ : ٤٢٦ : ٤٢٧ : ٤٢٨ : ٤٢٩ : ٤٣٠ : ٤٣١ : ٤٣٢ : ٤٣٣ : ٤٣٤ : ٤٣٥ : ٤٣٦ : ٤٣٧ : ٤٣٨ : ٤٣٩ : ٤٤٠ : ٤٤١ : ٤٤٢ : ٤٤٣ : ٤٤٤ : ٤٤٥ : ٤٤٦ : ٤٤٧ : ٤٤٨ : ٤٤٩ : ٤٥٠ : ٤٥١ : ٤٥٢ : ٤٥٣ : ٤٥٤ : ٤٥٥ : ٤٥٦ : ٤٥٧ : ٤٥٨ : ٤٥٩ : ٤٦٠ : ٤٦١ : ٤٦٢ : ٤٦٣ : ٤٦٤ : ٤٦٥ : ٤٦٦ : ٤٦٧ : ٤٦٨ : ٤٦٩ : ٤٧٠ : ٤٧١ : ٤٧٢ : ٤٧٣ : ٤٧٤ : ٤٧٥ : ٤٧٦ : ٤٧٧ : ٤٧٨ : ٤٧٩ : ٤٨٠ : ٤٨١ : ٤٨٢ : ٤٨٣ : ٤٨٤ : ٤٨٥ : ٤٨٦ : ٤٨٧ : ٤٨٨ : ٤٨٩ : ٤٩٠ : ٤٩١ : ٤٩٢ : ٤٩٣ : ٤٩٤ : ٤٩٥ : ٤٩٦ : ٤٩٧ : ٤٩٨ : ٤٩٩ : ٥٠٠ : ٥٠١ : ٥٠٢ : ٥٠٣ : ٥٠٤ : ٥٠٥ : ٥٠٦ : ٥٠٧ : ٥٠٨ : ٥٠٩ : ٥١٠ : ٥١١ : ٥١٢ : ٥١٣ : ٥١٤ : ٥١٥ : ٥١٦ : ٥١٧ : ٥١٨ : ٥١٩ : ٥٢٠ : ٥٢١ : ٥٢٢ : ٥٢٣ : ٥٢٤ : ٥٢٥ : ٥٢٦ : ٥٢٧ : ٥٢٨ : ٥٢٩ : ٥٣٠ : ٥٣١ : ٥٣٢ : ٥٣٣ : ٥٣٤ : ٥٣٥ : ٥٣٦ : ٥٣٧ : ٥٣٨ : ٥

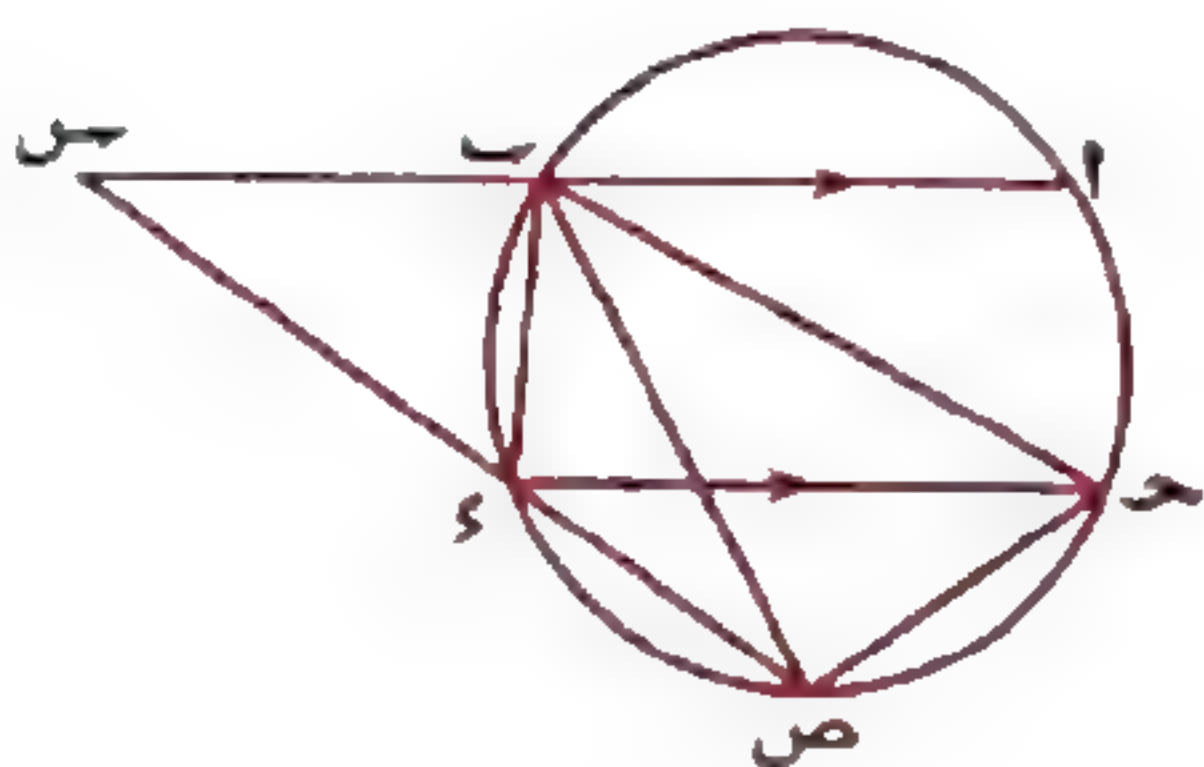
أثبت أن : (١) الشكل س ص ع ل مربع.

$$\frac{5}{8} = \frac{\text{م (المربع من ص ع ل)}}{\text{م (المربع ٢ - ح د)}} \quad (2)$$

نقطة في الشكل المقابل :

أ، ح، وتران متوازيان في دائرة، $\overline{AH} \cap \overline{CH} = H$ ، $\{H\}$

$$\frac{r(s)}{r(v)} = \frac{m(\Delta \cup s)}{m(\Delta \cup v)} : \text{أثبت أن :}$$

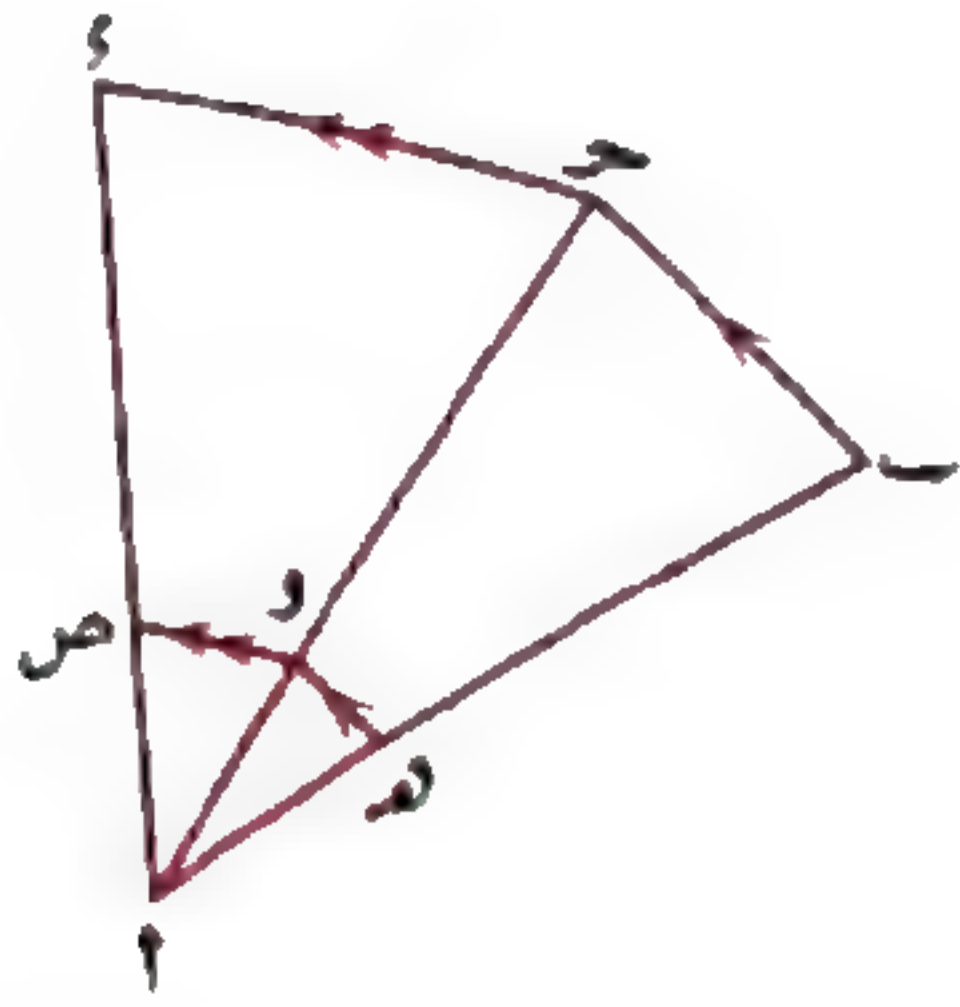


تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل

٢٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة (الشكل و ص و ح) = ٤٠ سم^٢

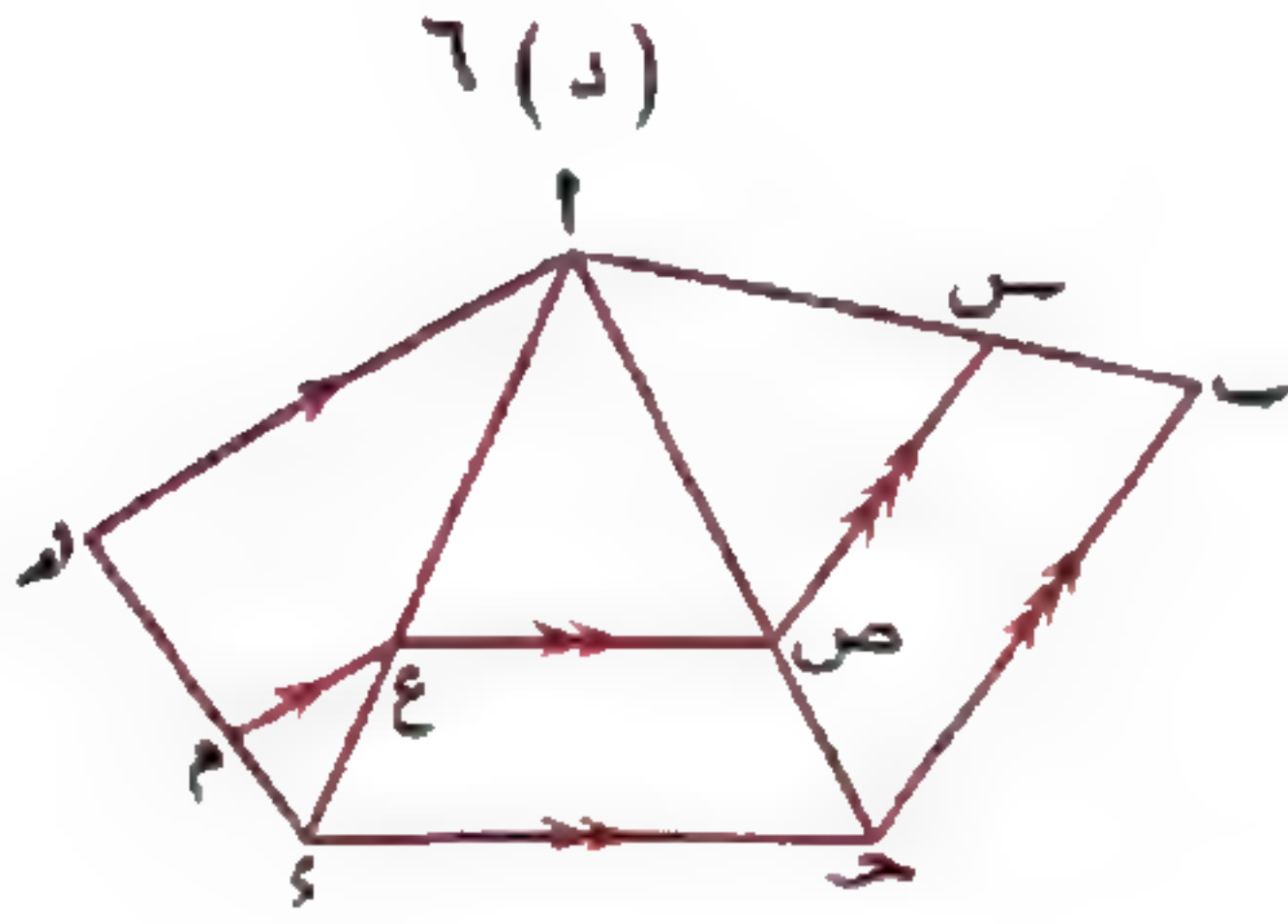
، مساحة (الشكل و هـ ب ح) = ٢٢ سم^٢

، مساحة (Δ ا و ص) = ٥ سم^٢

فإن مساحة (Δ ا هـ و) = سم^٢

- (١) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٢) في الشكل المقابل :



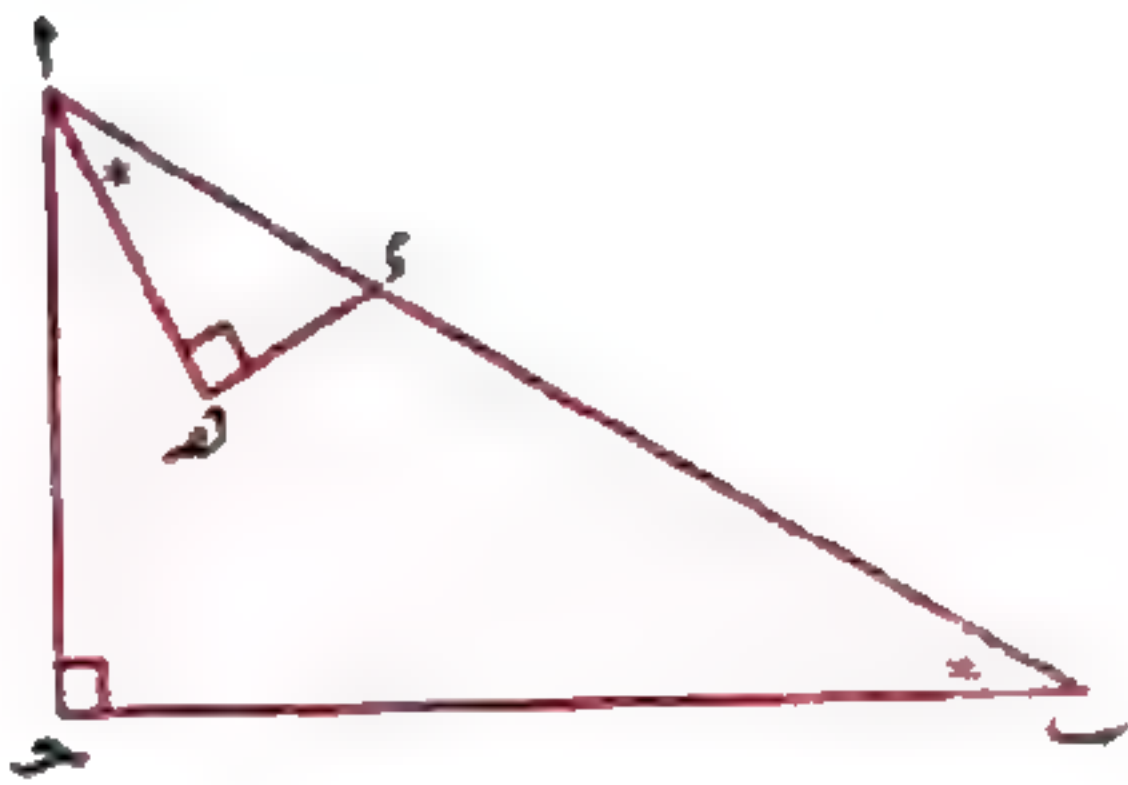
إذا كانت مساحة (Δ ا س ص) = ٤٠ سم^٢

، مساحة (Δ ع م) = ١٣ سم^٢

، مساحة (الشكل س ب ح ص) = ٥٠ سم^٢ فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (١) ٧٧ (ب) ٩٢ (ج) ١٠٤ (د) ١١٢

(٣) في الشكل المقابل :

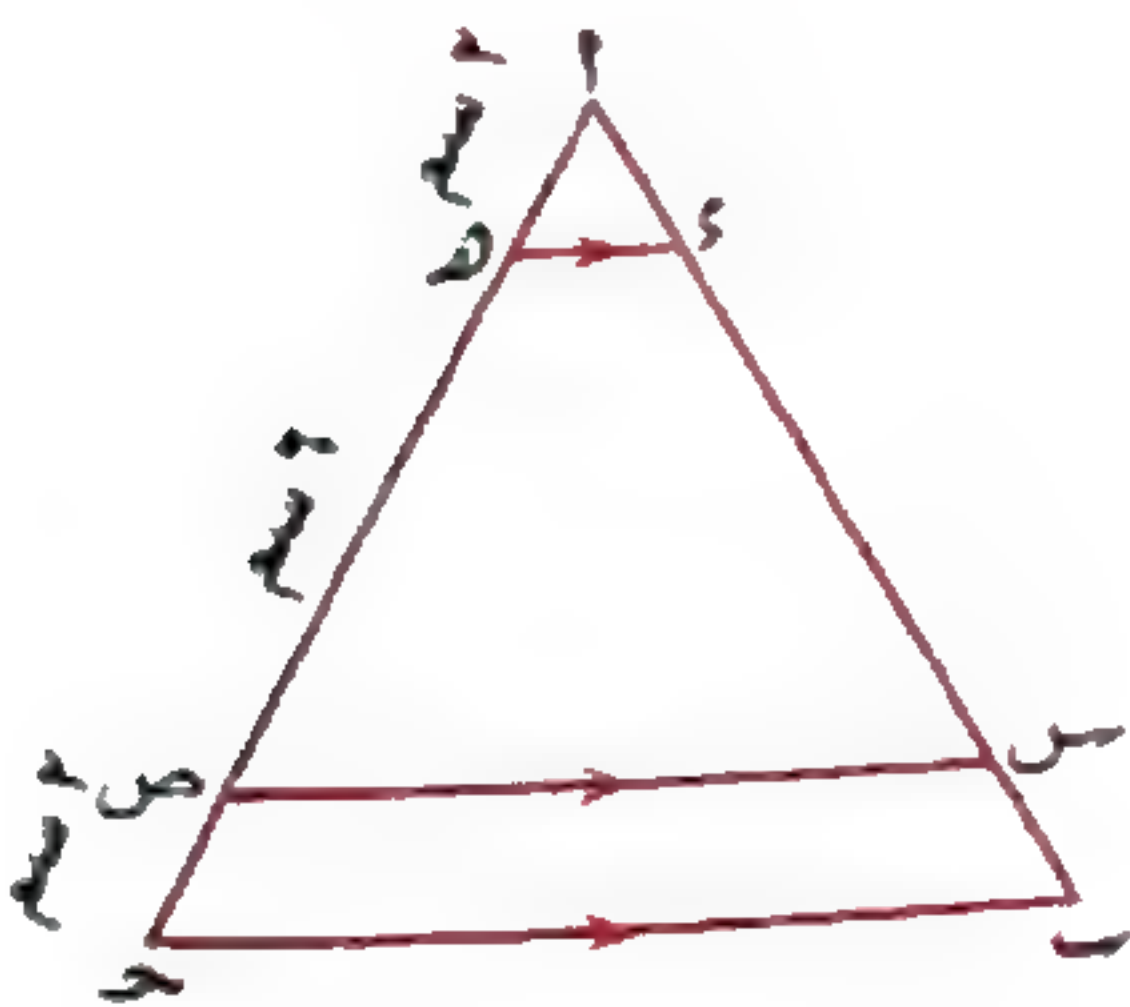


إذا كان : ب = ٢ و كانت مساحة Δ ا هـ م = ٦ سم^٢

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (١) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) ٤٨ (د) ٩٦

(٤) في الشكل المقابل :

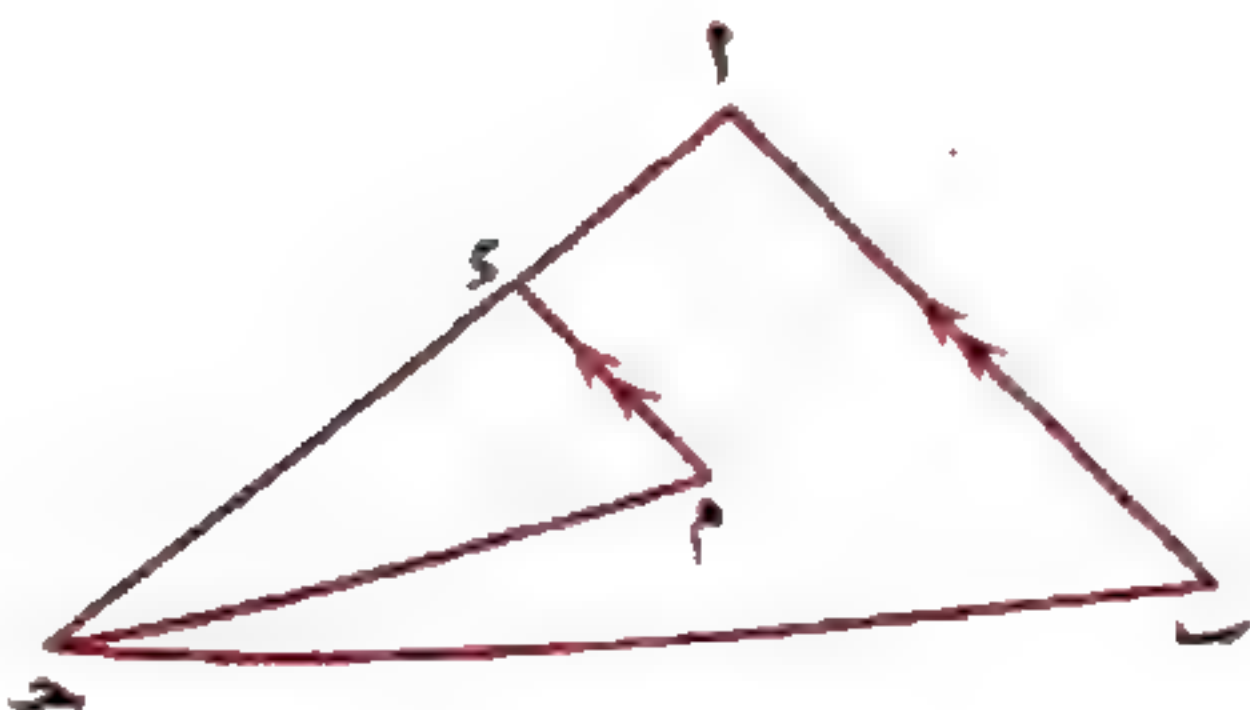


إذا كانت مساحة الشكل و س ص هـ = ٢٠ سم^٢

فإن مساحة الشكل س ب ح ص = سم^٢

- (١) ١٢ (ب) ١٦ (ج) ١٨ (د) ٢٠

(٥) في الشكل المقابل :



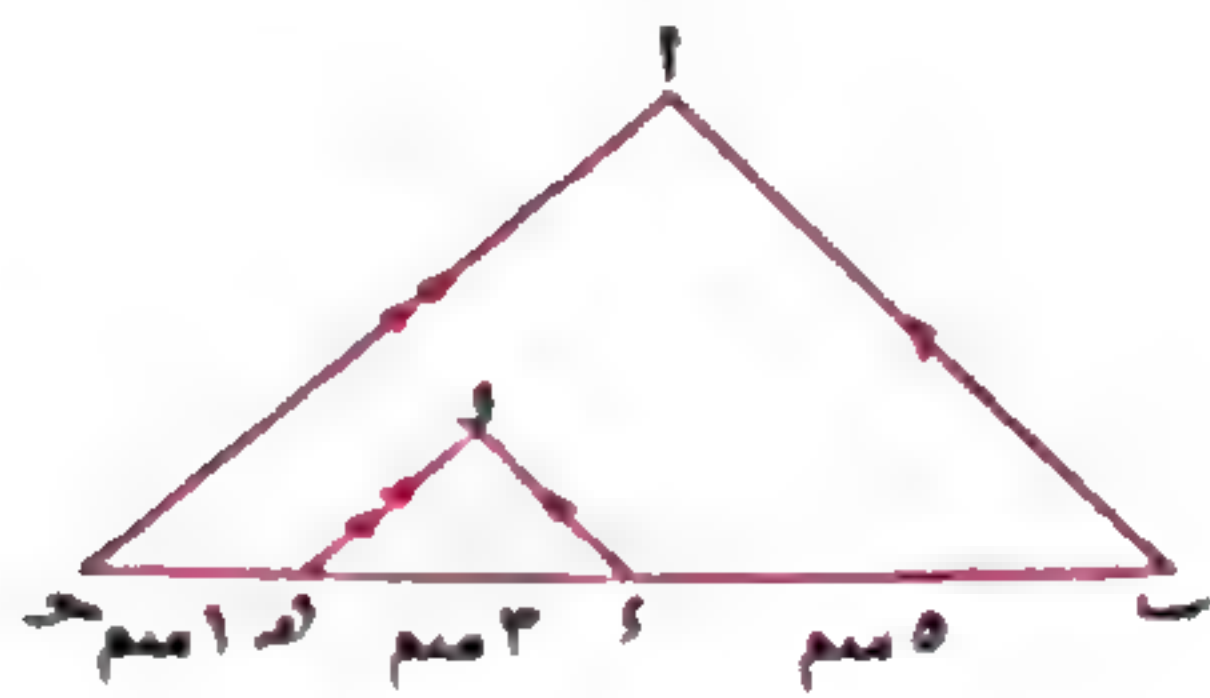
إذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات Δ ا ب ح ، م و // ا ب

و كانت مساحة Δ ا ب ح = ٣٦ سم^٢

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (١) ٢٧ (ب) ٢٨ (ج) ٣٢ (د) ٣٣

(٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة $\triangle DEB = 6 \text{ سم}^2$

فإن مساحة المنطقة المظللة = سم^2

(١) ٢٧

(ب) ٣٦

(ج) ٤٨

(د) ٥٤

(٧) إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEB$ وكان $AB = 5 \text{ سم}$ ، $DE = 3 \text{ سم}$ ، $BC = 1 + 5 \text{ سم}$ ،

مساحة $\triangle ABC = (2 + 5) \text{ سم}^2$ ، ومساحة $\triangle DEB = (7 + 5) \text{ سم}^2$ فإن قيمة $BC =$

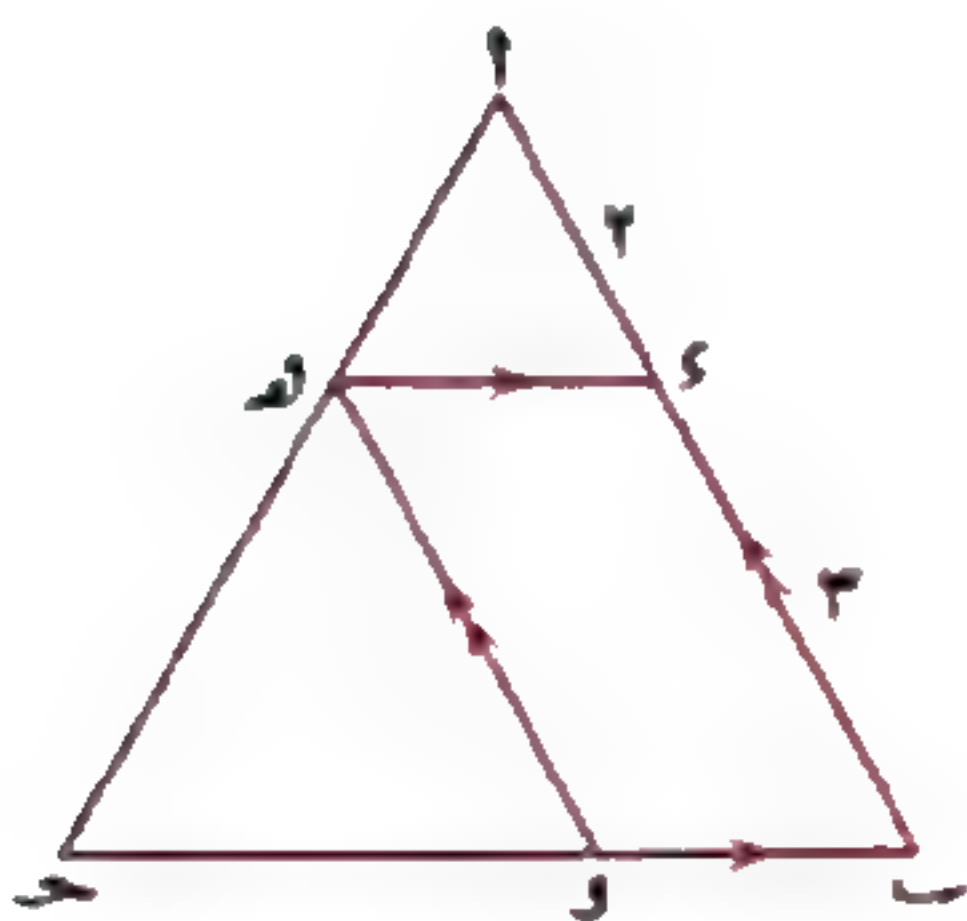
(١) ٤

(ب) ٣

(ج) ٢

(د) ١

(٨) في الشكل المقابل :



إذا كانت : $DE \parallel BC$ ، $AD \parallel BE$ ، $\frac{2}{3} = \frac{DE}{BC}$ ،

فإن : $\frac{\text{مساحة } (DEBC)}{\text{مساحة } (\triangle ABC)} =$

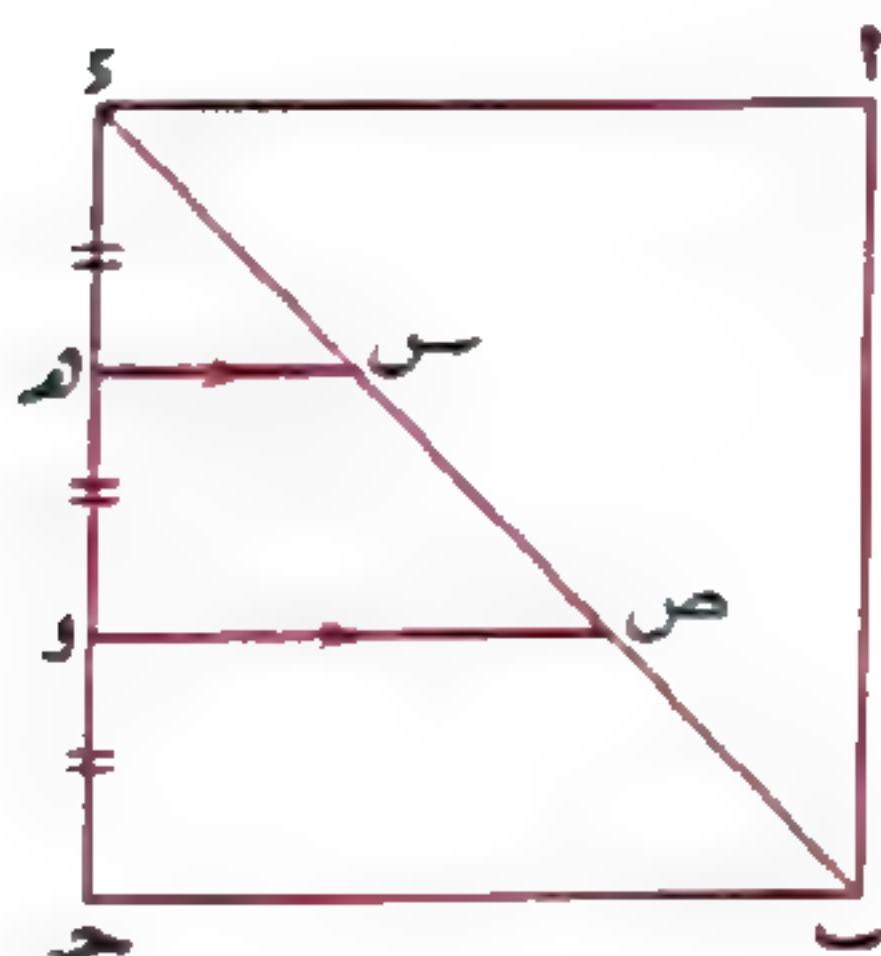
(١) $\frac{21}{25}$

(ب) $\frac{16}{25}$

(ج) $\frac{12}{25}$

(د) $\frac{12}{25}$

(٩) في الشكل المقابل :



AB مربع طول ضلعه ٦ سم، $DE = 3 \text{ سم}$ ، $DB = 4 \text{ سم}$ ، $AD = 3 \text{ سم}$

فإن : مساحة (الشكل $DEBC$) = سم^2

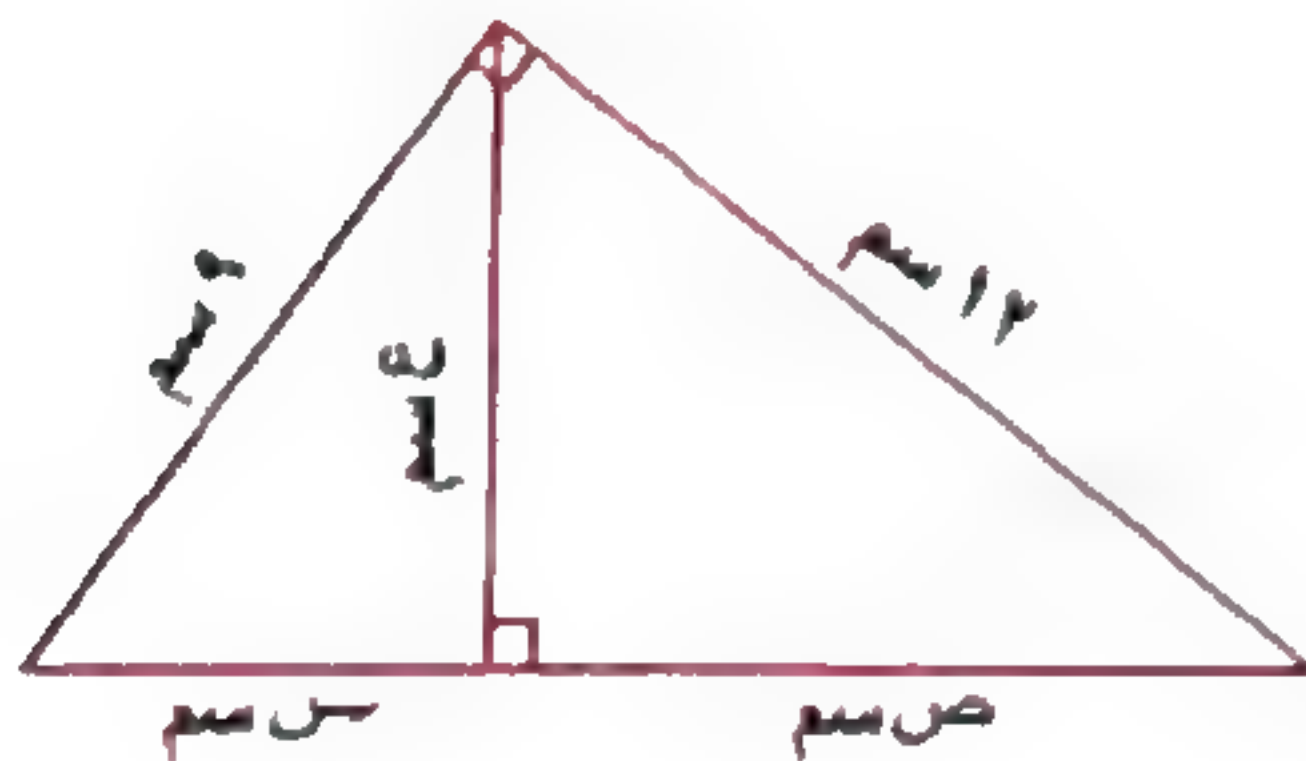
(١) ٦

(ب) ٨

(ج) ١٠

(د) ١٢

(١٠) في الشكل المقابل :



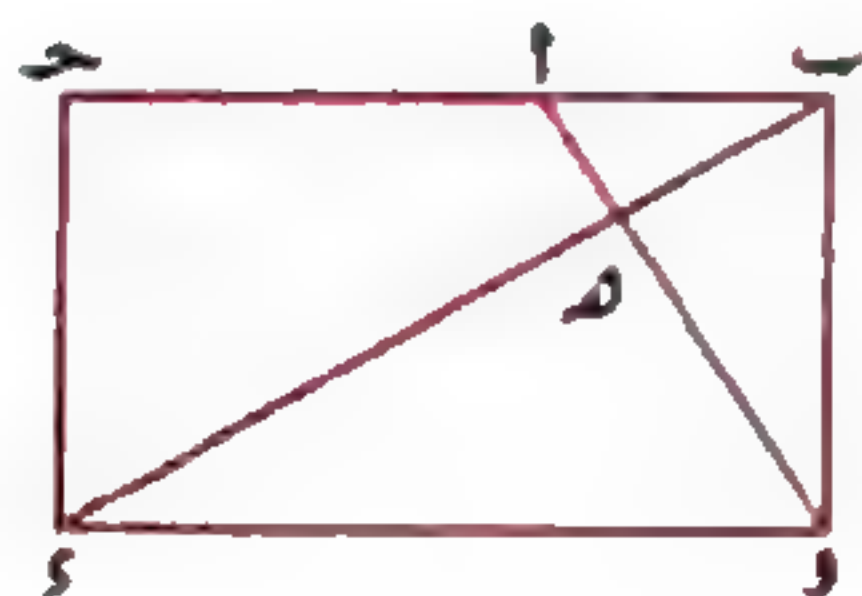
(ب) ١٨، ٢

(د) ٢٢، ٢

(١) ١٥

(ج) ٢٢

(١١) في الشكل المقابل :



AB و BC مستطيل ، مساحة $(\triangle ABC) = 2 \text{ سم}^2$

، مساحة $(\triangle DEB) = 3 \text{ سم}^2$

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^2

(١) ٥

(ب) $5\frac{1}{2}$

(ج) ٦

(د) $7\frac{1}{2}$

(١٢) إذا كان معامل تشابه المضلع M_1 للمضلع M_2 هو $\frac{2}{3}$ ومعامل تشابه المضلع M_2 للمضلع M_3 هو $\frac{1}{3}$ فأي من العلاقات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) مساحة (M_1) + مساحة (M_2) = مساحة (M_3)

(ب) مساحة (M_1) + مساحة (M_2) = مساحة (M_3)

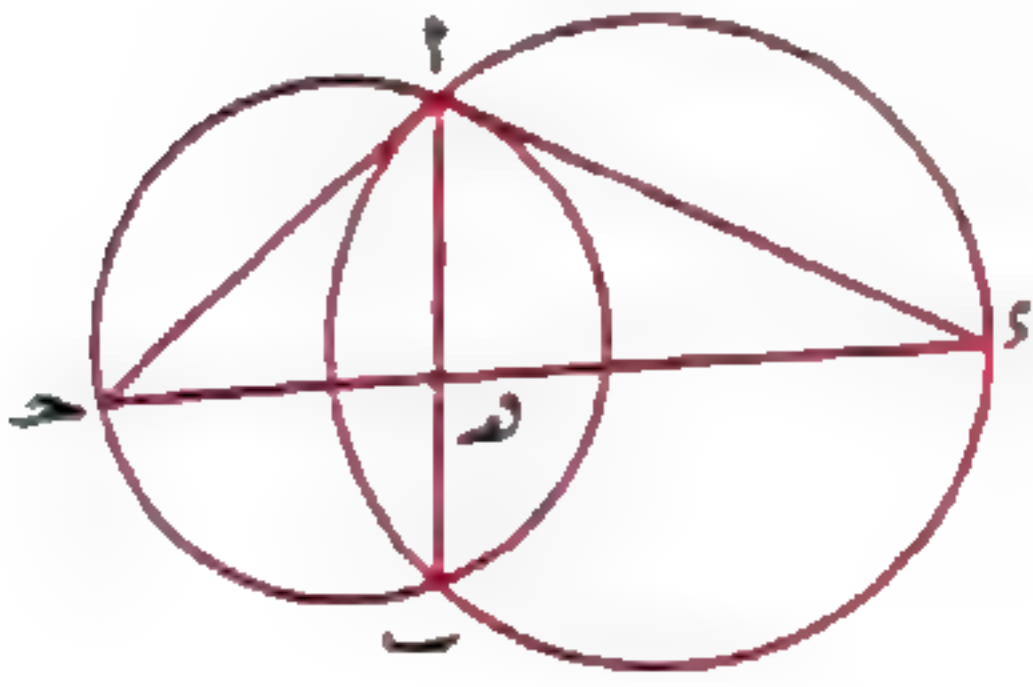
(ج) $\sqrt{\text{مساحة } (M_3)} = \sqrt{\text{مساحة } (M_2)} + \sqrt{\text{مساحة } (M_1)}$

(د) $\sqrt{\text{مساحة } (M_3)} = \sqrt{\text{مساحة } (M_2)} + \sqrt{\text{مساحة } (M_1)}$

٣٥ \overline{AB} قطر في دائرة ، H نقطة تنتمي للدائرة ، $S \in \overline{AB}$ بحيث $A-S-B=H$

، رسم SS' // AB ويقطع AB في S'

أثبت أن : $m(\Delta ASH) : m(\text{المضلع } S-S'-H) = (A-S) : (A-S')$

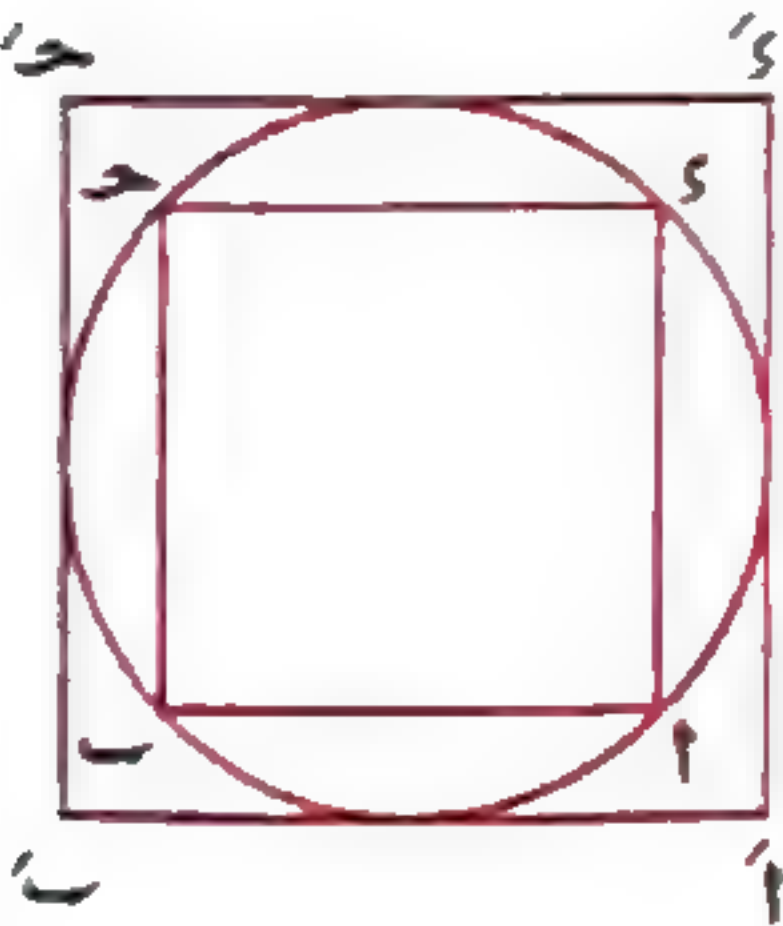


٣٦ في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في A ، B ، AB وتر في إحدى الدائرتين

يمس الأخرى عند A ، AB وتر في الدائرة الثانية يمس الأولى

عند A فإذا كان $AB \cap \overline{AB} = \{H\}$ فأثبت أن : $\frac{H(A)}{H(B)} = \frac{H(A)}{H(B)}$



" $\frac{1}{2}$ "

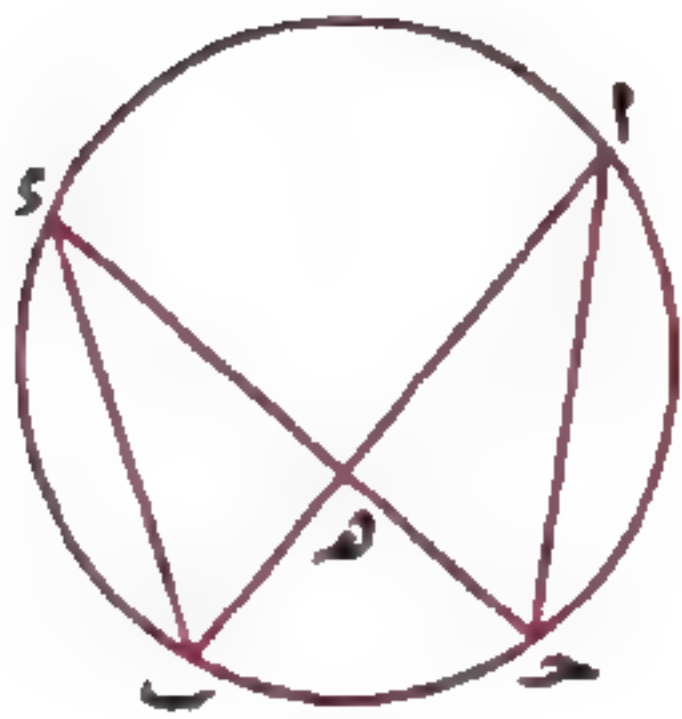
٣٧ في الشكل المقابل :

مربعان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم خارجها.

أوجد النسبة بين مساحتيهما.

تطبيقات التشابه في الدائرة

1 في الشكل المقابل



أ ب ، ح د وتران متقاطعان في نقطة هـ

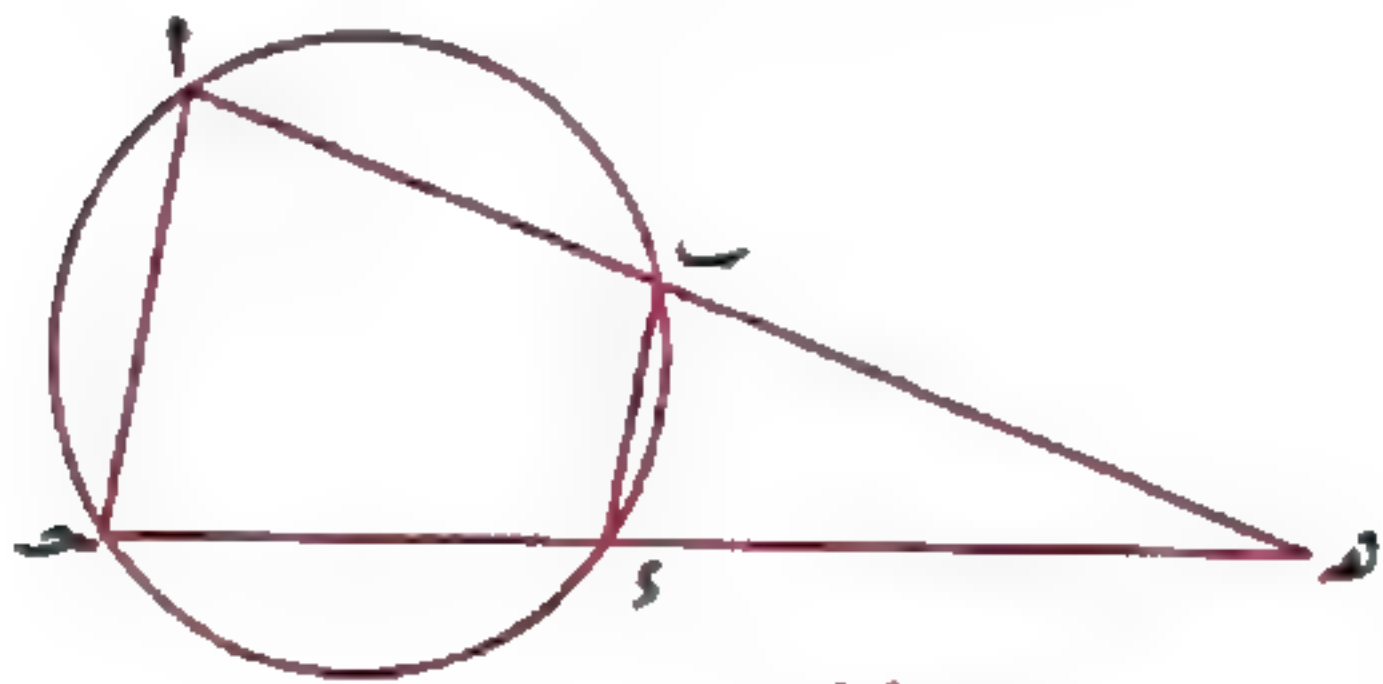
نلاحظ أن $\triangle هـ أ ح \sim \triangle هـ ب د$

وذلك لأن $\angle هـ أ ح = \angle هـ ب د$ (بالتقابل بالرأس)

، $\angle هـ ح أ = \angle هـ د ب$ (محيطيتان مشتركتان في $\widehat{ح د}$)

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{هـ ح}{هـ د} \therefore هـ أ \times هـ د = هـ ب \times هـ ح$

2 في الشكل المقابل



أ ب ح شكل رباعي دائري ، $\widehat{أ ب} \cap \widehat{ح د} = \{هـ\}$

نلاحظ أن $\triangle هـ أ ح \sim \triangle هـ ب د$

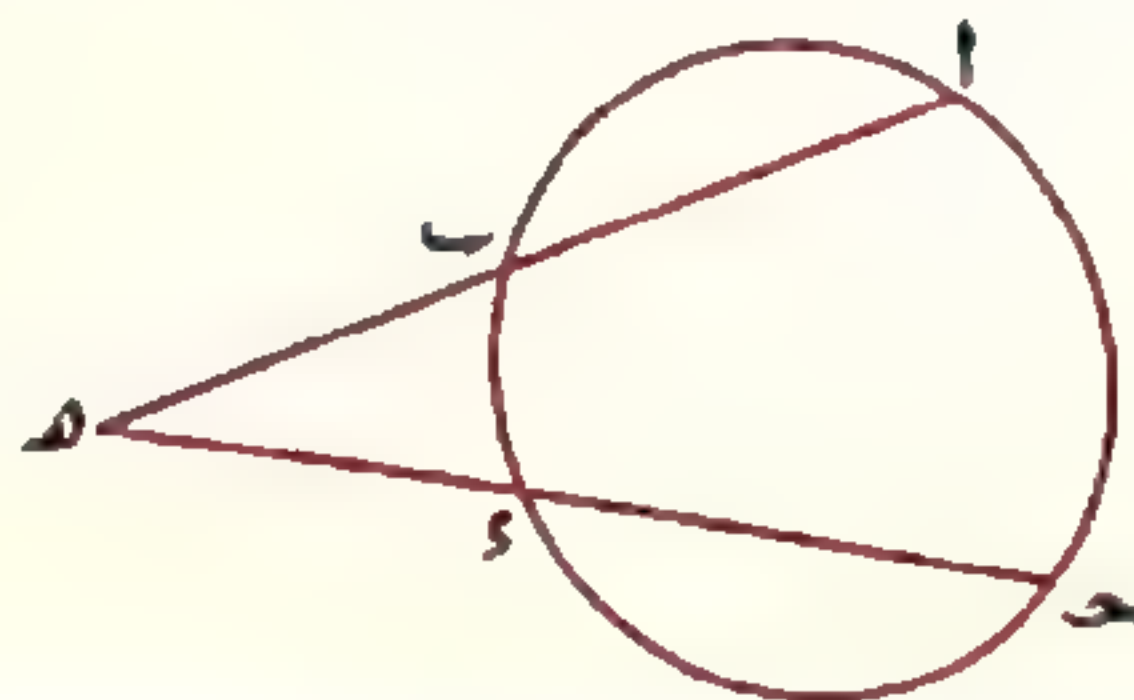
وذلك لأن $\angle هـ أ ح = \angle هـ ب د$ (خواص الرباعي الدائري) ، $\angle هـ ح أ = \angle هـ د ب$ (مشتركة)

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{هـ ح}{هـ د} \therefore هـ أ \times هـ د = هـ ب \times هـ ح$

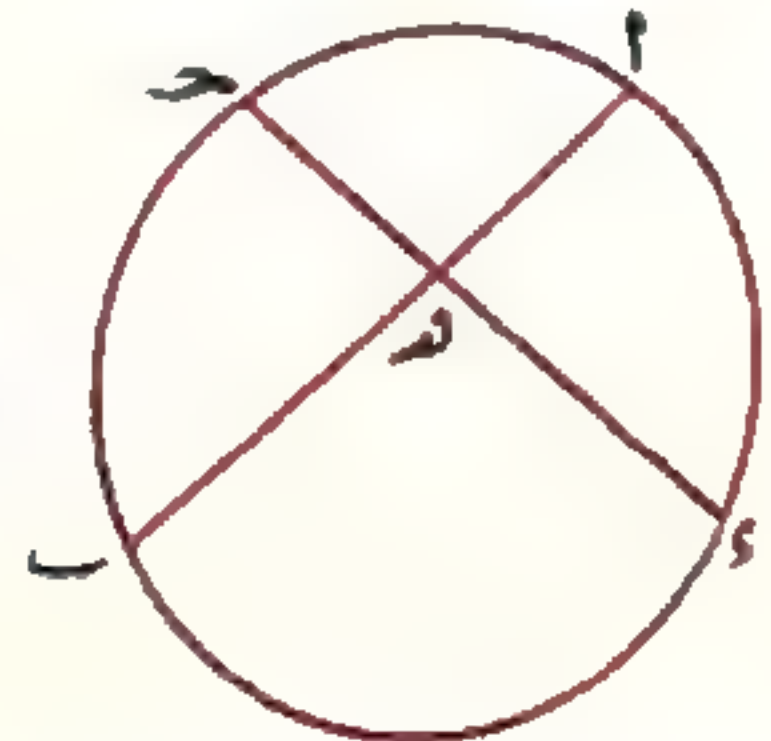
تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أ ب ، ح د لدائرة في نقطة هـ فإن : $هـ أ \times هـ د = هـ ب \times هـ ح$

شكل (٢)



شكل (١)



مسألة 1

أ ب ، ح د وتران في دائرة متقاطعان في ه فإذا كان : أ ه = ٢ سم ، ه ب = ٢ سم ، ح د = ٥.٥ سم
فاحسب : طول كل من ح ه ، ه د

الحل

بفرض أن : ح ه = س سم

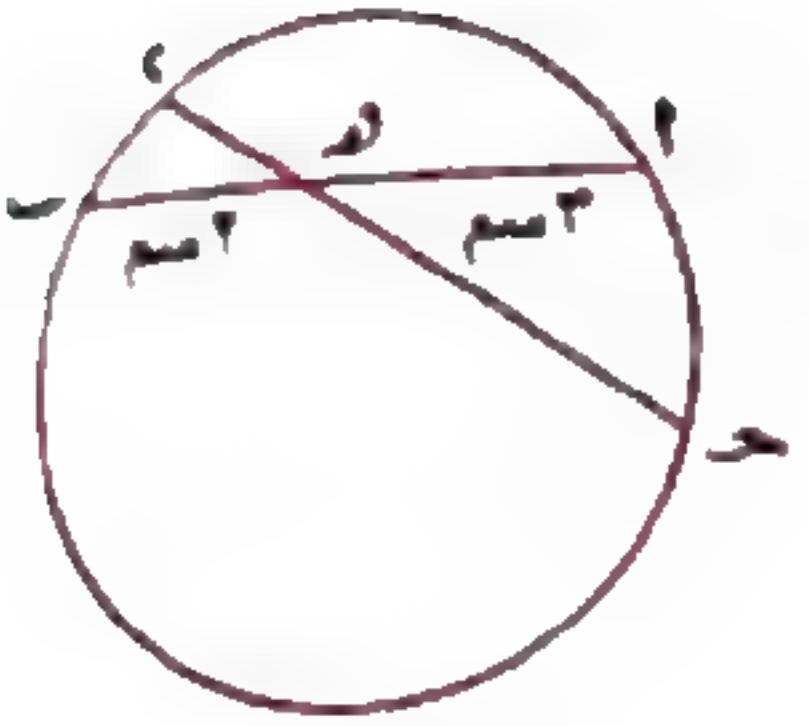
$$\therefore ه د = (٥.٥ - س) سم$$

$$\therefore أ ه \times ه ب = ح ه \times ه د$$

$$\therefore ٢ \times ٢ = س(٥.٥ - س)$$

$$\therefore (٢ - س)(٤ - س) = ٠$$

$$\therefore ح ه = ٤ سم ، ه د = ١.٥ سم$$



، $\therefore أ ب ، ح د$ وتران متقاطعان في ه

$$\therefore ٢ \times ٢ = س(٥.٥ - س)$$

$$\therefore ٢ س^2 - ١١ س + ١٢ = ٠$$

$$\therefore س = \frac{٢}{٤} ، س = ٤$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$$أ ب \cap ح د = \{ ه \} ، أ ه = ٢ سم ، ه ب = ٨ سم$$

$$، ح ه = (١ + س) سم ، ه د = (١ - س) سم$$

أوجد : قيمة س

مسألة 2

في الشكل المقابل :

$$أ ب \cap ح د = \{ ه \} ، ه ب = ٢ سم ، أ ب = ٧ سم$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{ه د}{ه ح}$$

فأوجد : طول ه ح

الحل

$$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{ه د}{ه ح}$$

$$\therefore ه د = ه ح ، ه ح = ٢ حيث ه د \neq ٠$$

$$\therefore \{ ه \} = أ ب \cap ح د$$

$$\therefore ١٨ = ٩ \times ٢ = ه د \times ه ح$$

$$\therefore ١٨ = ه د^2$$

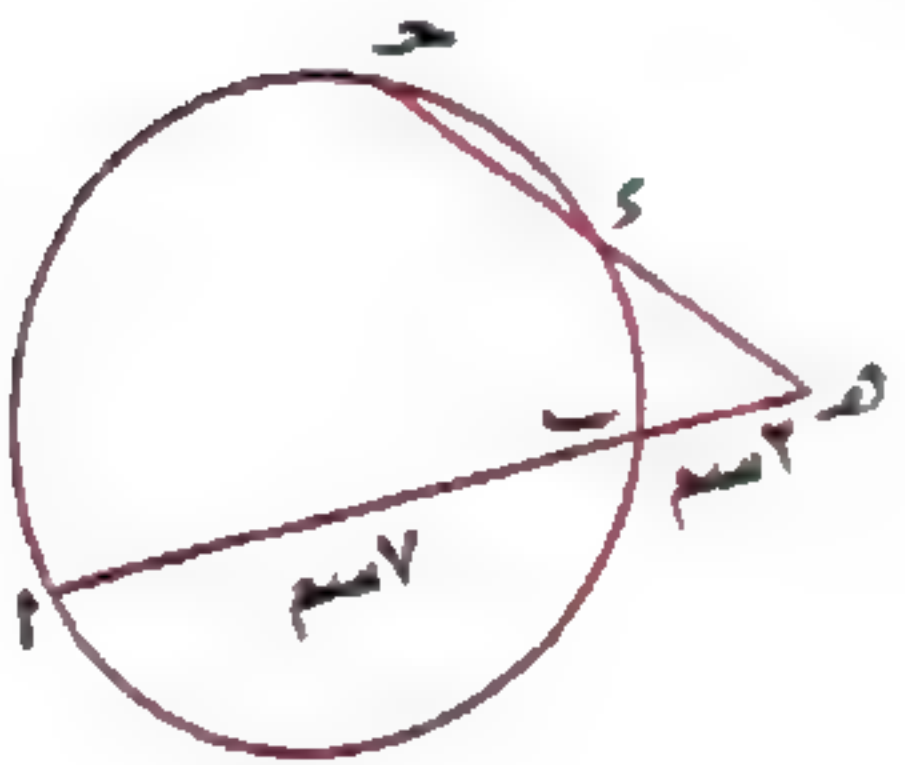
$$\therefore ه د = ٣ ، ٢ - (مرفوض)$$

$$\therefore ه د \times ه ح = ه ح \times ه ب$$

$$\therefore ه د^2 = ٩$$

$$\therefore ه ح = ٢ \times ٢ = ٦ سم$$

(وهو المطلوب)



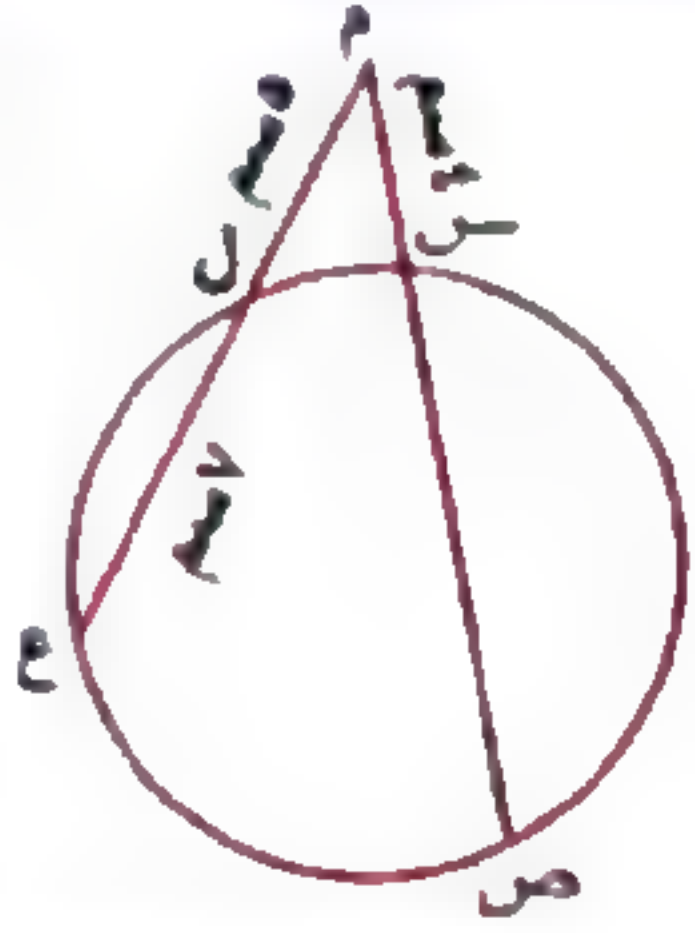
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

ص س \cap ع ل = {م} ، م س = ع سم ، م ل = ه سم

ل ع = ٧ سم

أوجد : طول س ص



ملاحظة

في الشكل المقابل :

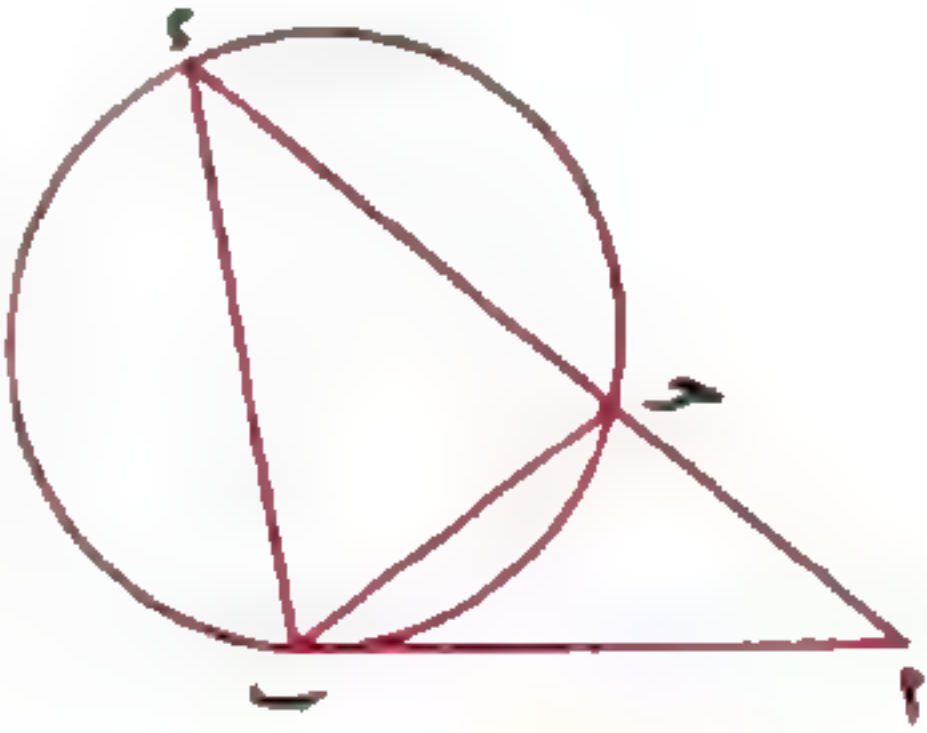
أ ب مماسة للدائرة عند ب

نلاحظ أن $\triangle أ ب ح \sim \triangle ع أ ب$

وذلك لأن $\angle ب = \angle ب$ (زاوية مشتركة)

(مماسية ومحيطية مشتركتان في ب ح)

د أ مشتركة.



تذكراه

أ ب وسط متناسب

بين أ ح ، ع ب

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{أ ب}{ع ب} = \frac{أ ح}{ب ح} \therefore (أ ب) \times ب ح = ع ب \times أ ح$

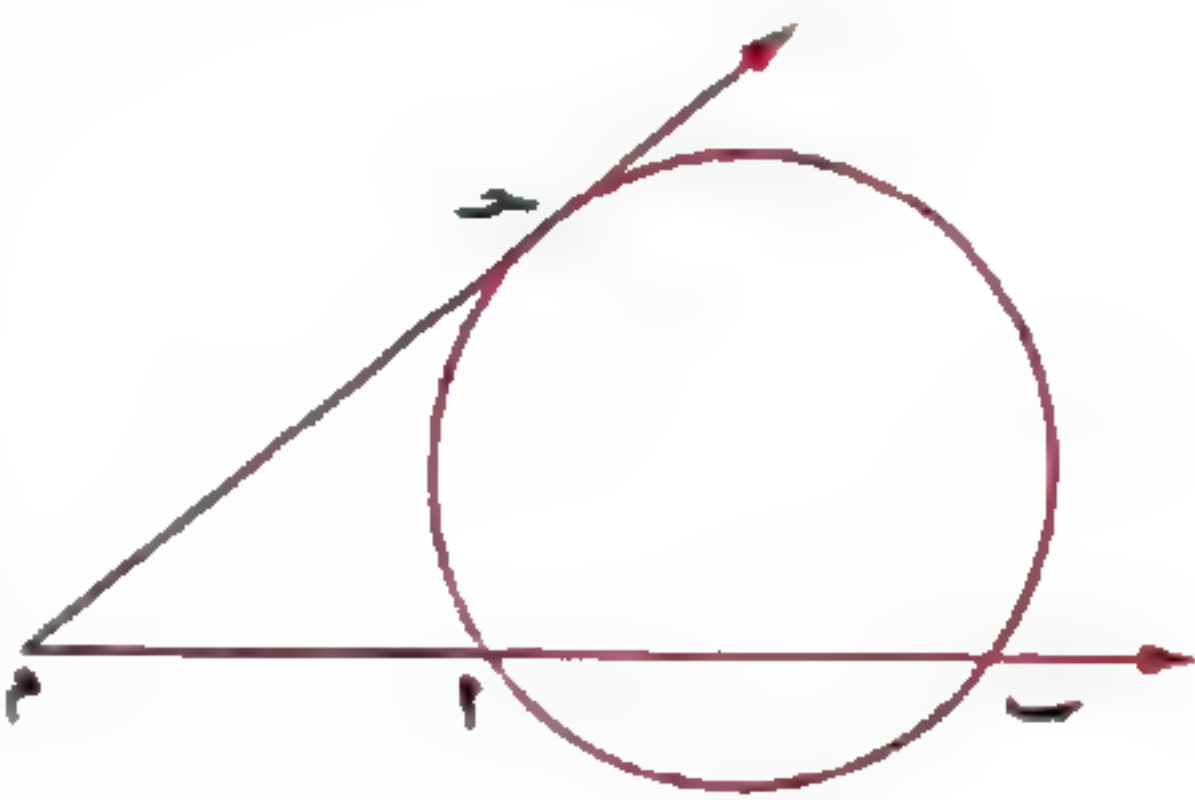
نتيجة

إذا كانت م نقطة خارج دائرة

م ح ممس الدائرة في ح

م ب يقطعها في أ ، ب

فإن : $(م ح)^2 = م أ \times م ب$



مثال ٣

م نقطة خارج دائرة ، م ح قطعة مماسة لها عند ح ، م أ قاطع لها في أ ، ب حيث م أ < م ب

فإذا كان : م ح = ١٠ سم ، أ ب = ١٥ سم فاحسب : طول م ب

الحل

نفرض أن : م ب = س سم

∴ م ح مماسة للدائرة ، م أ قاطع لها

∴ $(١٠)^2 = س(١٥ + س)$

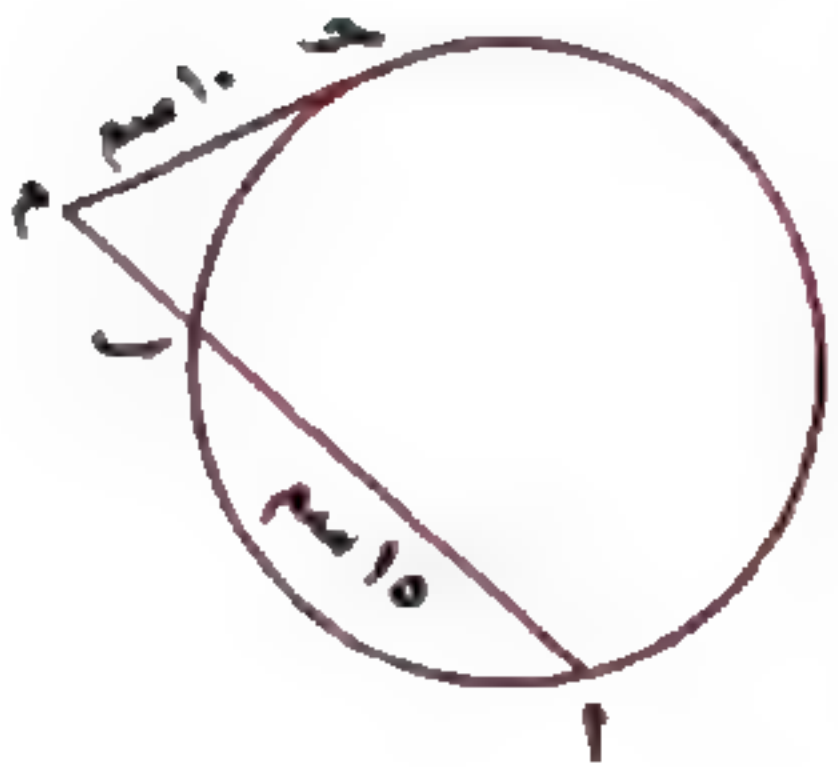
∴ $س^2 + ١٥ س - ١٠٠ = ٠$

∴ س = ٥ أي م ب = ٥ سم

∴ م أ = (١٥ + س) سم

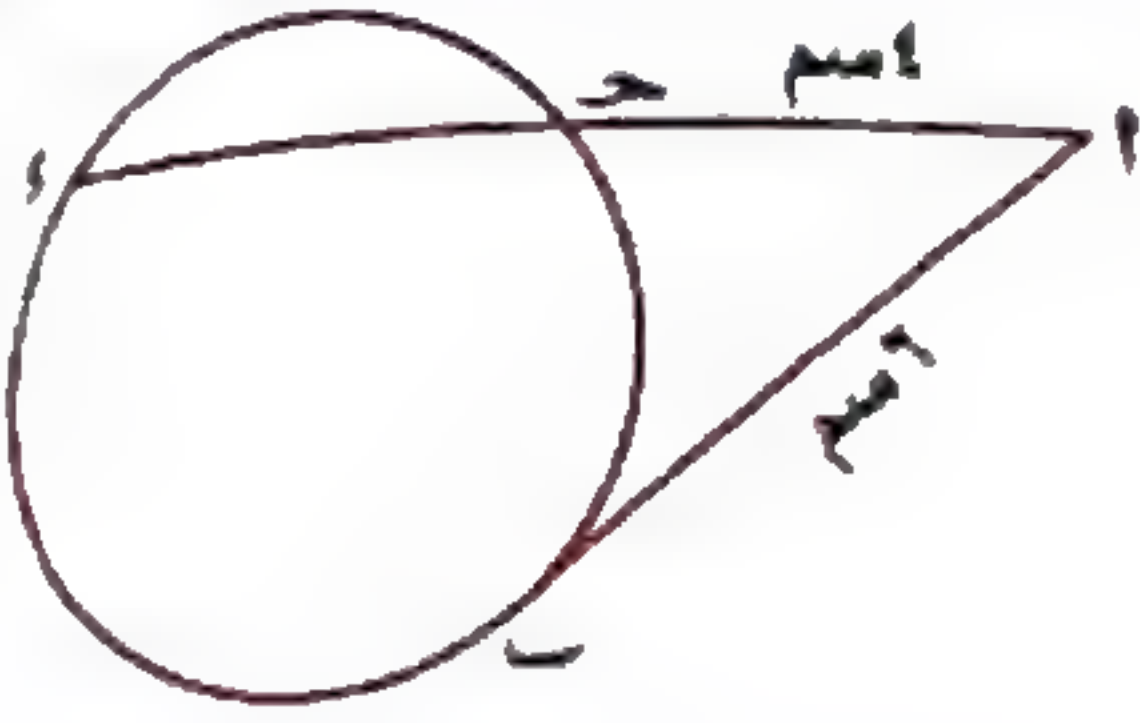
∴ $(م ح)^2 = م أ \times م ب$

∴ $(١٠ - س)(٢٠ + س) = ٠$



(وهو المطلوب)

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :
 أ و قاطع للدائرة عند ح ، د ، ب مماسة للدائرة عند ب
 أوجد : طول ح د

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للقطعتين أ ب ، ح د في نقطة هـ (مختلفة عن أ ، ب ، ح ، د)
 وكان هـ أ × هـ ب = هـ ح × هـ د

فإن النقط : أ ، ب ، ح ، د تقع على دائرة واحدة.
 ففي الشكلين المقابلين :

إذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ ح × هـ د
 فإن النقط :

أ ، ب ، ح ، د تقع على دائرة واحدة.

مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه : أ ح = ٩ سم ، ب ح = ١٢ سم ، فرضت د ع فرضت د ع = ٥ سم ، وفرضت هـ د = ٣ سم
 بحيث $\frac{ب ح}{هـ د} = ٢$ أثبت أن : الشكل أ ب هـ د رباعي دائري.

الحل



$$\therefore ح د = أ ح - أ د = ٩ - ٥ = ٤ \text{ سم} \quad \therefore ح د \times د ع = ٩ \times ٤ = ٣٦$$

$$\therefore ب ح = ١٢ \text{ سم} \quad \therefore ب ح \times ح هـ = ١٢ \times ٣ = ٣٦$$

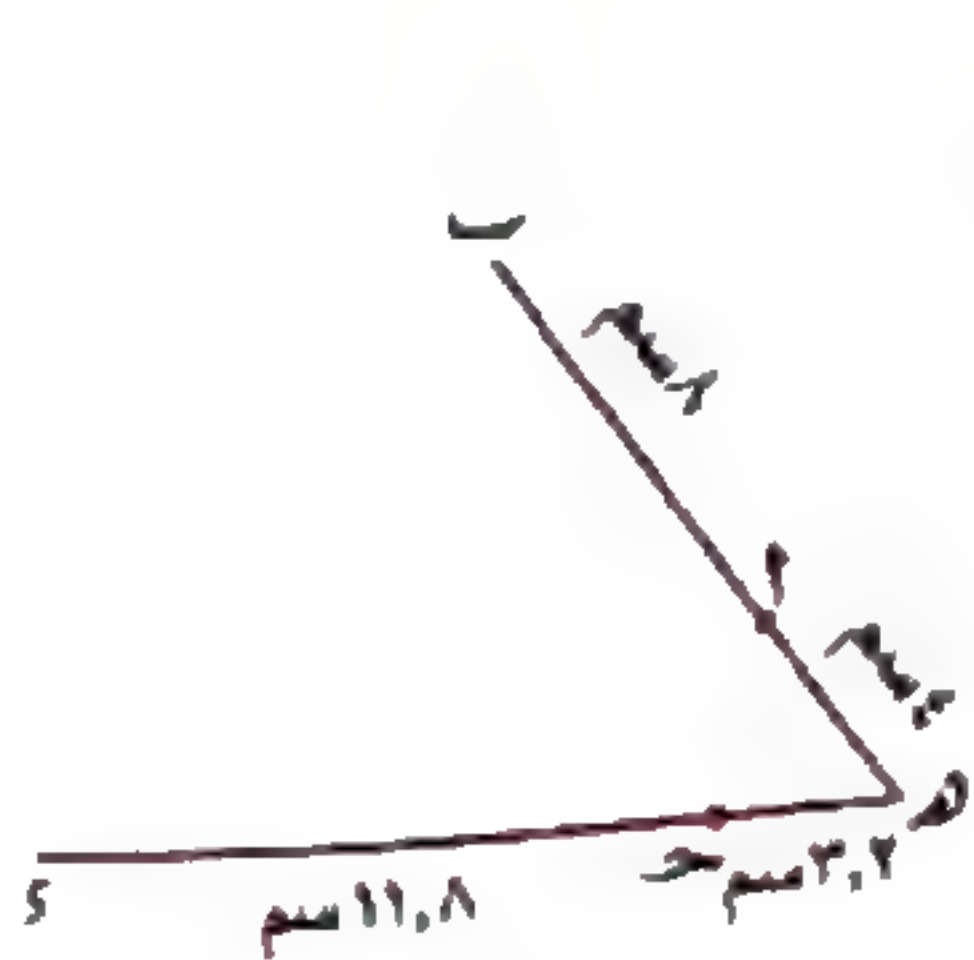
$$\therefore ح د \times د ع = ب ح \times ح هـ \quad \therefore \frac{ب ح}{هـ د} = \frac{ب ح}{٣} = ١٢ \times \frac{١}{٣} = ٤ \text{ سم}$$

$$\therefore ح د \times د ع = أ ح \times ح د \quad \therefore \text{الشكل أ ب هـ د رباعي دائري.}$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

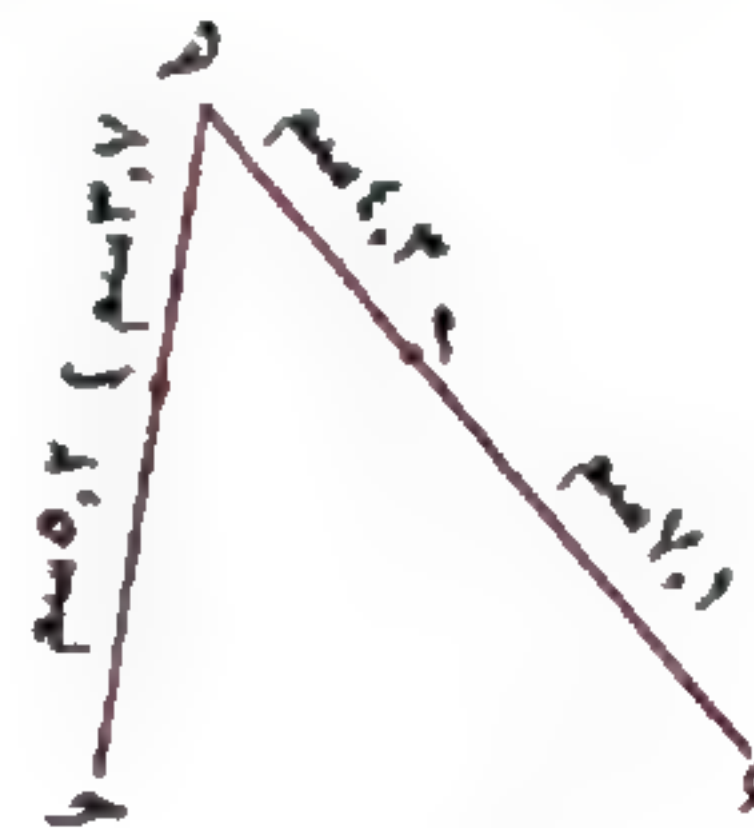
في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، ح ، د على دائرة واحدة ؟



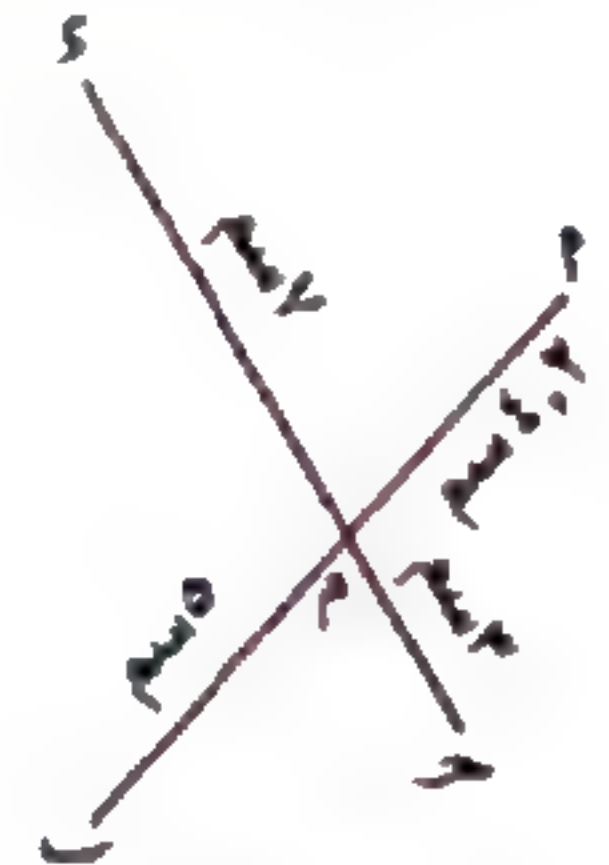
شكل (E)



شكل (٣)

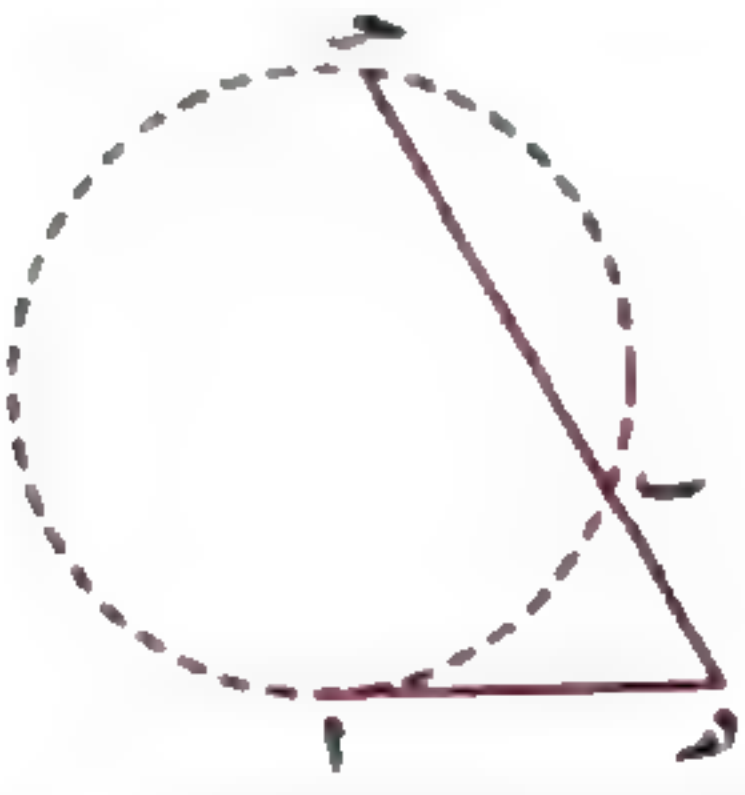


شكل (٢)



شكل (١)

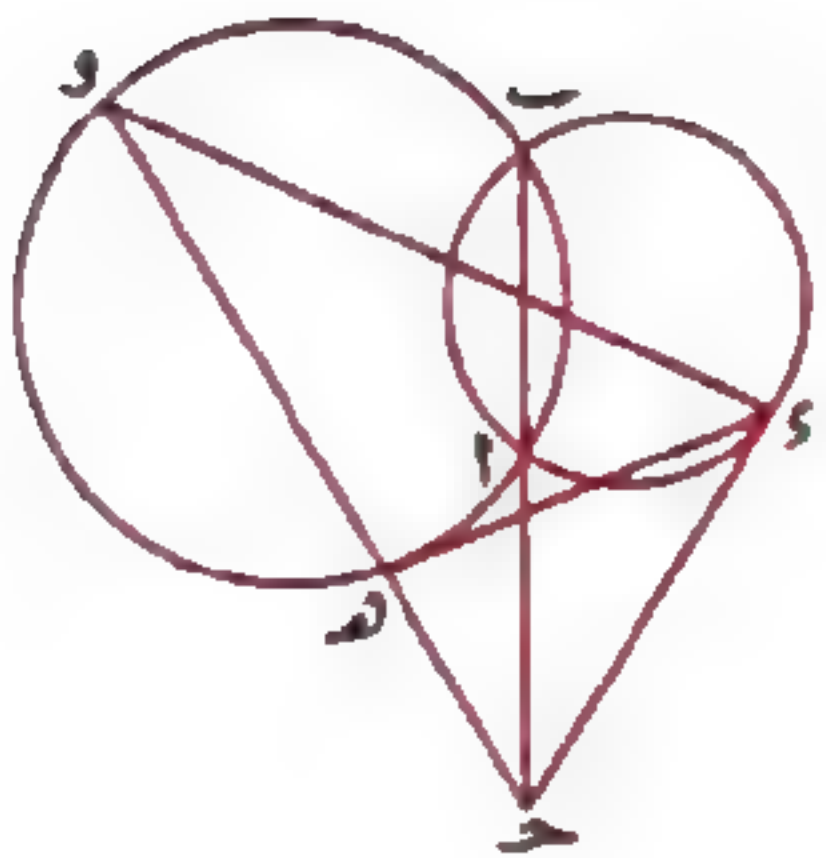
إذا كان : $(م أ)^2 = م ب \times م ح$
فإن : $م أ$ تماس الدائرة المارة
بالنقط $أ ، ب ، ح$



مأال ٥

دائرتان متقاطعتان في $أ ، ب$ ، نقطة $ح \in م أ$ ، $ح أ \neq م ب$ ، $ح د$ مماسة لإحدى الدائرتين في $د$ ، $ح و$ قاطعة للأخرى في $هـ$ ، وحيث $ح و < ح هـ$
أثبت أن : $ح د$ مماسة للدائرة المارة بالنقط $د ، هـ ، و$

الحل



(١)

(٢)

∴ $ح ب$ ، $ح و$ قاطعتان لإحدى الدائرتين.

∴ $ح أ \times ح ب = ح و \times ح هـ$

∴ $ح د$ مماسة للدائرة الأخرى ، $ح ب$ قاطعة لها

∴ $(ح د)^2 = ح أ \times ح ب$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(ح د)^2 = ح و \times ح هـ$

∴ $ح د$ مماسة للدائرة المارة بالنقط $د ، هـ ، و$

(وهو المطلوب)

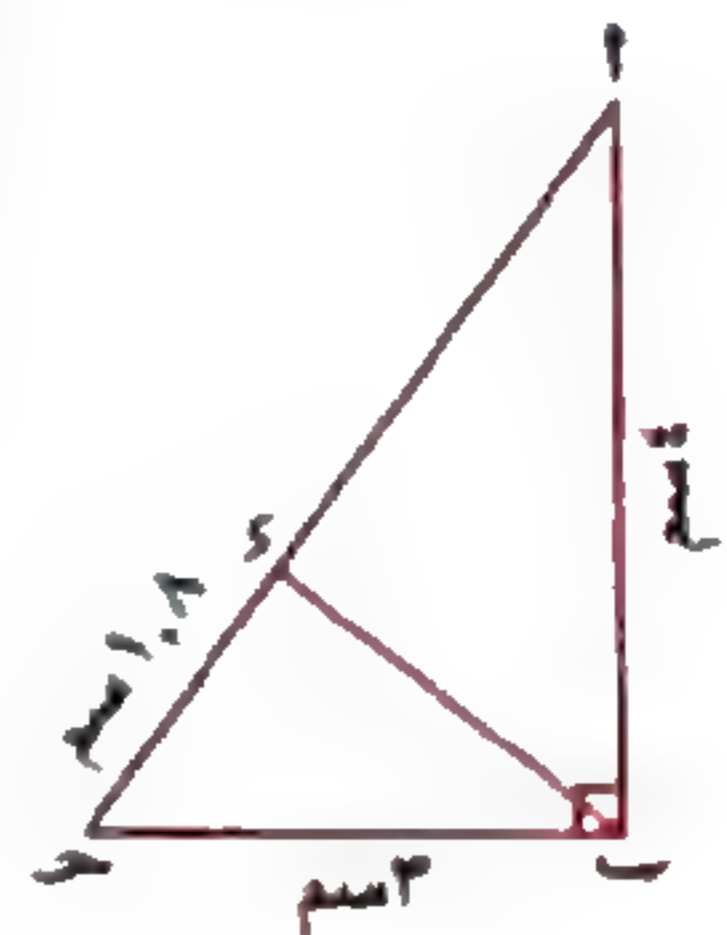
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$أ ب ح$ مثلث قائم الزاوية في $ب$

$أ ب = ٤$ سم ، $ب ح = ٣$ سم ، $ح د = ١,٨$ سم

أثبت أن : $ب ح$ مماسة للدائرة المارة بالنقط $أ ، ب ، د$





على تطبيقات التشابه في الدائرة

4

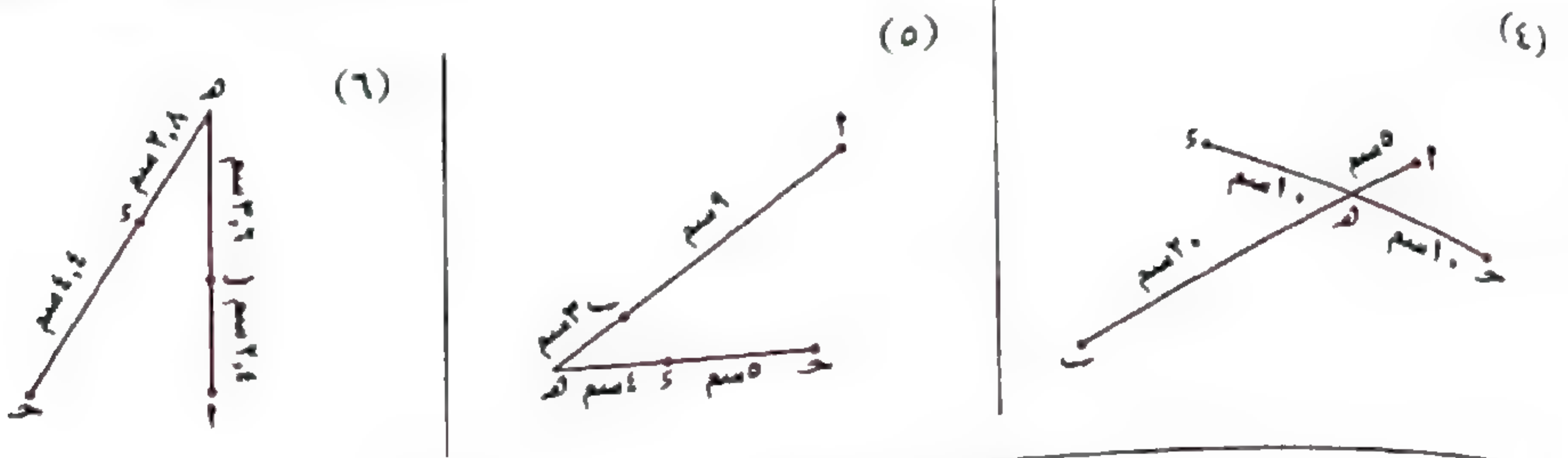
من أسئلة الكتاب المدرسي

باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلي ، أوجد قيمة x العددية في كل من الأشكال التالية :

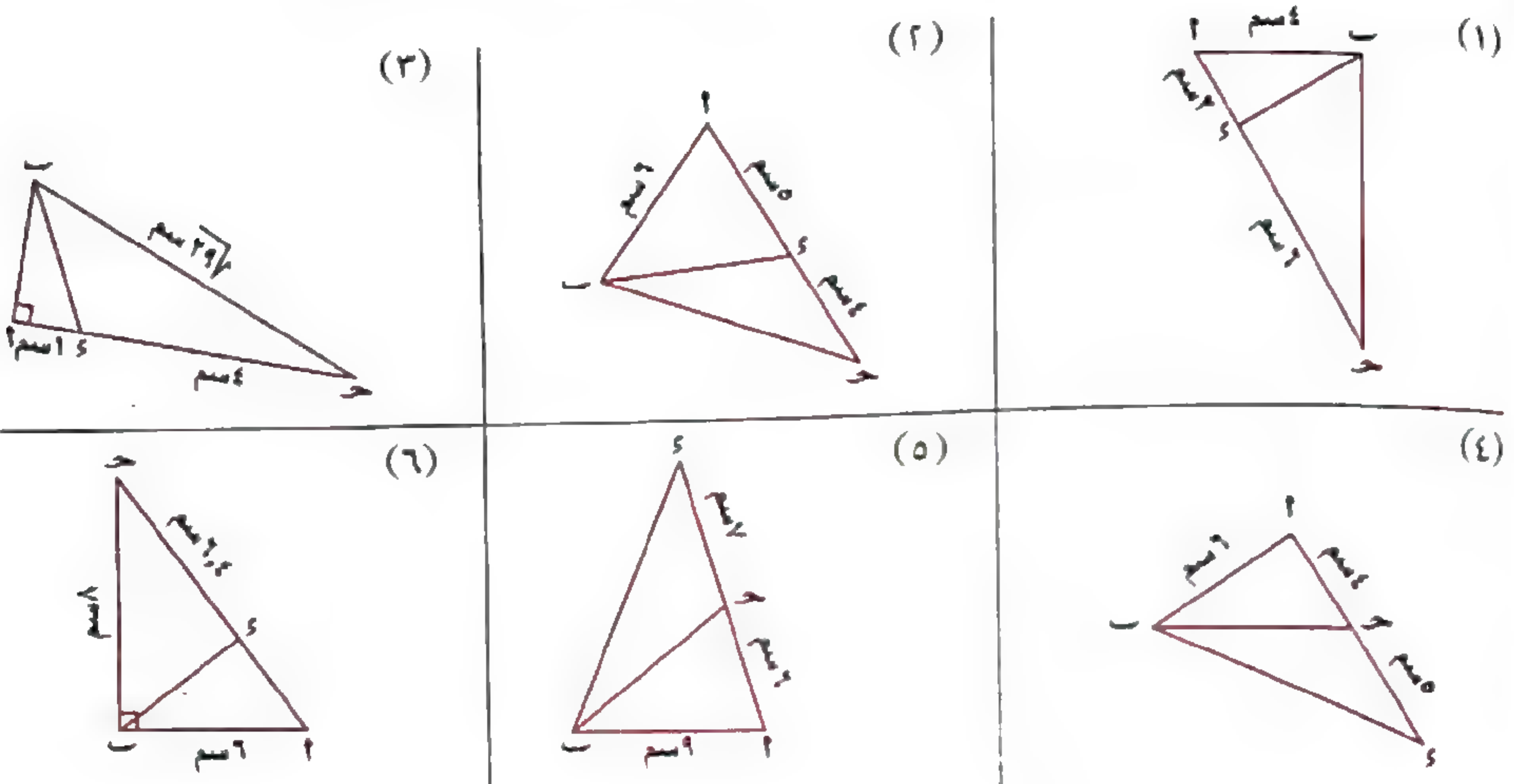
<p>(٣)</p>	<p>(٢)</p>	<p>(١)</p>
<p>(٦)</p>	<p>(٥)</p>	<p>(٤)</p>
<p>(٩)</p>	<p>(٨)</p>	<p>(٧)</p>
<p>(١٢)</p>	<p>(١١)</p>	<p>(١٠)</p>

في أي من الأشكال التالية تقع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة ؟ فسر إجابتك.

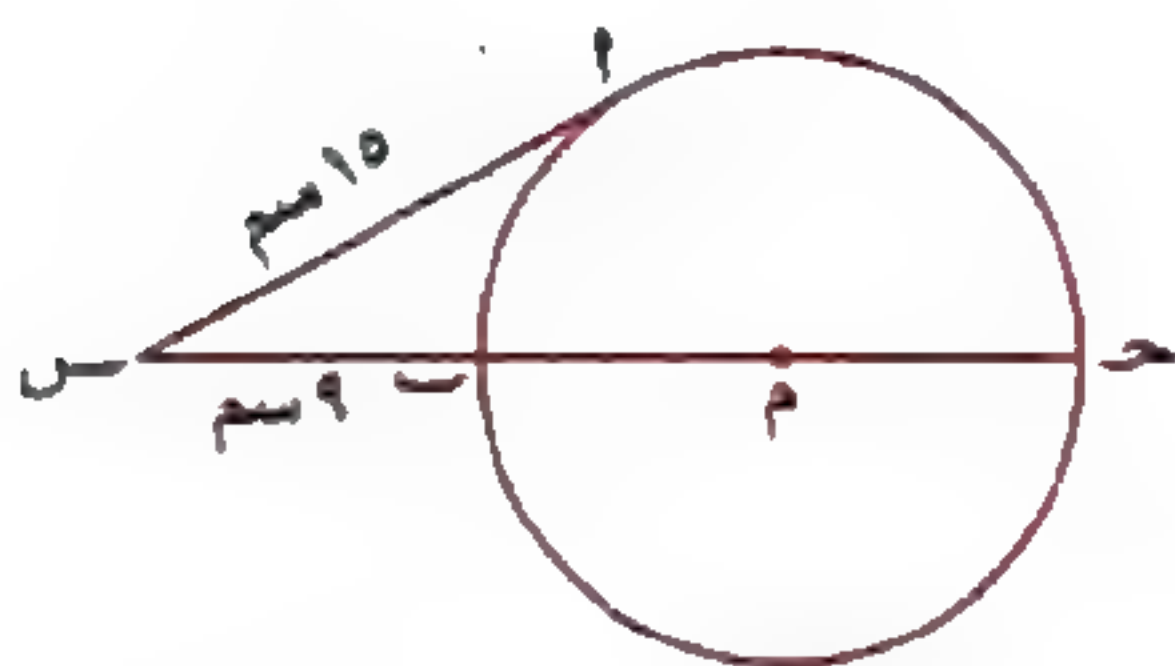
<p>(٣)</p>	<p>(٢)</p>	<p>(١)</p>
------------	------------	------------



في أي من الأشكال التالية \overline{AB} قطعة مماسة للدائرة المارة بالنقط B ، C ، D :



في الشكل المقابل :



سأ مماسة للدائرة م عند أ حيث $AB = 15$ سم

فإذا كان : $BC = 9$ سم

فاحسب : طول نصف قطر الدائرة.

« ٨ سم »

دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٤ سم ، فرضت نقطة م حيث $OM = 6$ سم

ورسم من م قاطع للدائرة قطعها في أ ، ب حيث $A \in \overline{OM}$ فإذا كان : $AM = 2$ سم

« $2\frac{2}{3}$ سم »

فأوجد : طول \overline{AB}

أب ، حـ وتران في دائرة متقاطعان في د فإذا كانت أطوال : أـ ، بـ ، حـ ، دـ

« ٧,٥ سم ، ٤ سم »

هي على الترتيب ٥ سم ، ٦ سم ، ١١,٥ سم فاحسب : طول كل من دـ ، حـ ، دـ

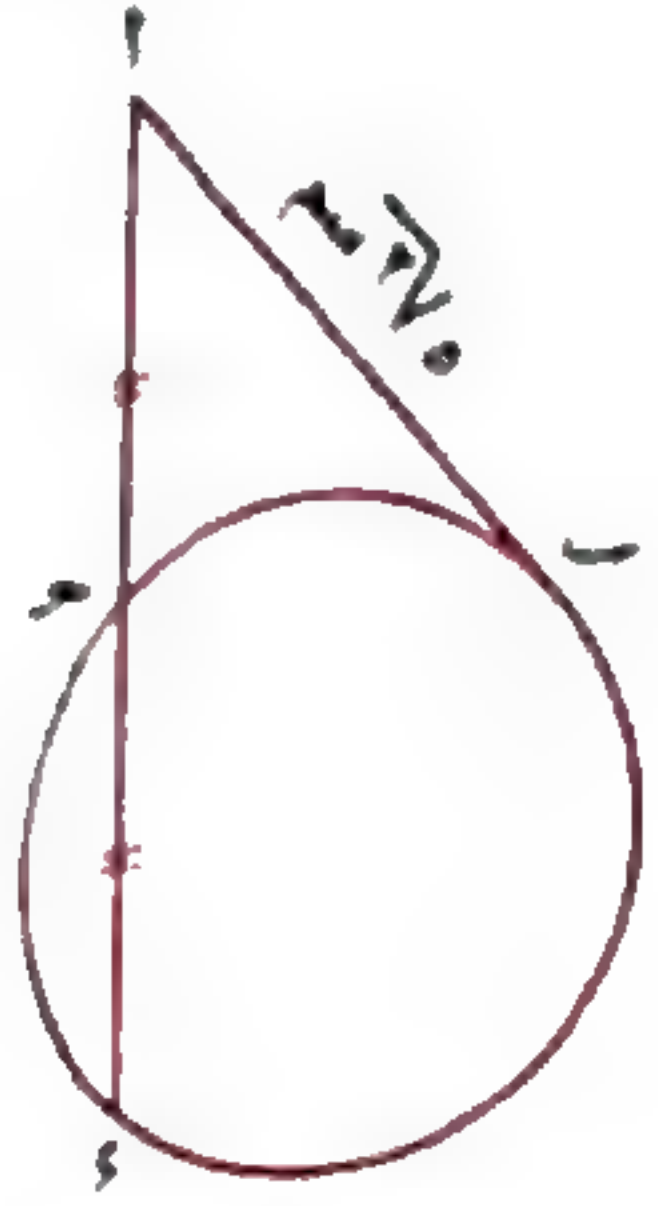
٧ في الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{أ ب}$ قطعة مماسة للدائرة

، $ح$ منتصف $\overline{أ ب}$

، طول $\overline{أ ب} = ٢٧$ سم

أوجد : طول $\overline{أ ب}$



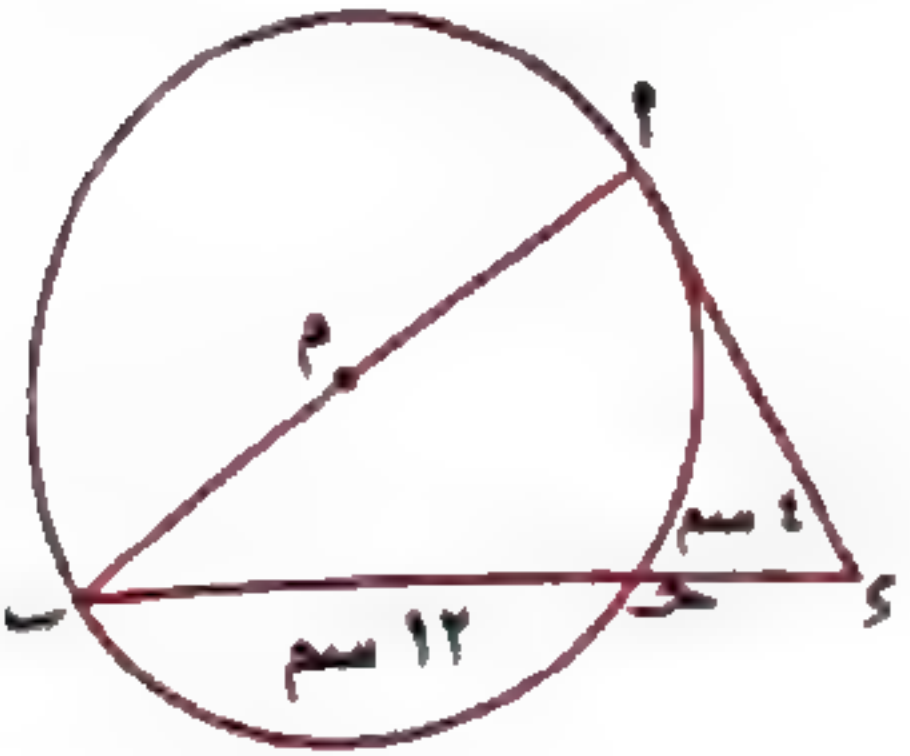
« ١٠ سم »

٨ في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة $م$

، $\overline{أ ب}$ مماسة للدائرة عند $أ$

أوجد : مساحة الدائرة $م$



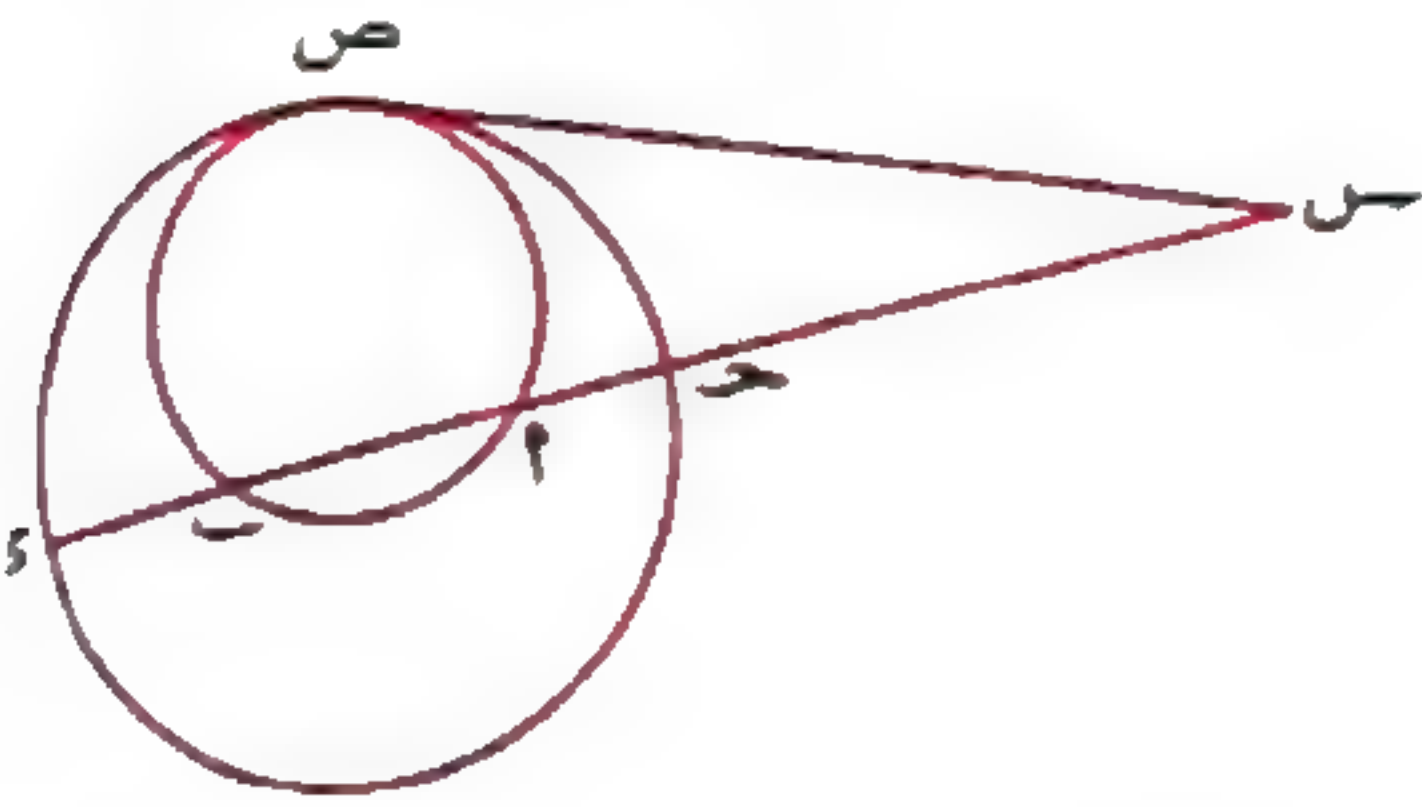
« ٤٨ π سم^٢ »

٩ في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الداخل في النقطة $ص$

، $ص س$ مماس مشترك للدائرتين.

أثبت أن : $\frac{س ح}{س ب} = \frac{س د}{س ع}$



١٠ في الشكل المقابل :

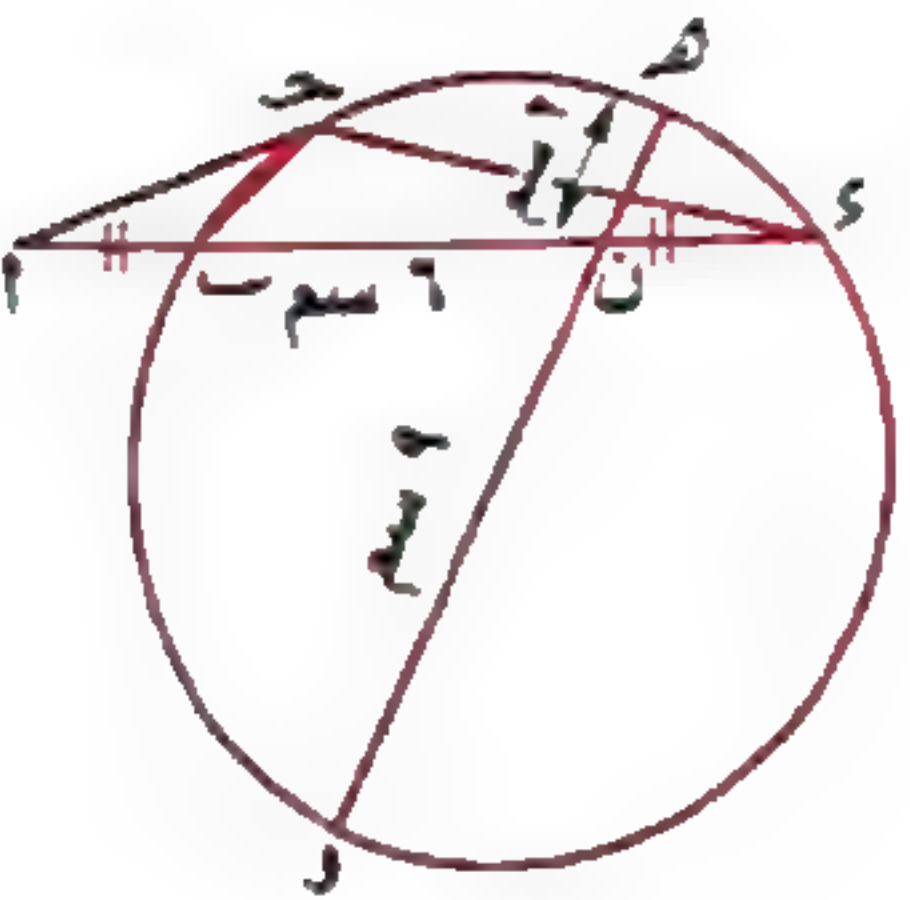
$\overline{أ ح}$ قطعة مماسة ، $أ ب = ٩$ ، $ب ن = ٦$ ، $ن د = ٢$ سم

، $ن و = ٩$ سم ، $ن ب = ٦$ سم

أوجد :

(١) طول $\overline{أ ح}$

(٢) $م (Δ أ ح ب) : م (Δ أ ب ح)$



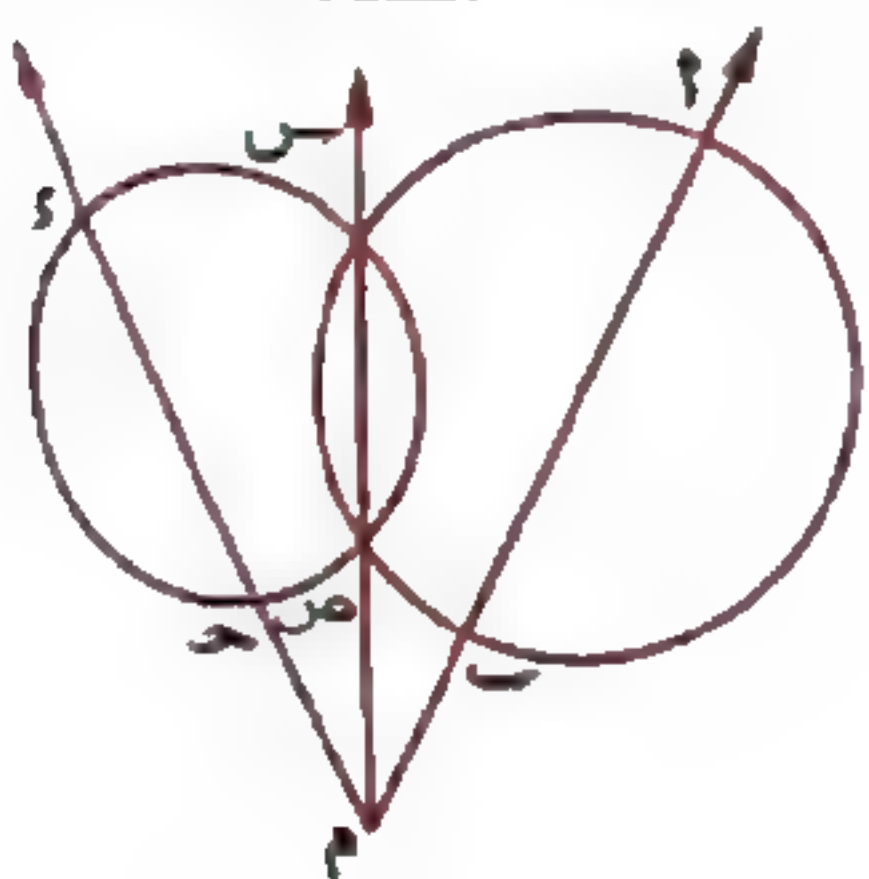
« ٦ سم ، $\frac{١}{٦}$ »

١١ في الشكل المقابل :

أثبت أن :

النقط $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$

تمر بها دائرة واحدة.



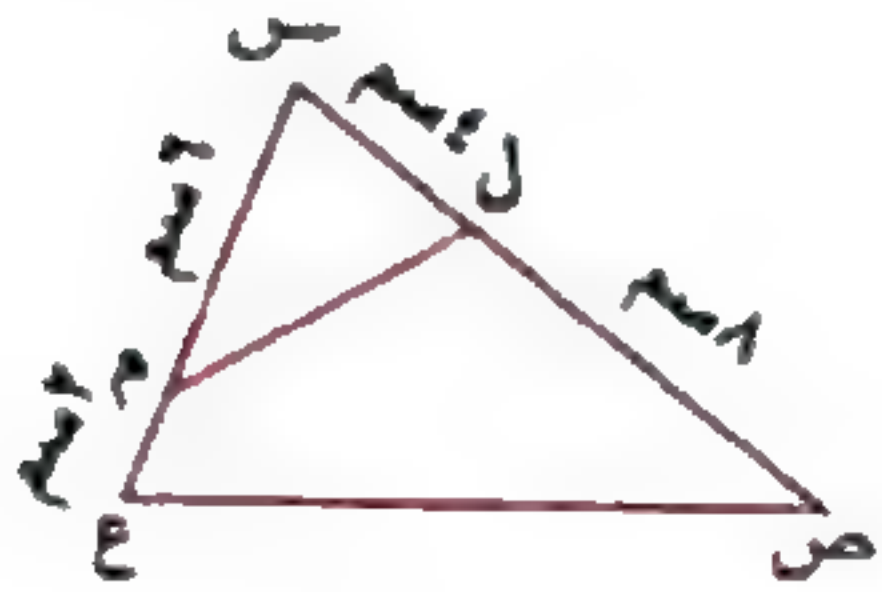
١٢ في الشكل المقابل :

ل \exists ص حيث $س ل = ٤$ سم ، $ص ل = ٨$ سم

م ، \exists ع حيث $س م = ٦$ سم ، $ع م = ٢$ سم

أثبت أن : (١) $\Delta س ل م \sim \Delta س ع ص$

(٢) الشكل ل ص ع م رباعي دائري.



١٣ أ ب \cap ح د = { ه } ، $ه ا = \frac{٥}{١٢}$ ، $ه د = \frac{٢}{٥}$ ، إذا كان ب ه = ٦ سم ، ح ه = ٥ سم

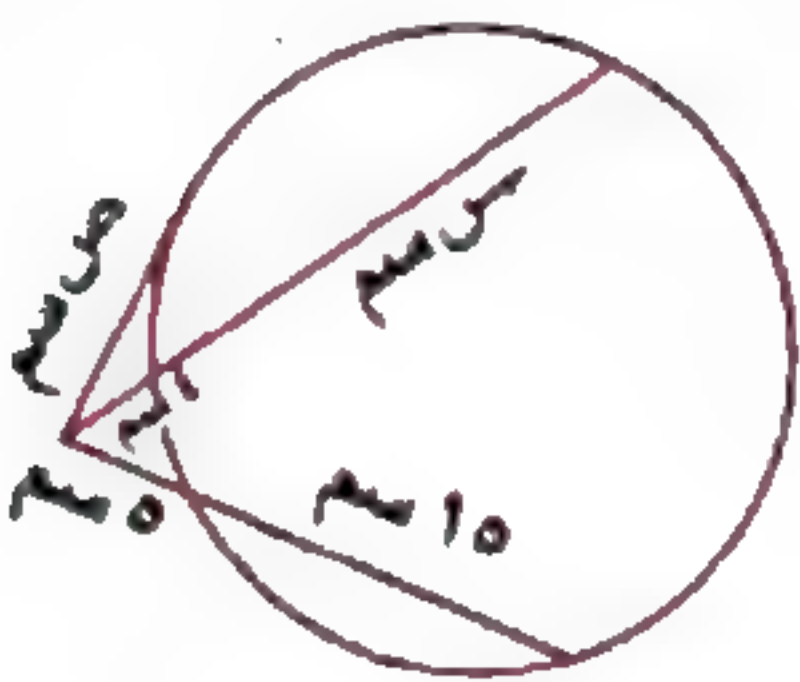
أثبت أن : النقط أ ، ب ، ح ، د تقع على دائرة واحدة.

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

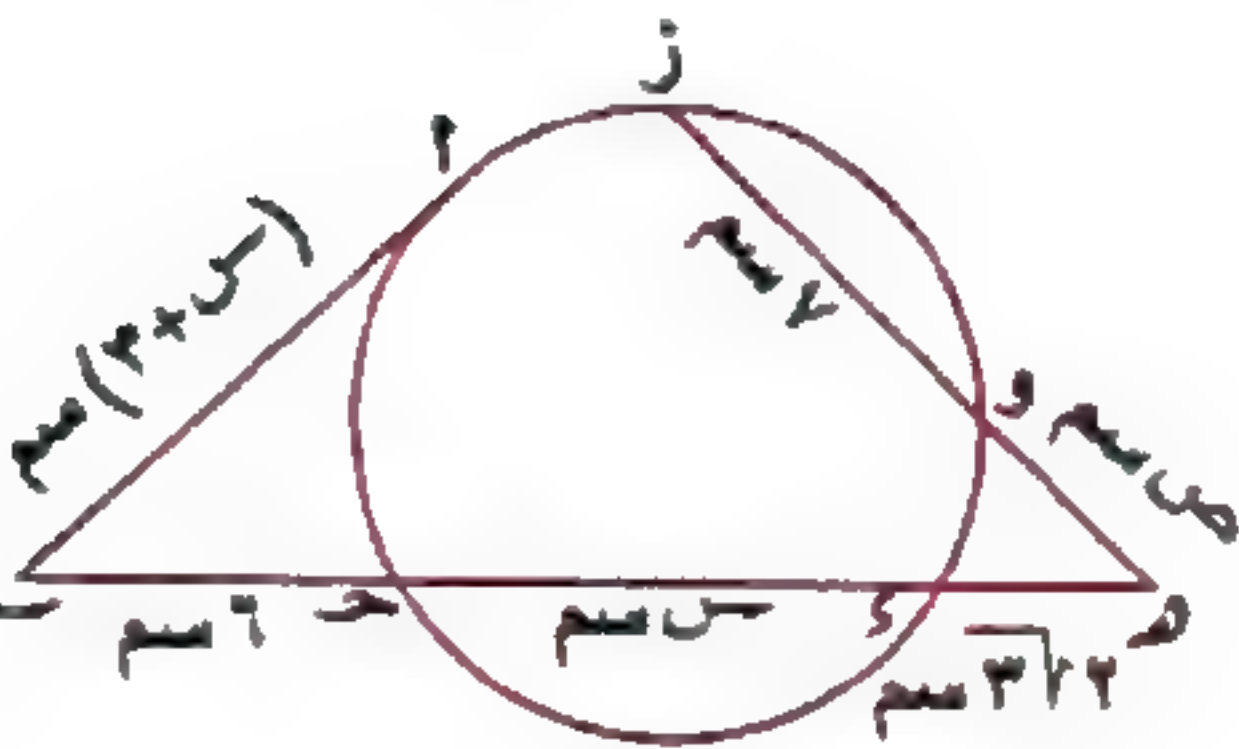
س + ص = سم

(١) ٩ (ب) ١٨ (ج) ٢٢ (د) ٣١



(٢) في الشكل المقابل :

$\frac{س}{ص} = \dots\dots\dots$



(ب) $\frac{٣}{٢}$

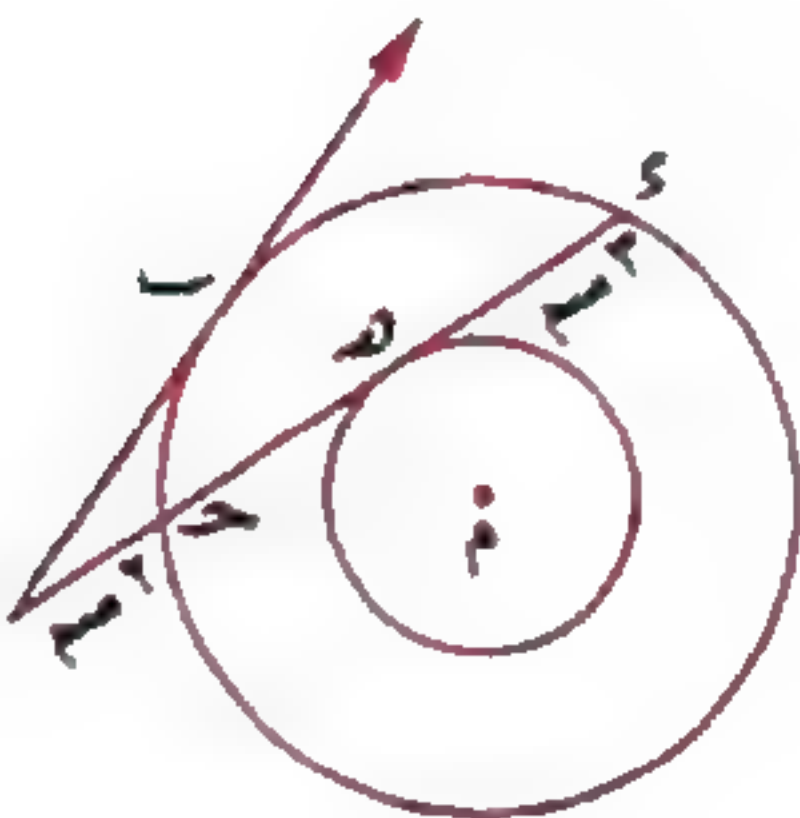
(د) ٤

(١) $\frac{٢}{٣}$

(ج) $\sqrt{٢}$

(٣) في الشكل المقابل :

أ ب = سم



(ب) ٥

(د) ٨

(١) ٤

(ج) ٦

(٤) في الشكل المقابل :

إذا كان م مركز نصف الدائرة

فإن : س = سم



(د) ١٢

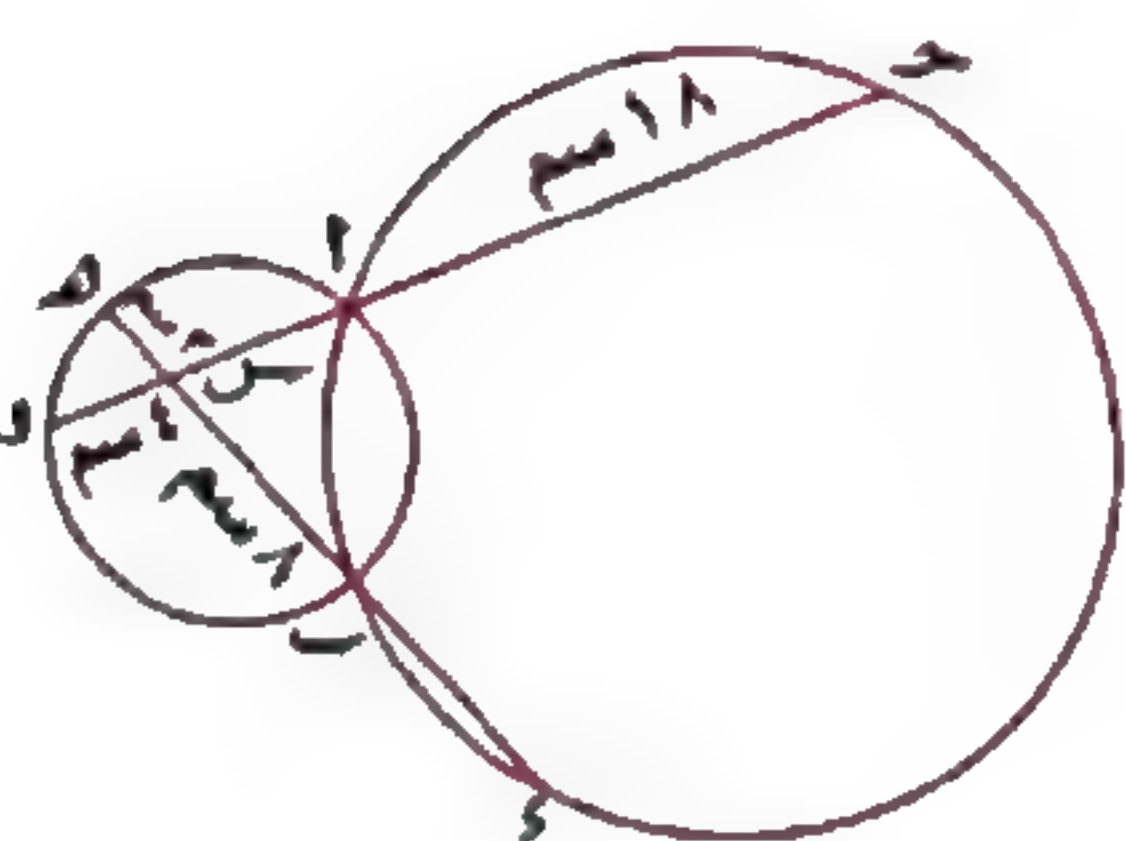
(ج) ٨

(ب) ٧

(١) ٥

(٥) في الشكل المقابل :

س د = سم



(ب) ٨

(د) ١٢

(١) ٦

(ج) ١٠

(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $د ح = م ب$

فإن : محيط الدائرة م = سم

(١) $\pi ١٥$

(ب) $\pi ١٨$

(ج) $\pi ٢٠$

(د) $\pi ٢٤$

(٧) في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في ١ ، ب

إذا كان : $١ س = ب ح$

فإن : $س س = ص ص$ سم

(١) ٤

(ب) ٦

(ج) ٨

(د) ٩

(٨) في الشكل المقابل :

١ ، ب ، د ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت ح منتصف $\overline{١ ب}$

، د ، م ، ح على استقامة واحدة

، $١ ب = ٢٤$ سم ، $د ح = ١٨$ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة = سم

(١) ٩

(ب) ٨

(ج) ١٢

(د) ١٣

في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الخارج في س

، $\overrightarrow{١ د}$ يقطع إحدى الدائرتين في ١ ، ب ويقطع الأخرى

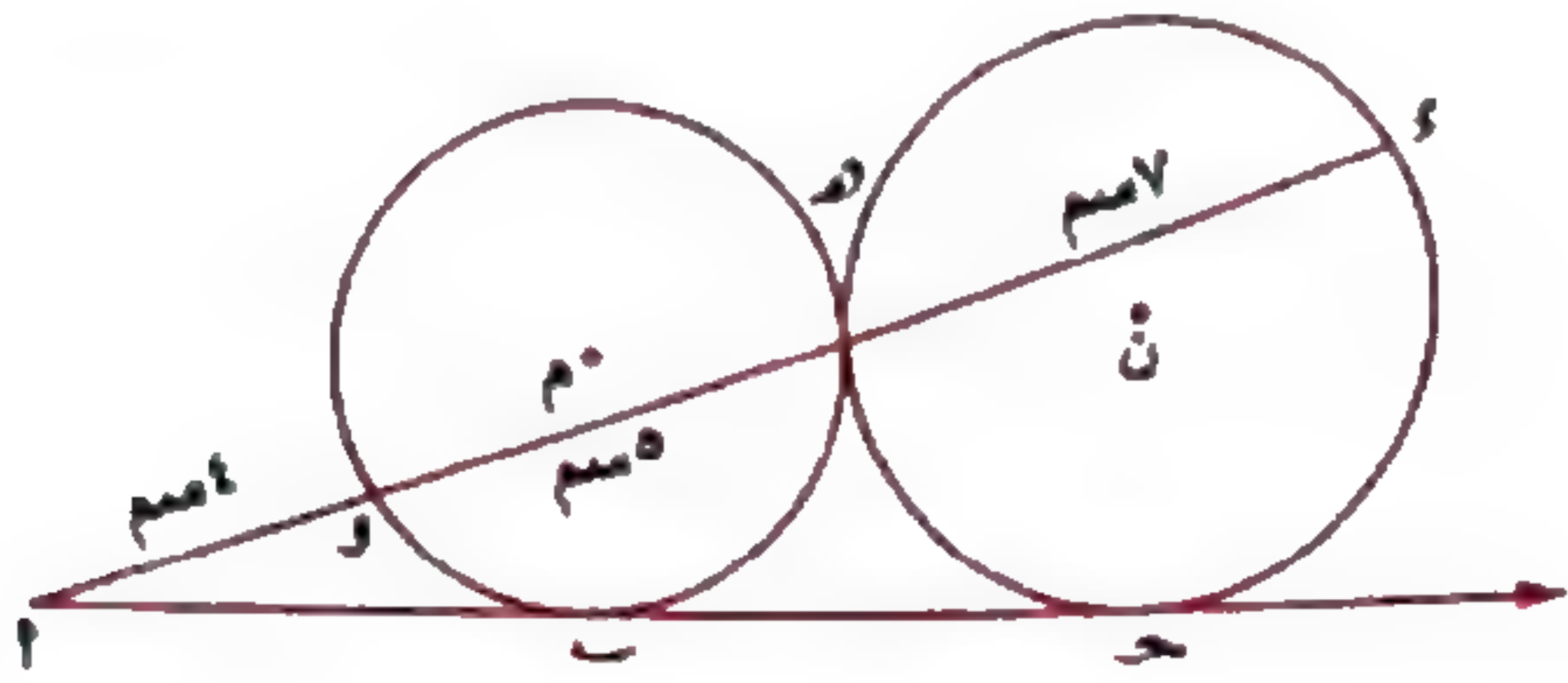
في ح ، د ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س في نقطة ن

أثبت أن : $\frac{ن د}{١ ن} = \frac{ن ب}{١ ح}$

دائرتان متقاطعتان في ١ ، ب ، ح $\exists \overline{١ ب}$ ، ح $\nexists \overline{١ ب}$ ، رسم من ح القطعتان

ح س ، ح ص مماستين للدائرتين عند س ، ص أثبت أن : ح س = ح ص

في الشكل المقابل :



الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ

، أ ح يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عند حـ

، أ هـ يقطع الدائرتين عند و ، ع على الترتيب حيث أ و = ٤ سم ، و هـ = ٥ سم ، هـ ع = ٧ سم

أثبت أن : ب منتصف أ حـ

١٨ أ ب ح مثلث حاد الزوايا ، أ ع ، ب هـ ارتفاعان فيه متقاطعان في و

$$\text{أثبت أن : } \frac{أ ب \times و هـ}{ب و \times و هـ} = \frac{أ ع}{و ع}$$

١٩ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٨ سم ، م نقطة بحيث م و = ١٢ سم ، رسم من

م قاطع للدائرة يقطعها في أ ، ب حيث أ م م ب فإذا كان ب أ = ١١ سم

فأوجد : (١) طول م أ

(٢) طول القطعة المماسية للدائرة من م

« ٥ سم ، ٤ سم »

٢٠ أ ب ح مثلث ، ع م ب ح حيث ع ب = ٥ سم ، ع ح = ٤ سم

إذا كان : أ ح = ٦ سم

أثبت أن : (١) أ ح مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، ع

$$(٢) \Delta أ ح ع \sim \Delta ب ح أ$$

$$(٣) م (\Delta ب أ ع) : م (\Delta ب أ ح) = ٩ : ٥$$

٢١ دائرتان متحدتا المركز م ، طولاً نصفى قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر أ ع في الدائرة الكبرى

ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، ح على الترتيب.

أثبت أن : أ ب × ب ع = ٩٥

٢٢ أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم

، رسم ب هـ ⊥ أ ح فقطع أ ح في هـ ، أ ع في و

(٢) أوجد : طول أ و

$$(١) \text{أثبت أن : } (ب أ)^2 = أ و \times و ع$$

« ٥ ، ٤ سم »

٢٣ أ ب وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، م ح ⊥ أ ب يقطعه في ح ويقطع الدائرة في ع

فإذا كان : ح د = ٢ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة.

« ٥ سم »

(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $و ح = م ب$

فإن : محيط الدائرة م = سم

(١) $\pi ١٥$

(ب) $\pi ١٨$

(ج) $\pi ٢٠$

(د) $\pi ٢٤$

(٧) في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

إذا كان : $أ س = ب ح$

فإن : $س ص = سم$

(١) ٤

(ب) ٦

(ج) ٨

(د) ٩

(٨) في الشكل المقابل :

أ ، ب ، و ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت ح منتصف $\overline{أ ب}$

و ، م ، ح على استقامة واحدة

أ ، ب = ٢٤ سم ، و ح = ١٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة = سم

(١) ٩

(ب) ٨

(ج) ١٢

(د) ١٣

١٥ في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الخارج في س

أ ، و يقطع إحدى الدائرتين في أ ، ب ويقطع الأخرى

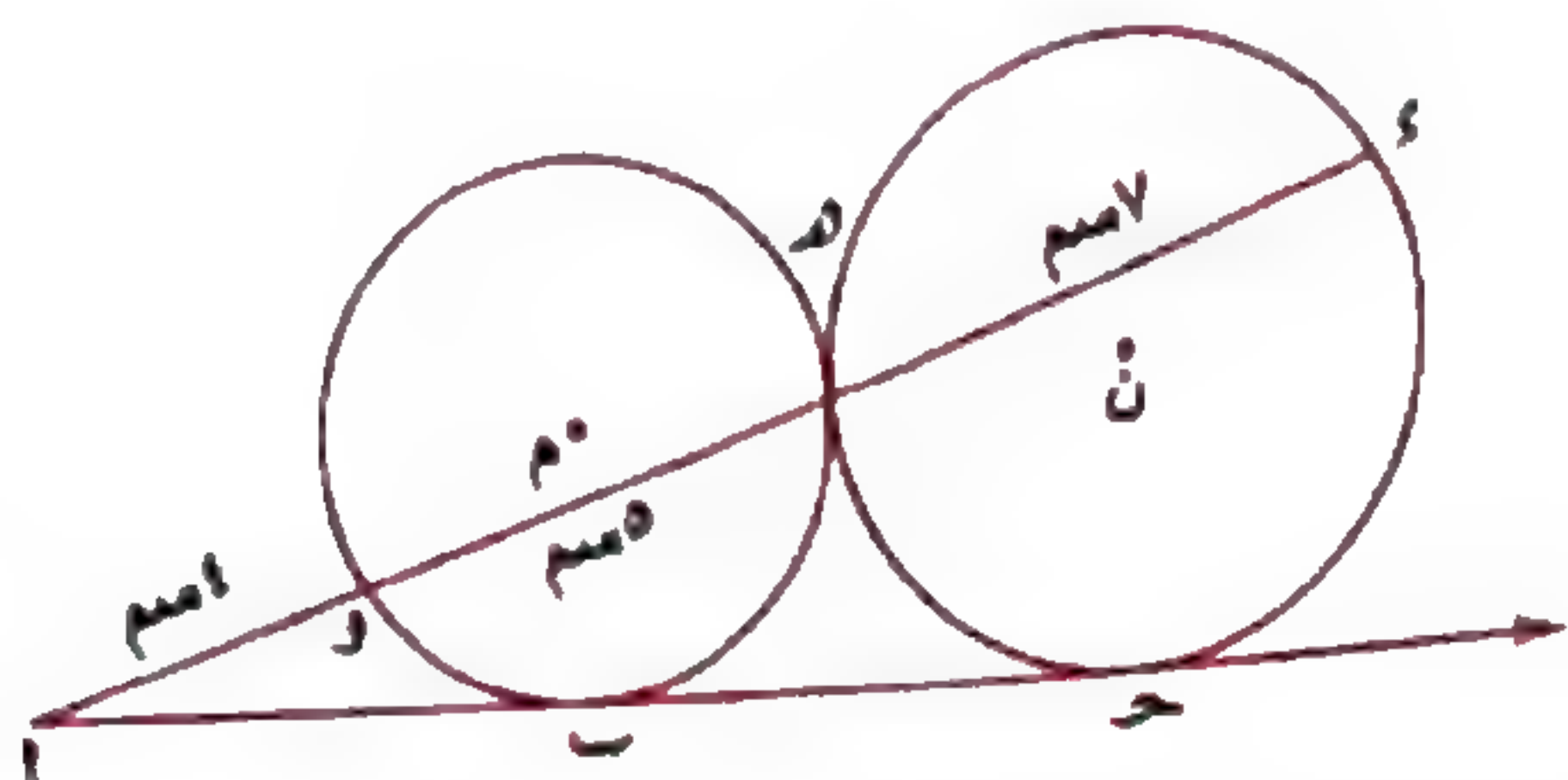
في ح ، و ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س في نقطة ن

أثبت أن : $\frac{ن ب}{ن أ} = \frac{ن ح}{ن و}$

١٦ دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، ح $\exists \overline{أ ب}$ ، ح $\nexists \overline{أ ب}$ ، رسم من ح القطعتان

ح س ، ح ص مماستين للدائرتين عند س ، ص أثبت أن : ح س = ح ص

في الشكل المقابل :



الدائرة ثام ، ن متمانستان عند هـ

أحـمـد يـمـس الدائـرة مـعـنـد

، ويمس الدائرة ن عند ح

أهـ يقطع الدائرتين عند و ، و على الترتيب حيث أ = و = ٤ سم ، و هـ = ٥ سم ، هـ = ٤ سم
اثبت أن : ب منتصف أ حـ

١٦٠ مثلث حاد الزوايا ، \overline{a} ، \overline{b} ارتفاعان فيه متقاطعان في و

اثبت أن: $\frac{س}{و} = \frac{أ \times م}{ب \times و}$

دائرة مركزها (9) وطول نصف قطرها 8 سم ، م نقطة بحيث م و = 12 سم ، رسم من

م قاطع للدائرة يقطعها في α ، β حيث $\alpha \in \overline{M}$ فإذا كان $\beta = \alpha$ سم

فاوجد: (۱) طول ۲۴

(٢) طول القطعة المماسية للدائرة من م

« ۵۵ سم ، ۴۶ سم »

اب ح مثك، $\exists \text{ ح حيث } \text{ب} = \text{هـ سم}$ ، $\text{هـ ح} = \text{هـ سم}$

إذا كان : $1 = 6$ سم

أثبت أن: (١) \overline{AC} مماسة للدائرة التي تمر بالنقط A, B, C ، و

$$\Delta \sim \Delta^2$$

$$9:0 = (\cup \Delta) - : (\cup \Delta) - (3)$$

📖 دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفى قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر \overline{AO} فى الدائرة الكبرى

ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، ح على الترتيب.

أثبت أن : $٢١ \times ٤٥ = ٩٥$

📖 ا ب ح د مستطیل فیہ : ا ب = ۶ سم ، ب ح = ۸ سم

رسم سادہ ۱۔ اح فقط ۲۔ اح فی ۳۔ آء فی ۴۔

٤٠٤

(۲) اوجد : طول \overline{AO}

(١) أثبت أن : $(-١)^2 = ١$ و $١ \times ١ = ١$

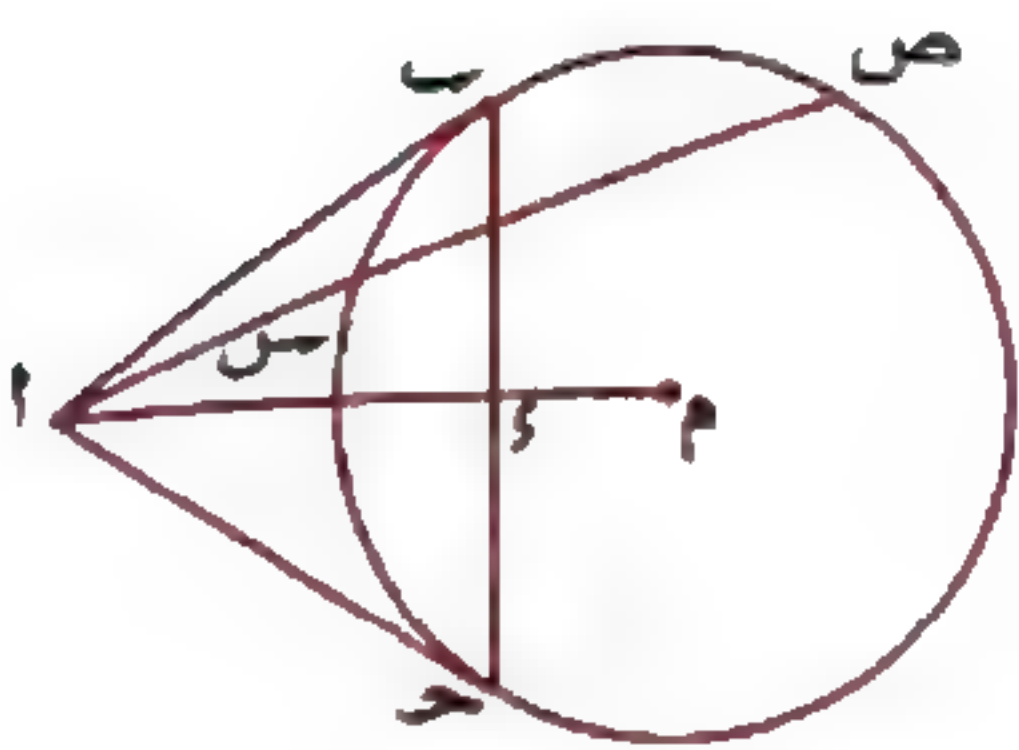
أب وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، م ح \perp أ ب يقطعه في ح ويقطع الدائرة في د

« ۵۵ »

فإذا كان : $ح = 2$ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة.

٢٤ \overline{AB} قطر في دائرة ، $\overline{AC} \exists \overline{AB}$ ، رسم $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ فقطع الدائرة في S ، رسم \overline{DS} وترًا في الدائرة مارًا بالنقطة C أثبت أن : $(S, C)^2 = \overline{CH} \times \overline{CS}$

٢٥ \overline{AB} قطر في دائرة ، \overline{CD} وتر فيها عمودي على \overline{AB} قطعه في N ، رسم الوتران \overline{AD} ، \overline{AO} في جهتين مختلفتين من A فقطعا \overline{CD} في S ، V على الترتيب. أثبت أن : $\overline{AS} \times \overline{AV} = \overline{AS} \times \overline{AS}$



٢٦ في الشكل المقابل :
 A نقطة خارج دائرة M ، \overline{AB} ، \overline{AC} مماستان للدائرة ،
 \overline{AS} قاطعة لها في S ، V ، C ، B $\cap \overline{AM} = \{S\}$ ،
 أثبت أن : $\overline{AS} \times \overline{AV} = \overline{AS} \times \overline{AS}$

٢٧ \overline{AB} قطر في دائرة ، $\overline{AC} \exists \overline{AB}$ ، C تقع خارج الدائرة بحيث $\overline{BC} = \overline{AB}$ ، رسمت \overline{CD} مماسة للدائرة في D ، ثم رسم \overline{AD} فقطع المماس للدائرة من نقطة B في النقطة E أثبت أن : $(E, D)^2 = \overline{AE} \times \overline{AD}$

٢٨ \overline{AB} ح ممثل ، \overline{AD} ينصف \overline{BC} A ح ويقطع \overline{BC} في D ، $\overline{AE} \exists \overline{AD}$ بحيث $\overline{AE} = \overline{DE}$ فإذا كان : $(E, D)^2 = \overline{AE} \times \overline{AD}$ فأثبت أن : $(1) \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (٢) $(E, D)^2 = \overline{AE} \times \overline{AD}$

تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

نصف دائرة M

$\overline{AM} = \overline{MD}$ ، $\overline{AD} = \overline{DC}$ سم

$\overline{AD} = \overline{AD}$ سم

فإن : $\overline{AM} = \overline{MD}$ = سم

(١) ٢

(ب) ٢

(ج) ٢ ٢

(د) $\frac{8}{4}$



(٢) في الشكل المقابل :

دائرة م طول قطرها ١٢ سم

، م ح = ح ب

فإذا كان : أ ح = (ب ح + ١) سم

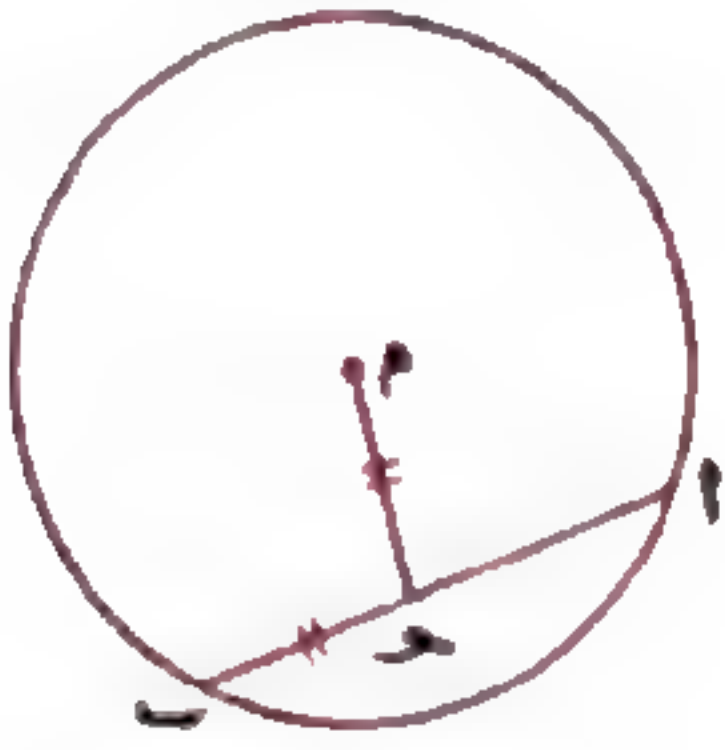
فإن : أ ب = سم

(١) ٤

(ب) ٦

(ج) ٨

(د) ٩



(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب قطعاً في دائرة م

، ح س ، و ص قطعتين

مماسيتين للدائرة م

، أ ب = ٢٠ سم ، ح س = ٨ سم ، و ص = ٢٠ سم

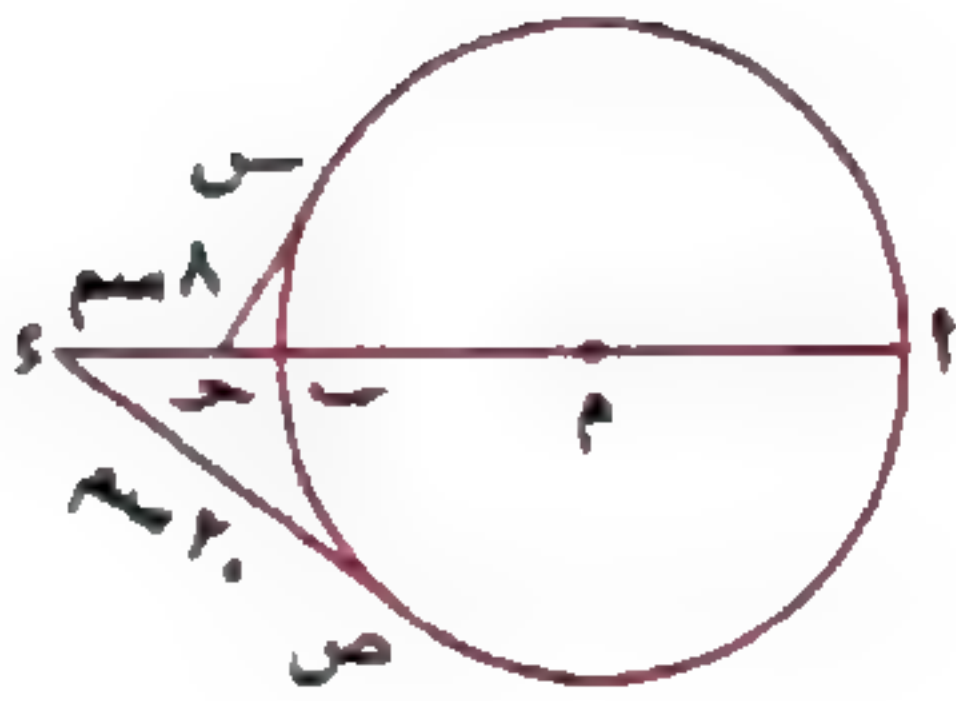
فإن : و ح = سم

(١) ٢

(ب) ٦

(ج) ٨

(د) ١٠



(٤) في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في ح ، هـ

، ب هـ مماس للدائرة الكبرى في هـ

إذا كان : أ و = ٣ سم ، و ح = ٤ سم ، ح د = ٥ سم

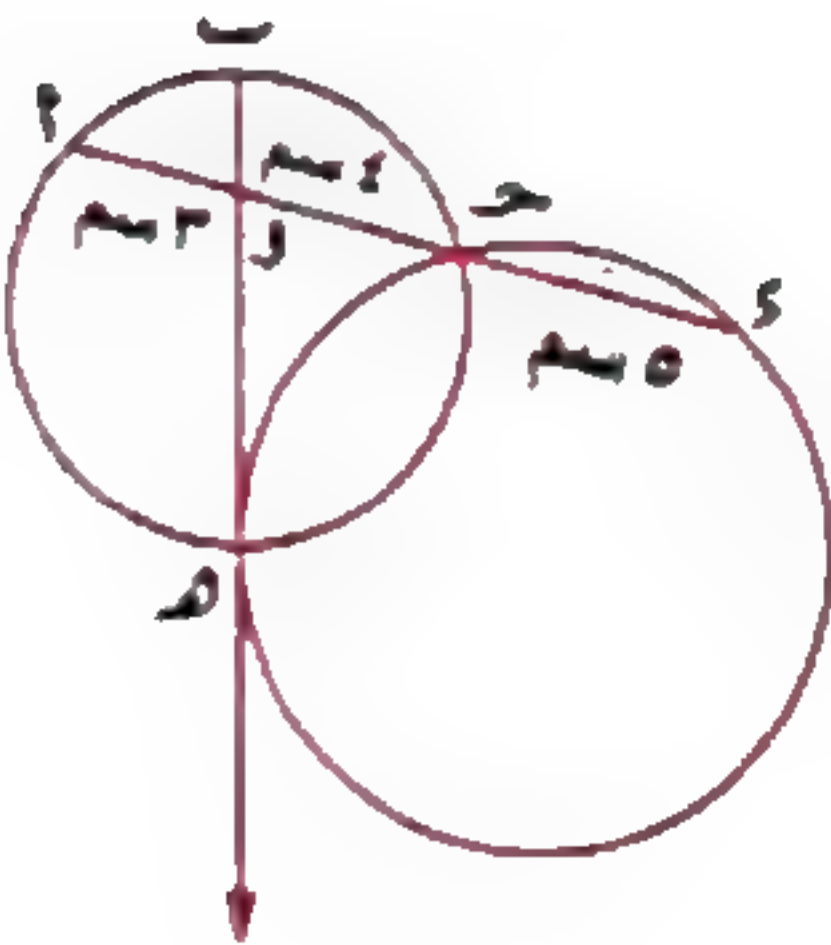
فإن : ب هـ = سم

(١) ٩

(ب) ٨

(ج) ٧

(د) ٦



(٥) في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الداخل في ب

، أ ب ، أ و مماسان للدائرة

الصغرى عند ب ، و

إذا كان : ح و = ١ سم ، و هـ = ٢ سم ، أ ب = ح س سم

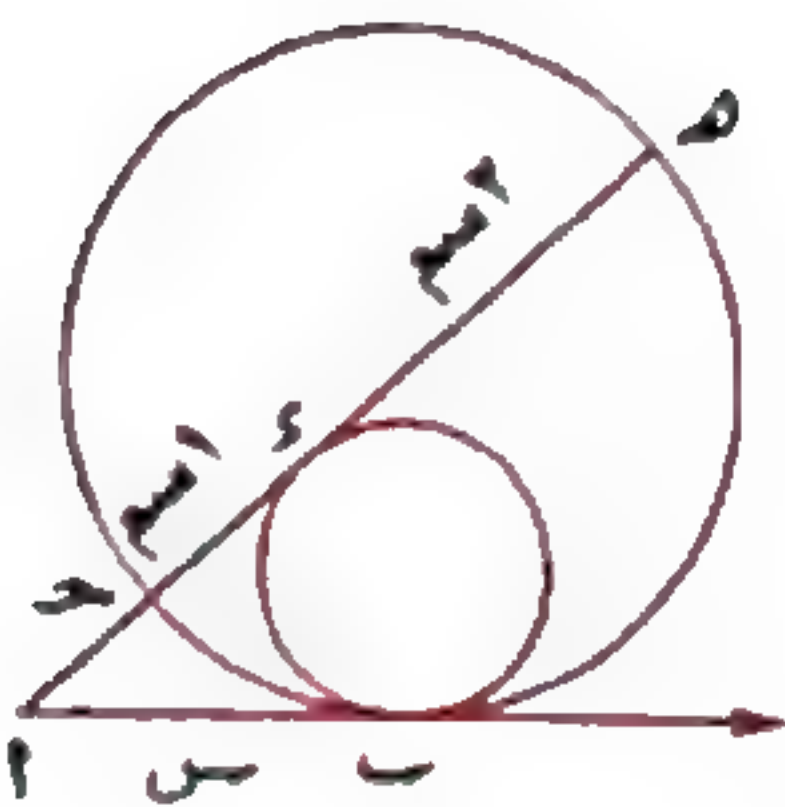
فإن : ح س = سم

(١) ٢

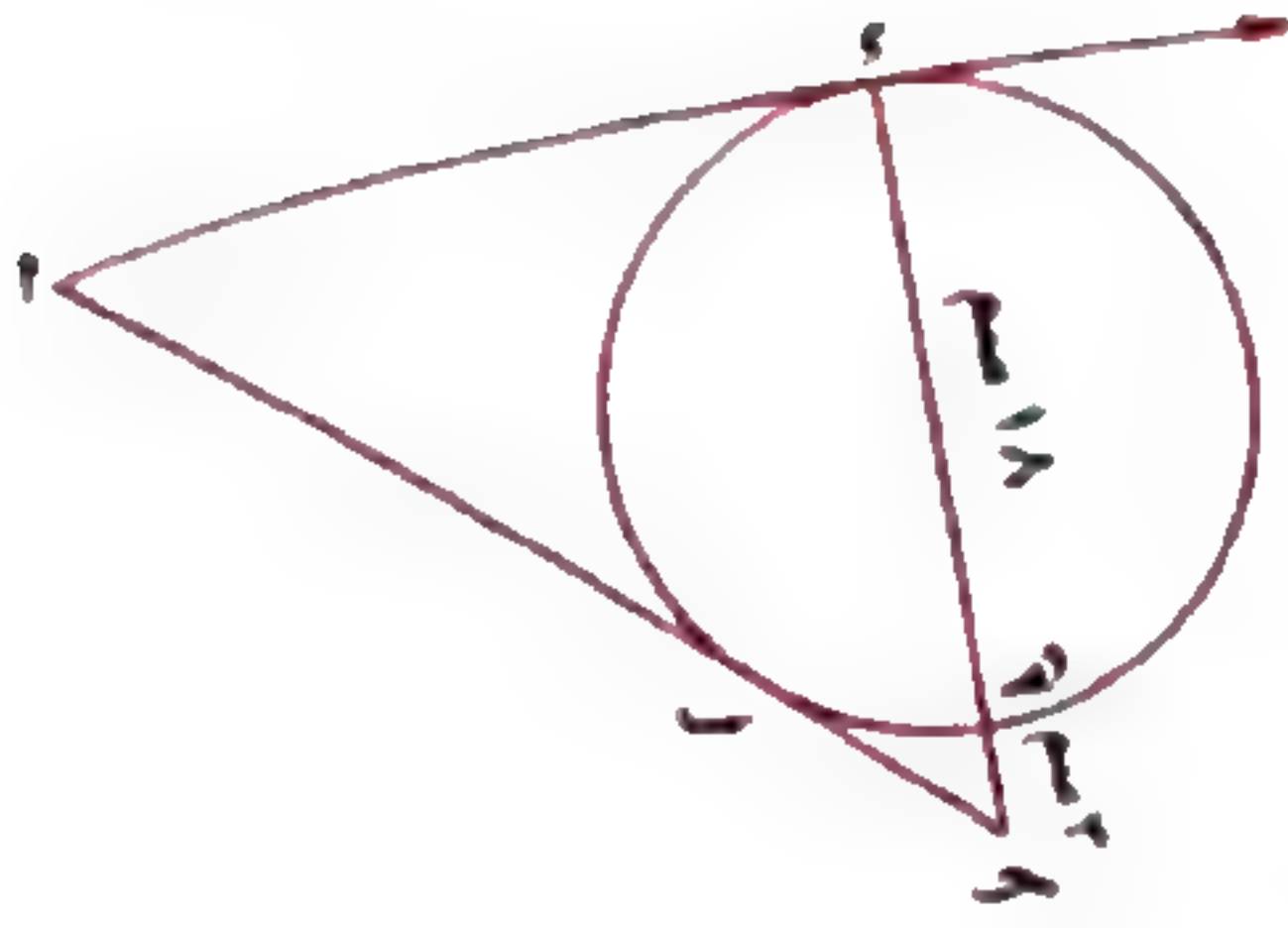
(ب) ٣

(ج) ٢,٥

(د) ٣,٥



(٦) في الشكل المقابل :



أ ب مماسان لدائرة عند د ، ب

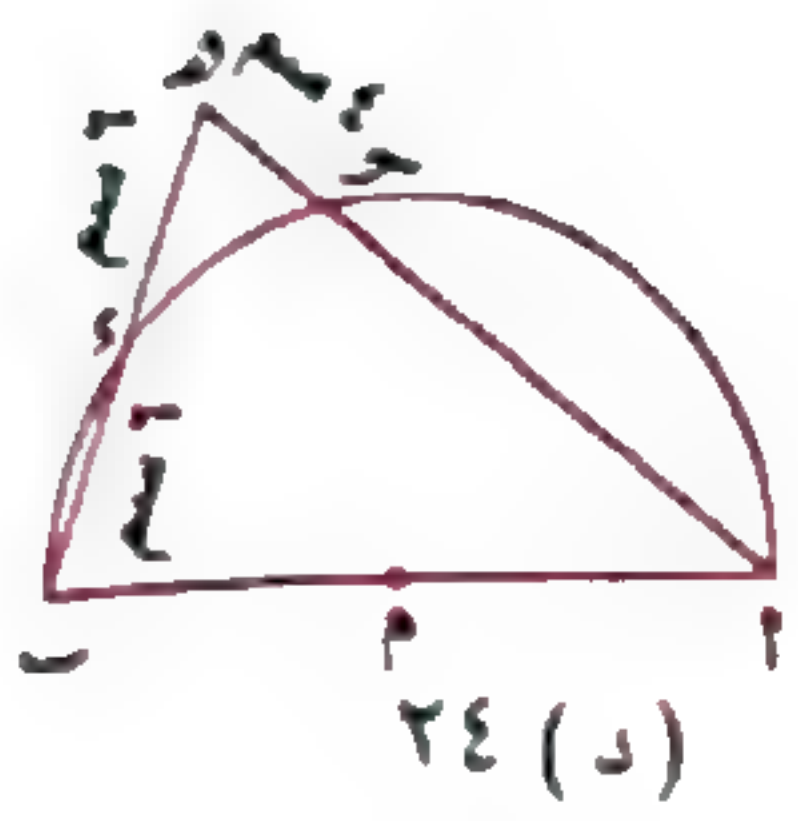
على الترتيب ، ح د هـ يقطع الدائرة في هـ ، د

إذا كان : ح د = ٢ سم ، هـ د = ١٨ سم

فإن : (أ ح - د أ) = سم

(أ) ٧ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

(٧) في الشكل المقابل :



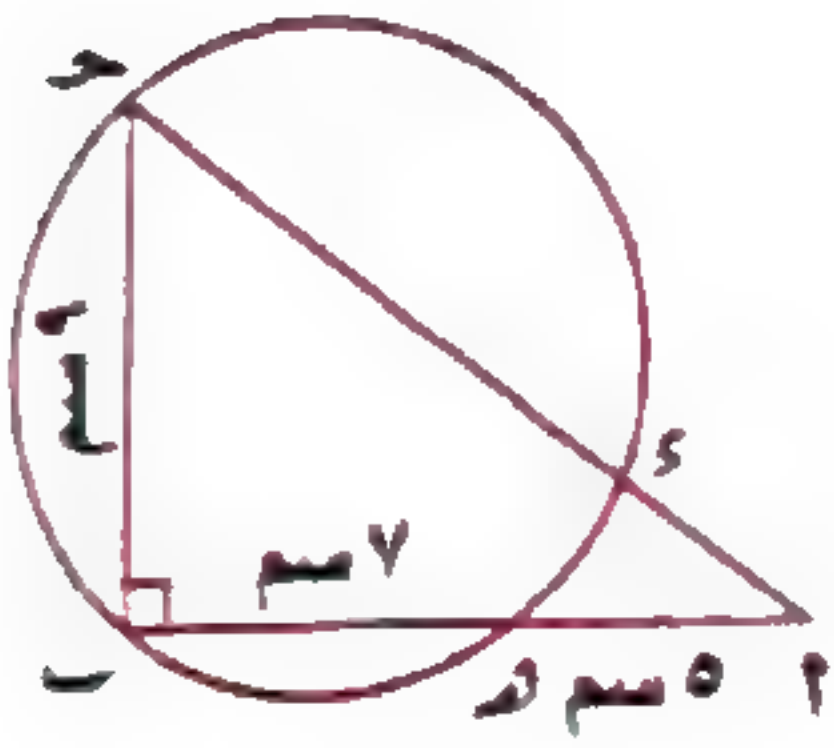
أ ب قطر في نصف الدائرة م

فإن : نق = سم

(أ) ٩ (ب) ١٢ (ج) ١٨ (د) ٢٤

(٨) في الشكل المقابل :

د ح = سم



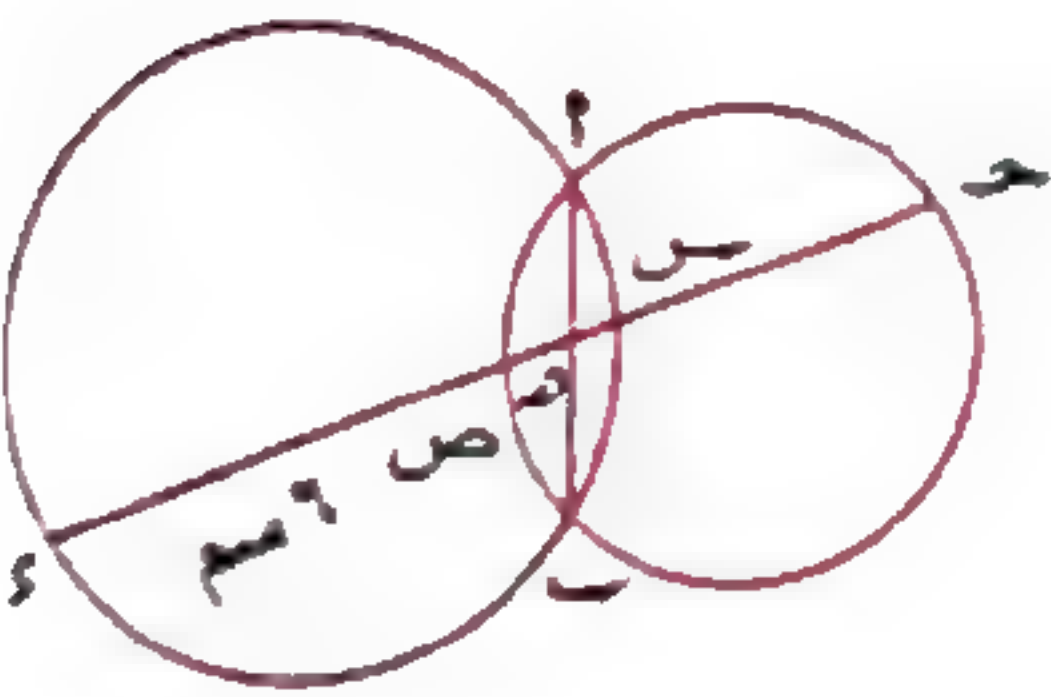
(أ) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ١٢

(٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : د ح = ٦ سم

وكان : $\frac{س هـ}{هـ ح} = \frac{٢}{٣}$

فإن : ح س = سم



(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب قطر في دائرة م ، هـ د \exists م

لإيجاد طول نصف قطر الدائرة

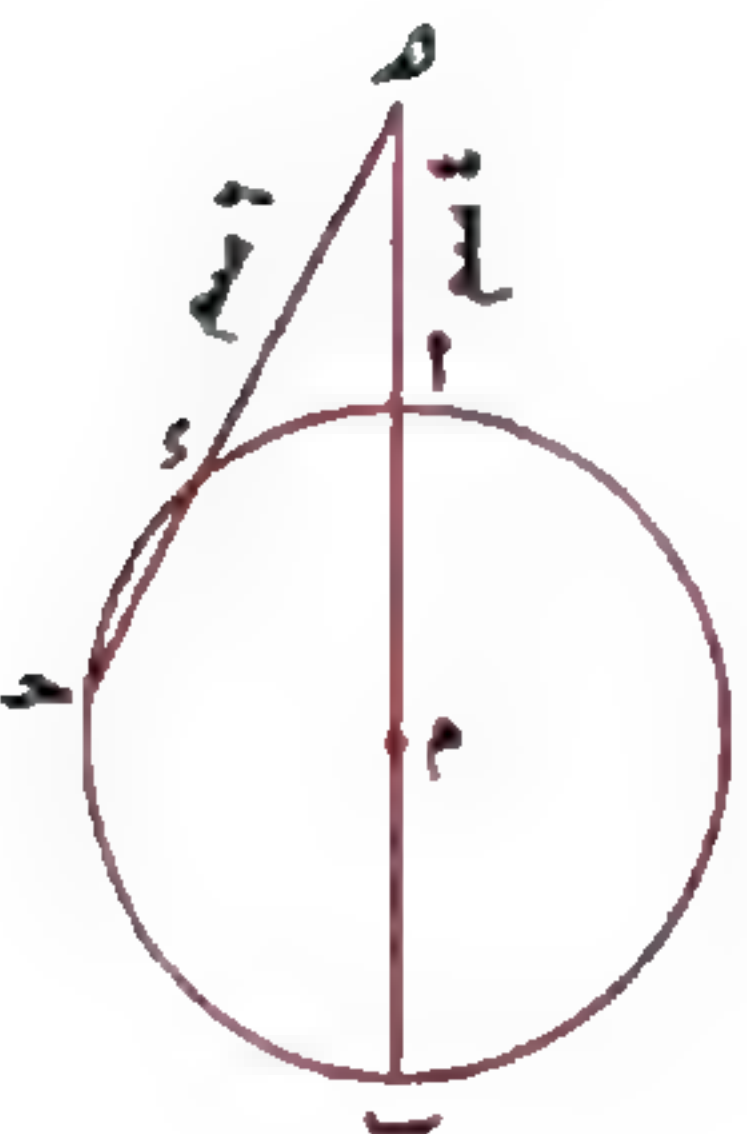
يكون كافيًا الحصول على

(أ) محيط Δ هـ ب ح = ٢٦ سم فقط.

(ب) محيط Δ هـ م ح = ٢٠ سم فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.



(١١) في الشكل المقابل :



نصف دائرة م طول نصف قطر دائرته = ١٠ سم

فإن : هـ = سم

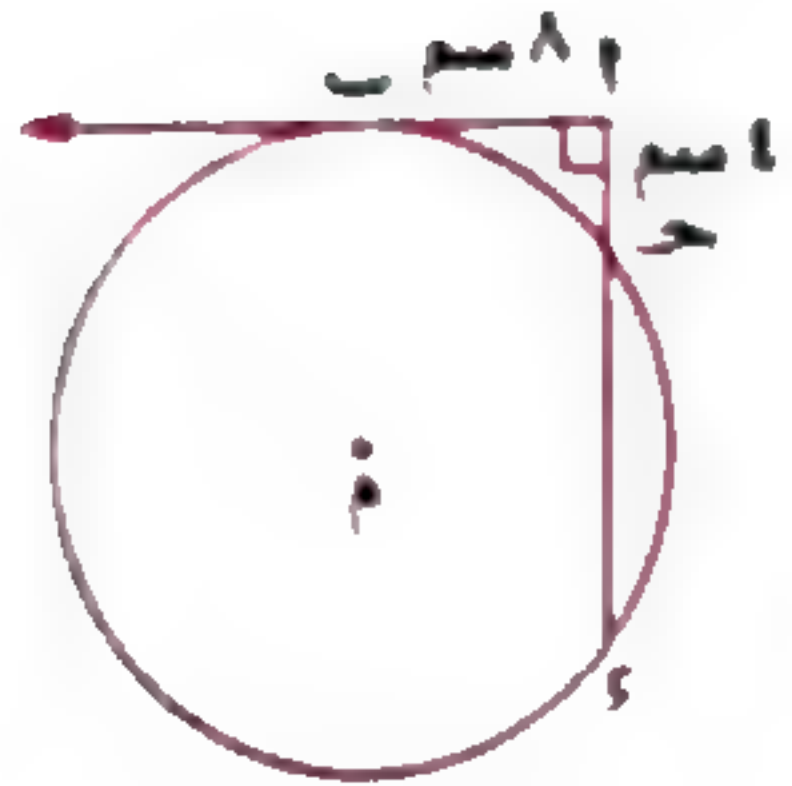
(١) $\frac{50}{13}$

(ب) $\frac{55}{13}$

(ج) $\frac{57}{13}$

(د) $\frac{59}{13}$

(١٢) في الشكل المقابل :



\overline{AB} مماس للدائرة عند ب

، $AB = 8$ سم ، \overleftrightarrow{AC} قاطع للدائرة م عند ح ، هـ

فإن : طول نصف قطر الدائرة م يساوى سم

(١) ٥

(ب) ١٠

(ج) ١٢

(د) ٨

٢٠ \overline{AB} ح مثلث فيه : $AB = 60$ مم ، $AC = 40$ مم ، $BC = 45$ مم ، أخذت نقطة $D \in \overline{AB}$

بحيث : $AD = 16$ مم ، $D \in \overline{AC}$ بحيث $AD = 24$ مم

(١) أثبت أن : $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ واحسب : طول DE

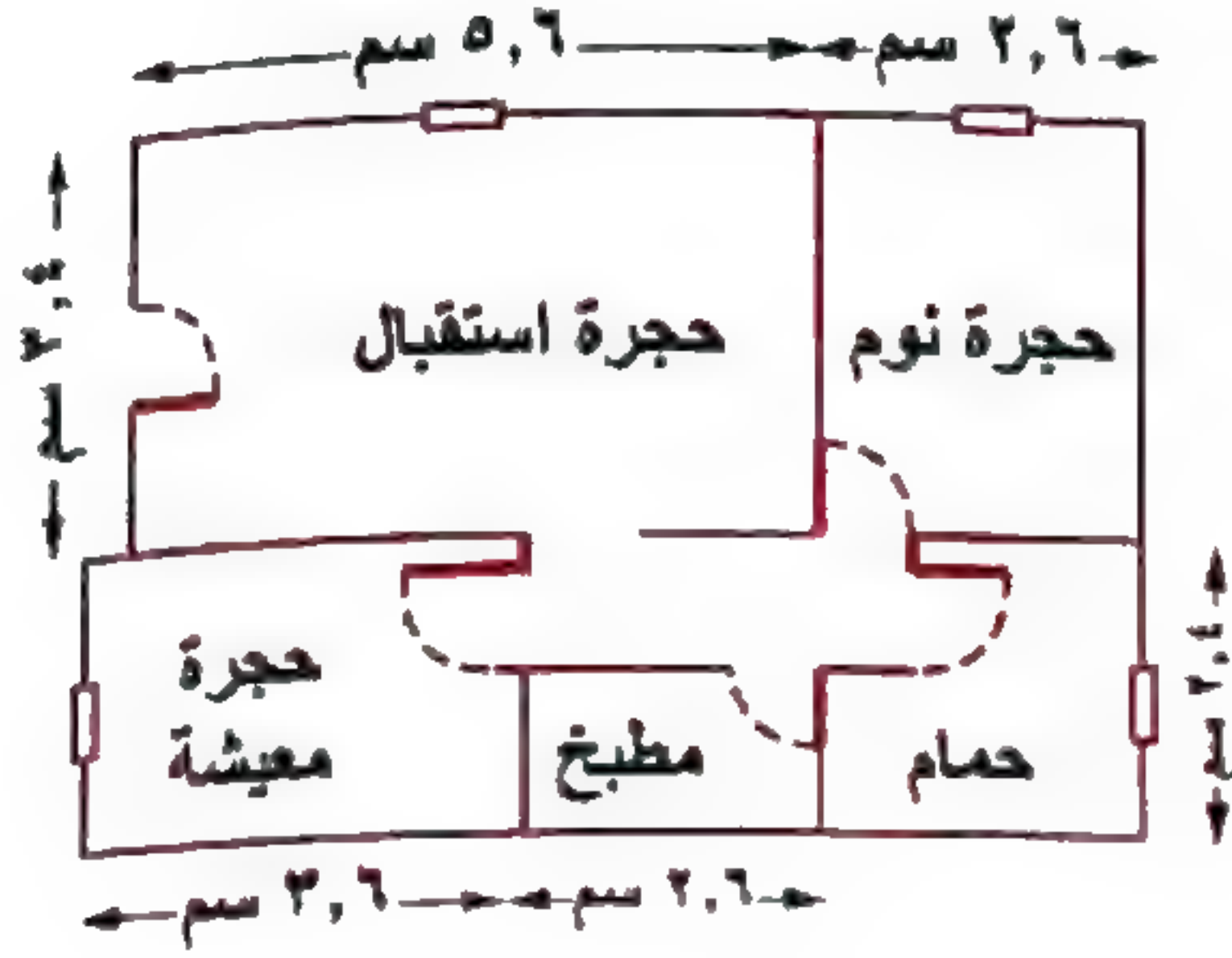
(٢) إذا كان : $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{N\}$ فاثبت أن : $\triangle ENB \sim \triangle CND$

واحسب : طول كل من EN ، CN

واحسب : طول كل من EN ، CN

تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة

من أسئلة الكتاب المدرسي



يوضح الشكل المقابل مخططاً لإحدى الوحدات السكنية بمقياس

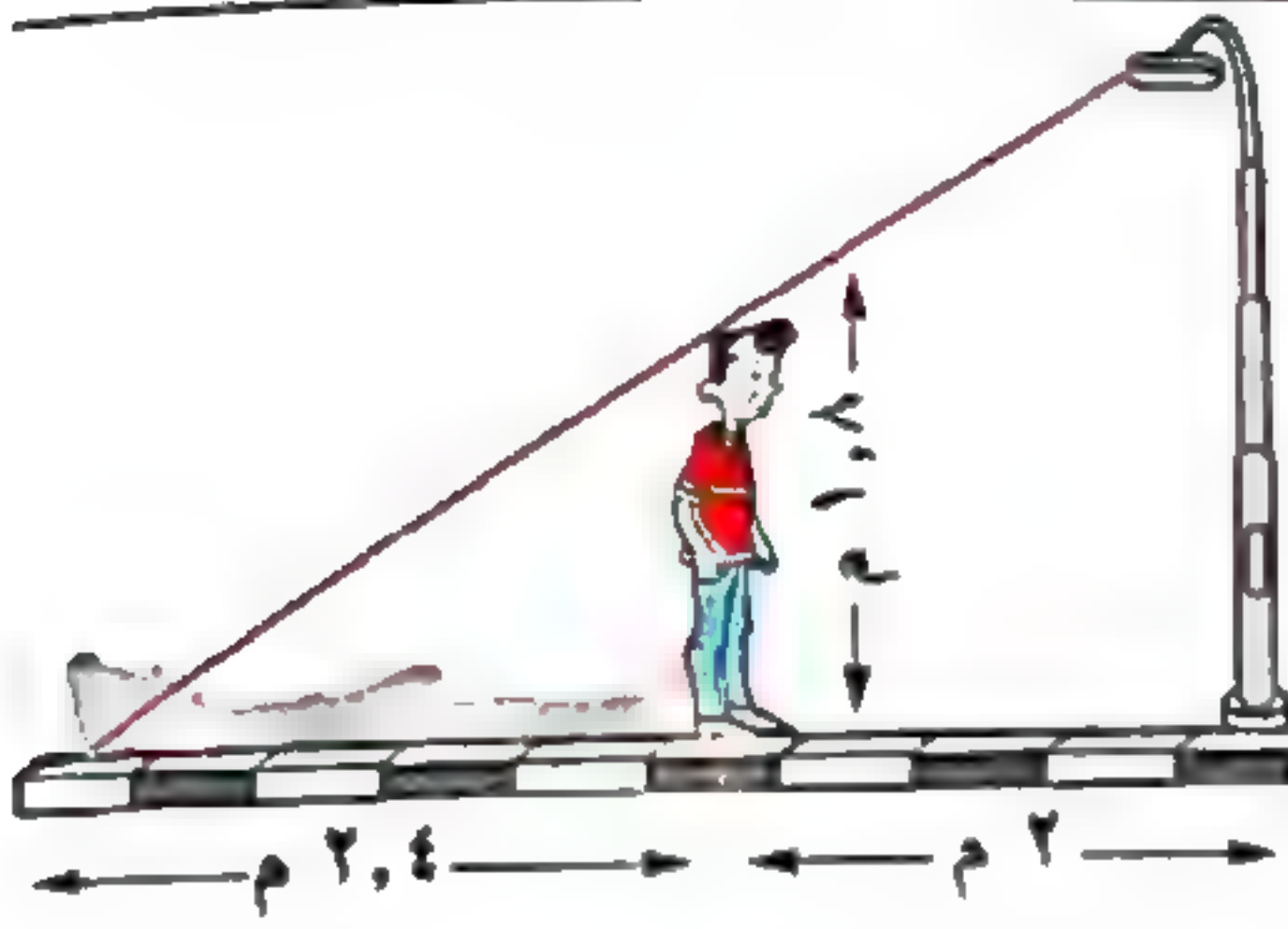
رسم ١ : ١٥٠ أوجد :

(١) أبعاد حجرة الاستقبال.

(٢) أبعاد حجرة النوم.

(٣) مساحة حجرة المعيشة.

(٤) مساحة الوحدة السكنية.



رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود إنارة وعلى بُعد ٢ متر

من قاعدته فإذا وُجد أن طول ظل الرجل الناتج عن إنارة العمود

هو ٢,٤ متر

فأوجد ارتفاع العمود.

أوجد المسافة من في كل من الحالتين الآتيتين :



(٢)

« ٣٠ متراً »

« ٣٢ متراً »

أراد رجل معرفة طول ديناصور في أحد المتاحف ، فوضع مرآة في وضع

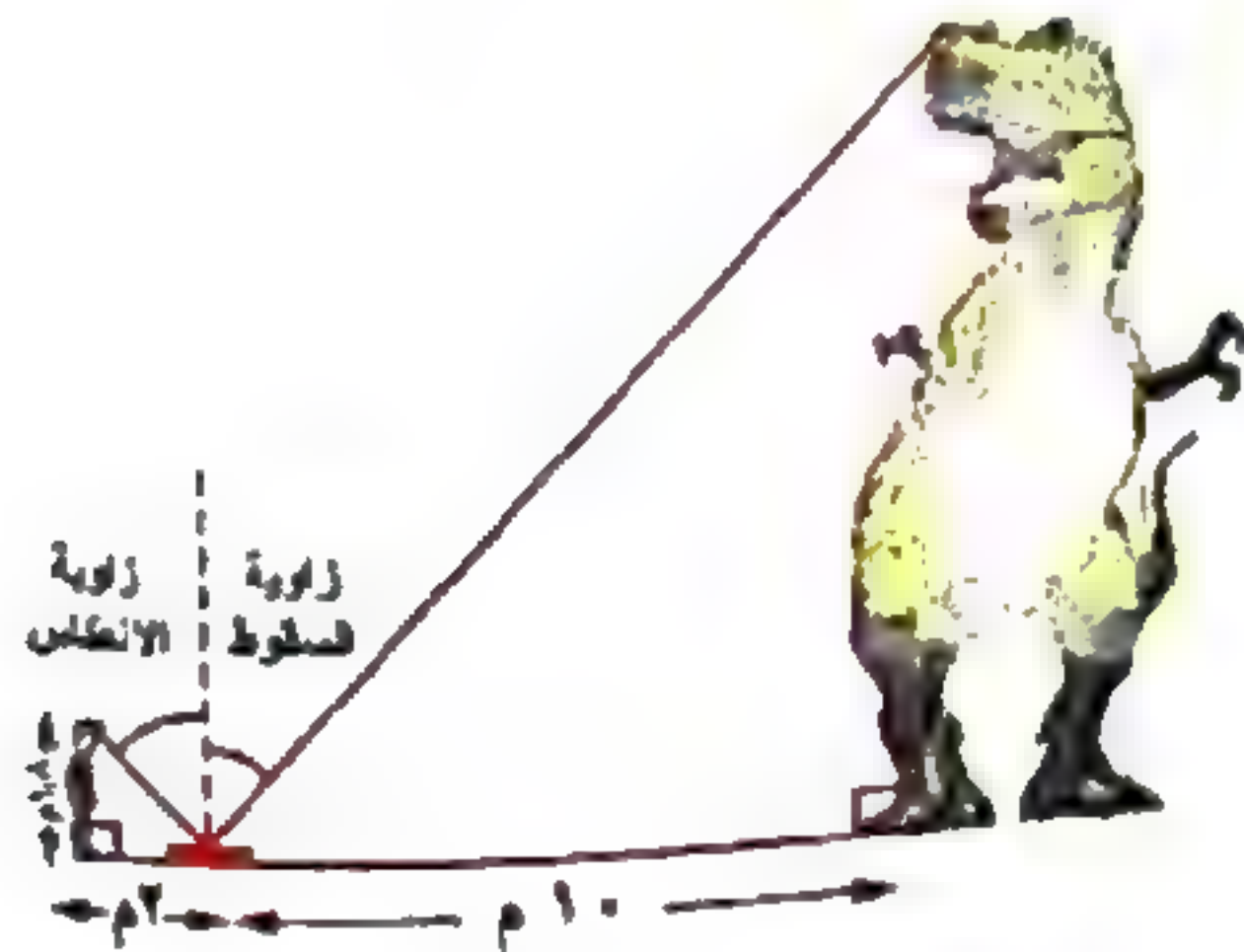
أفقى على الأرض على بُعد ١٠ أمتار من قدم الديناصور ورجع إلى الخلف

حتى استطاع مشاهدة رأس الديناصور في المرآة فكانت المسافة التي

رجعها للخلف ٢ متر فإذا كان طول الرجل ١,٨ متر وإذا علمت أن قياس

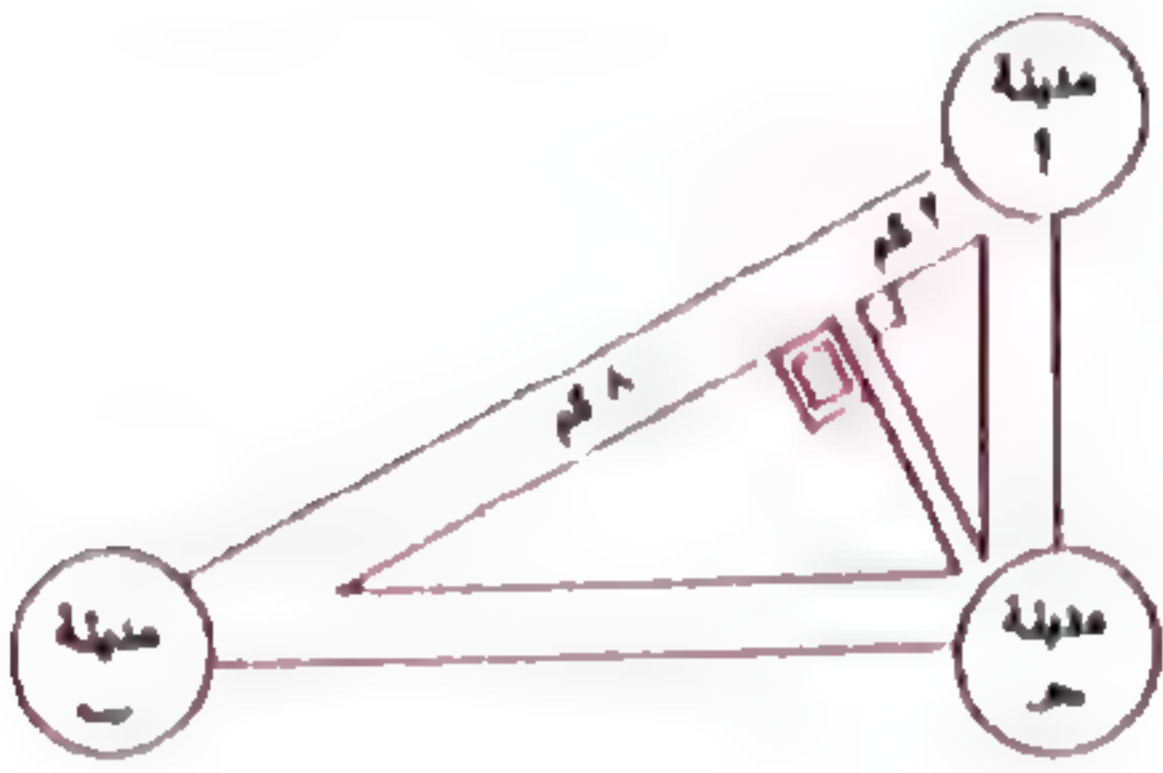
زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

فما ارتفاع الديناصور ؟



« ٩ أمتار »

تطبيقات حياتية



٥ (١) يبين المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبي يؤدي إلى المدينة ح عمودياً على الطريق السريع بين المدينتين ١ ، ب علماً بأن الطريق الواصل بين المدينتين ١ ، ح عمودى على الطريق الواصل بين المدينتين ب ، ح

(١) كم ينبغي أن تبعد المحطة عن المدينة ح ؟

(٢) ما البعد بين المدينتين ب ، ح ؟

« ٤ كم ، ٤ ١/٢ كم »

٦ وجد أحد مهندسى الآثار قطعة خشبية أثرية عبارة عن جزء من قرص

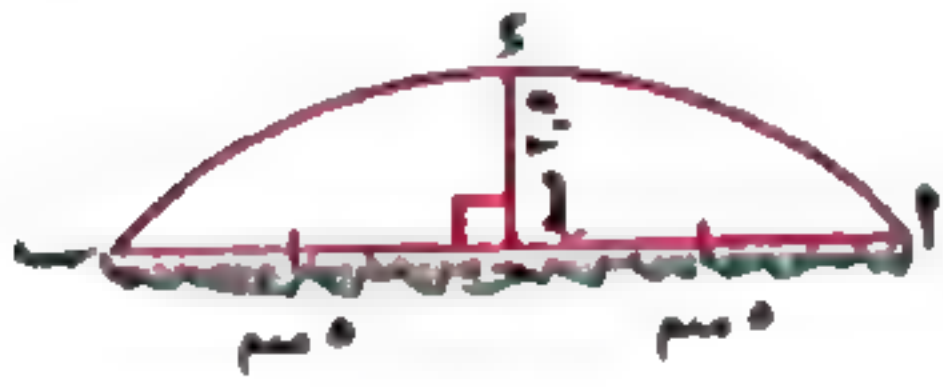
خشبي دائري. أراد هذا المهندس معرفة طول نصف قطر

هذا القرص فعين النقطتين ١ ، ب على القرص

فوجد أن طول $\overline{أب} = ١٠$ سم

ثم رسم من النقطة ح منتصف $\overline{أب}$ القطعة المستقيمة ح ب بحيث $\overline{أب} \perp \overline{أح}$ فوجد أن :

ح = ٢,٥ سم واستطاع بذلك هندسياً إيجاد طول نصف القطر. ترى كيف استطاع ذلك ؟! « ٦,٢٥ سم »



٧ فى إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل

قوس طبعى. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل

المقابل.

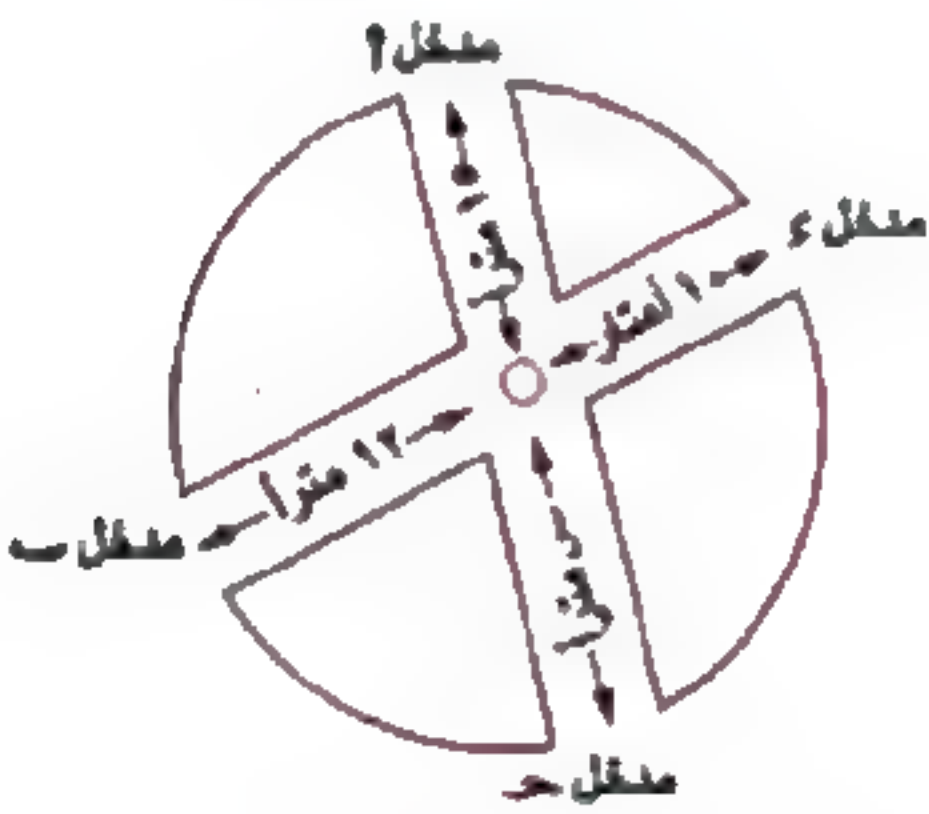
أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.

« ٤٥ م »



٨ يبين الشكل المقابل مخططاً لحديقة على شكل دائرة بها طريقان

يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عن المدخل ح



« ٨ أمتار »

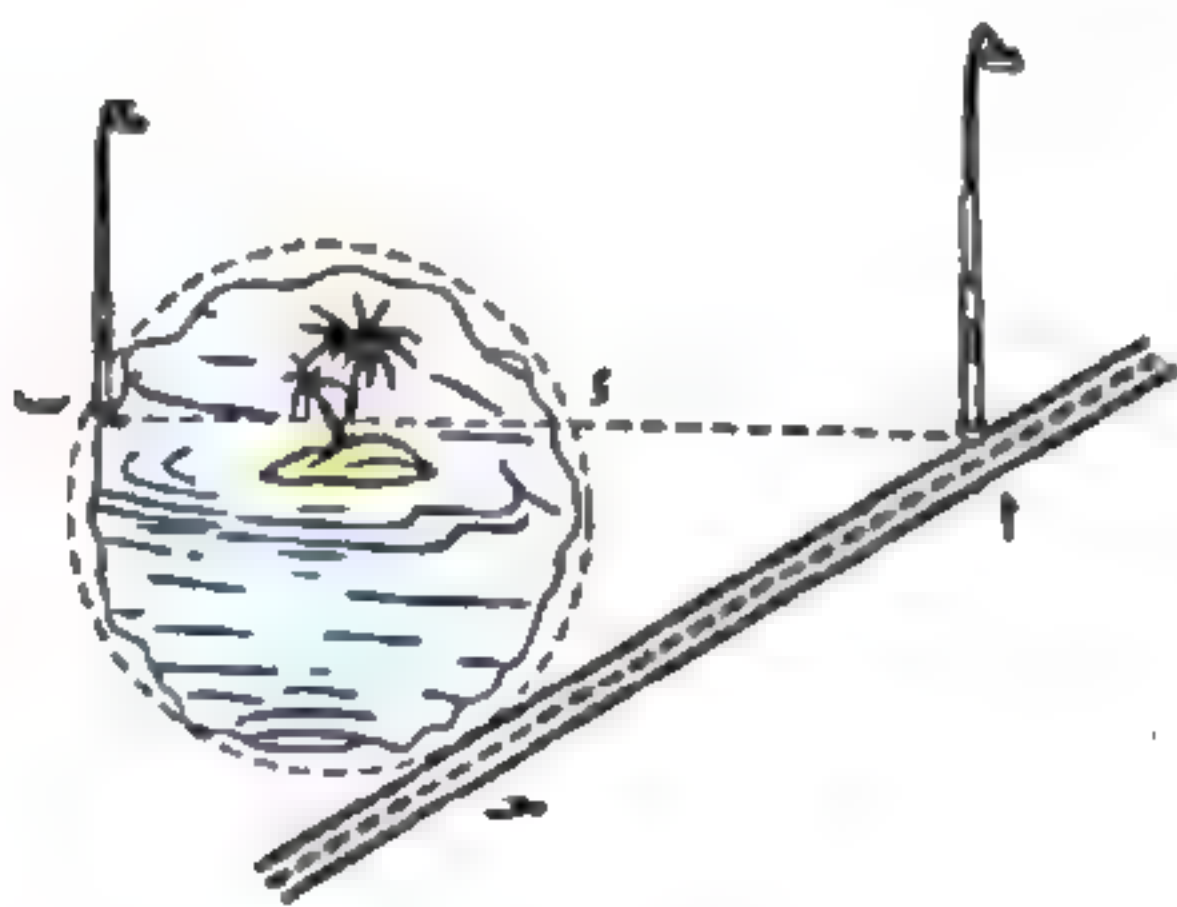
٩ فى الشكل المقابل :

طريق يمر بحيرة دائرية الشكل ، ويريد أحد مهندسى شركة كهرباء

وضع عمودين إنارة أحدهما على الطريق والآخر على الجهة الأخرى من

البحيرة ويصل بينهما بسلك كهرباء.

فكيف يمكنك إيجاد طول هذا السلك ؟!



نظريات التناسب فى المثلث

4
الوحدة



فى نهاية الوحدة

• تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة.

دروس الوحدة

- 1 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.
- 2 نظرية تاليس.
- 3 منصف الزاوية والأجزاء المتناسبة.
- 4 تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة (عكس نظرية ٣)
- 5 تطبيقات التناسب فى الدائرة.

نواتج التعلم

- فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة» وعكسها ، ونتائج عليها.
 - يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة وحالات خاصة منها.
 - يحل تطبيقات وتمارين على نظرية تاليس العامة ونظرية تاليس الخاصة.
 - يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين» وعكسها.
 - يوجد طول كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.
 - يتعرف حقيقة أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.
 - يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
 - يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.

تمهيد ..

قبل البدء في دراسة الوحدة الرابعة (نظريات التناسب في المثلث) من المفيد والضروري أن نستعرض مفهوم التناسب وبعض خواصه التي سوف نستخدمها أثناء دراستنا لهذه الوحدة :

يقال إن $١، ب، ح، د، هـ، و، ...$ كميات متناسبة إذا كان :

$$\frac{١}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{و} = \dots$$

يقال إن $١، ب، ح، د، هـ، و، ...$ في تناسب متسلسل إذا كان :

$$\frac{١}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{و} = \dots$$

وفي هذه الحالة يسمى $ب$ الوسط المتناسب للعددين $١، ح$ حيث $ب^٢ = ١ \times ح$

كما يسمى $ح$ الوسط المتناسب للعددين $ب، د$ حيث $ح^٢ = ب \times د$ وهكذا ...

إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{ب}{ح}$ حيث كل من $١، ح$ يسمى مقدم النسبة وكل من $ب، د$ يسمى تالي النسبة فإن :

$$١ \times ح = ب \times ب \quad [١]$$

$$\frac{ب}{١} = \frac{د}{ب} \quad [٢] \text{ (مقلوبات النسبة تكون متساوية)}$$

$$\frac{ب}{د} = \frac{١}{ب} \quad [٣] \text{ (مقدم النسبة الأولى = تالي النسبة الأولى) } \frac{ب}{د} = \frac{١}{ب}$$

$$\frac{ب+١}{ب} = \frac{د+ب}{د} \quad [٤] \text{ (مقدم + تالي) } \frac{ب+١}{ب} = \frac{د+ب}{د}$$

$$\frac{ب+١}{١} = \frac{د+ب}{ب} \quad [٥] \text{ (مقدم + تالي) } \frac{ب+١}{١} = \frac{د+ب}{ب}$$

إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \dots$ فإن :

$$١ = \frac{١+ب+ح+د+هـ+\dots}{١+ب+ح+د+هـ+\dots} \quad [١] \text{ (إحدى النسب) } = \frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$$

$$١ = \frac{١+ب+ح+د+هـ+\dots}{١+ب+ح+د+هـ+\dots} \quad [٢] \text{ (إحدى النسب)}$$

حيث $١، ب، ح، د، هـ، ن، ...$ أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

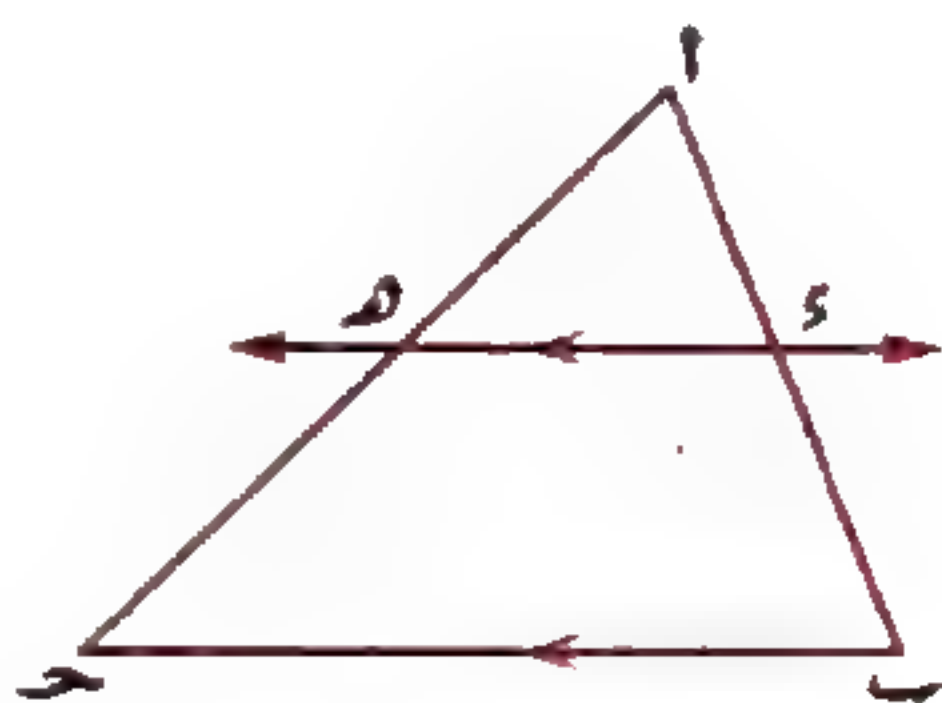


الدرس 1

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



أب ح مثلث ، $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$

إثبات أن : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$

$\therefore \overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$

المعطيات

المطلوب

البرهان

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (مسلمة التشابه)

ويكون : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

، $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ، $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ، $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ويكون : $\frac{AD}{AB} + \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} + \frac{AE}{AC}$

$\therefore \frac{AD}{AB} + 1 = \frac{AD}{AB} + 1$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ومن خواص التناسب نجد أن : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

(وهو المطلوب)

ملاحظة

من الشكل السابق :

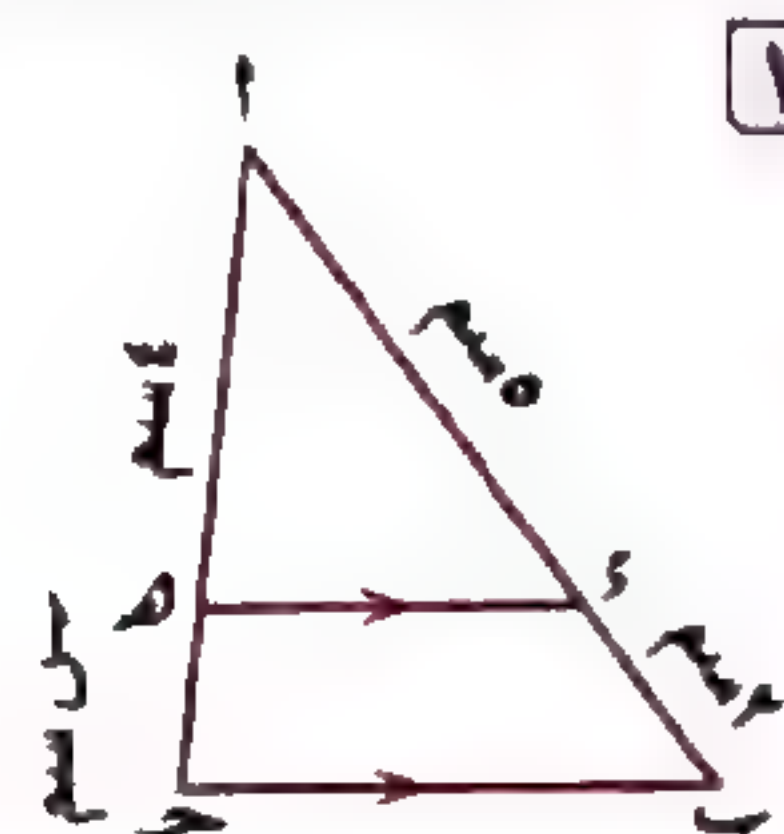
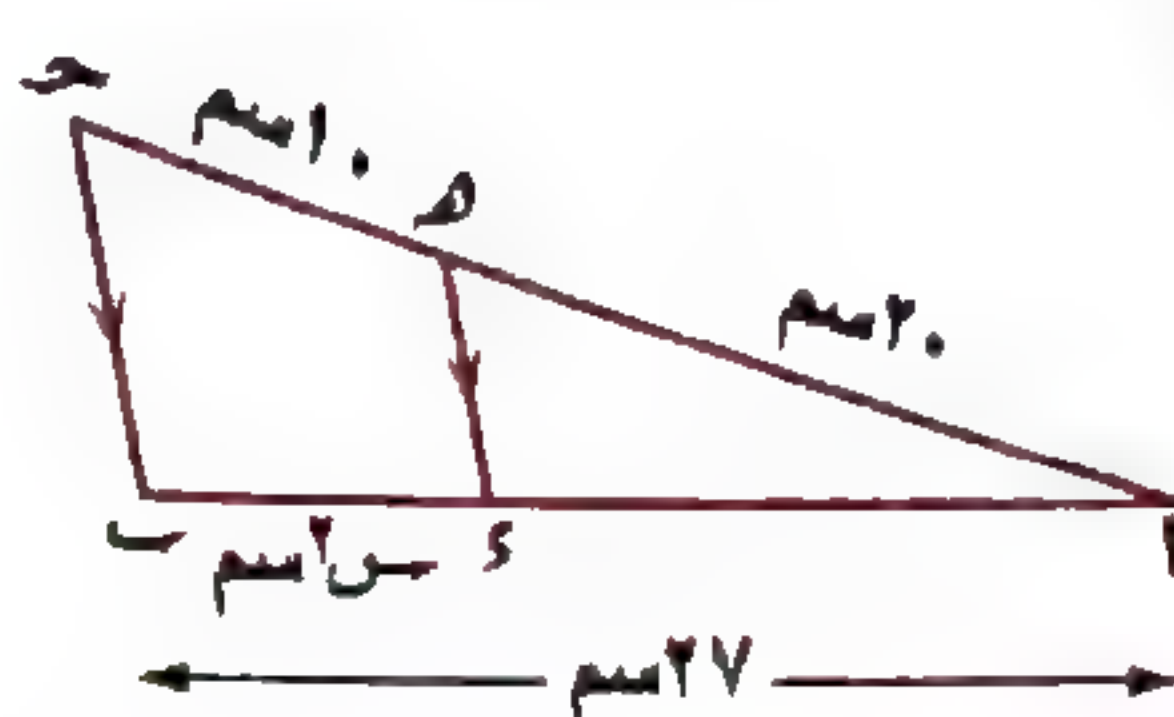
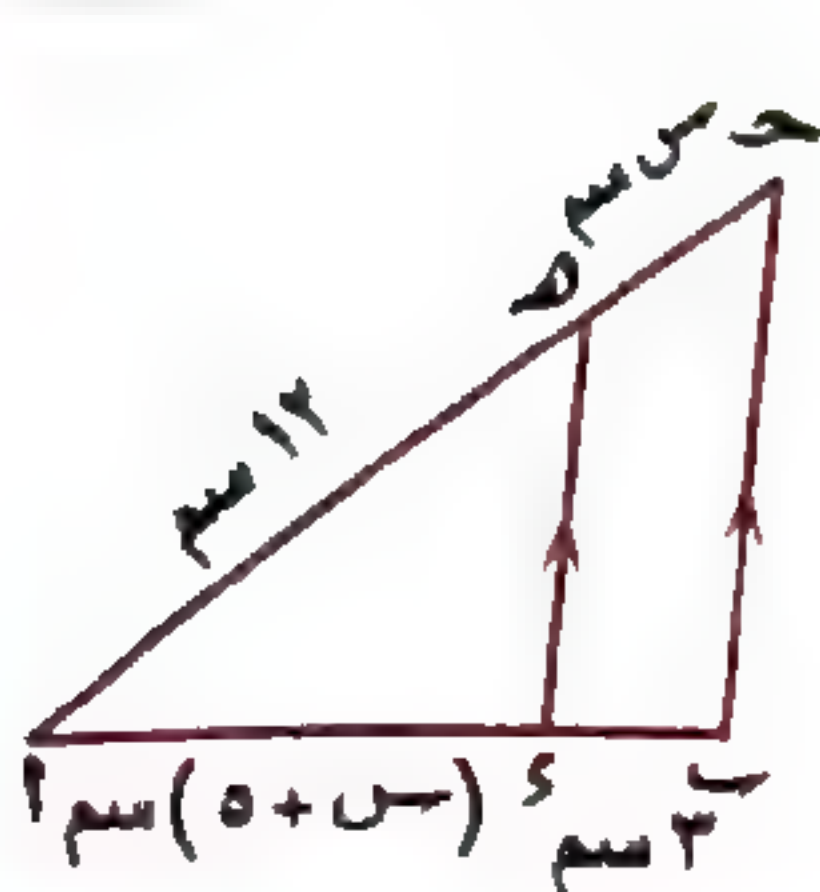
$$\therefore \frac{أه}{هـب} = \frac{أه}{هـب} \text{ (نظرية)}$$

$$\therefore \frac{أه}{هـب} = \frac{أه}{هـب}$$

$$\therefore \frac{أه + هـب}{هـب} = \frac{أه + هـب}{هـب} \text{ (راجع خواص التناسب)}$$

مثال ١

في كل من الأشكال الآتية : $\overline{هـه} // \overline{هـه}$ أوجد قيمة $هـ$ العددية :



الحل

$$\therefore هـ = 1,6 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{أه}{هـب} = \frac{أه}{هـب}$$

١ $\therefore \overline{هـه} // \overline{هـه}$

$$\therefore هـ = 9$$

$$\therefore \frac{27}{10} = \frac{27}{2}$$

$$\therefore \frac{أه}{هـب} = \frac{أه}{هـب}$$

٢ $\therefore \overline{هـه} // \overline{هـه}$

$$\therefore هـ = 3 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{5 + هـ}{3} = \frac{12}{2}$$

$$\therefore \frac{أه}{هـب} = \frac{أه}{هـب}$$

٣ $\therefore \overline{هـه} // \overline{هـه}$

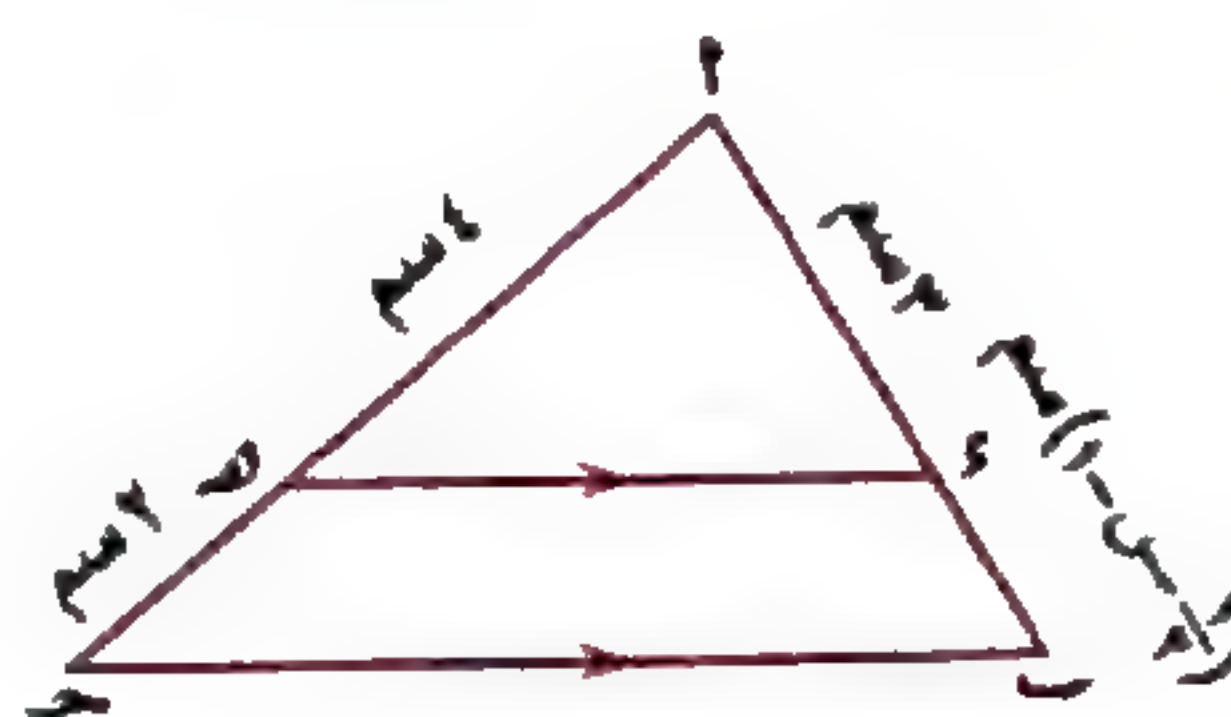
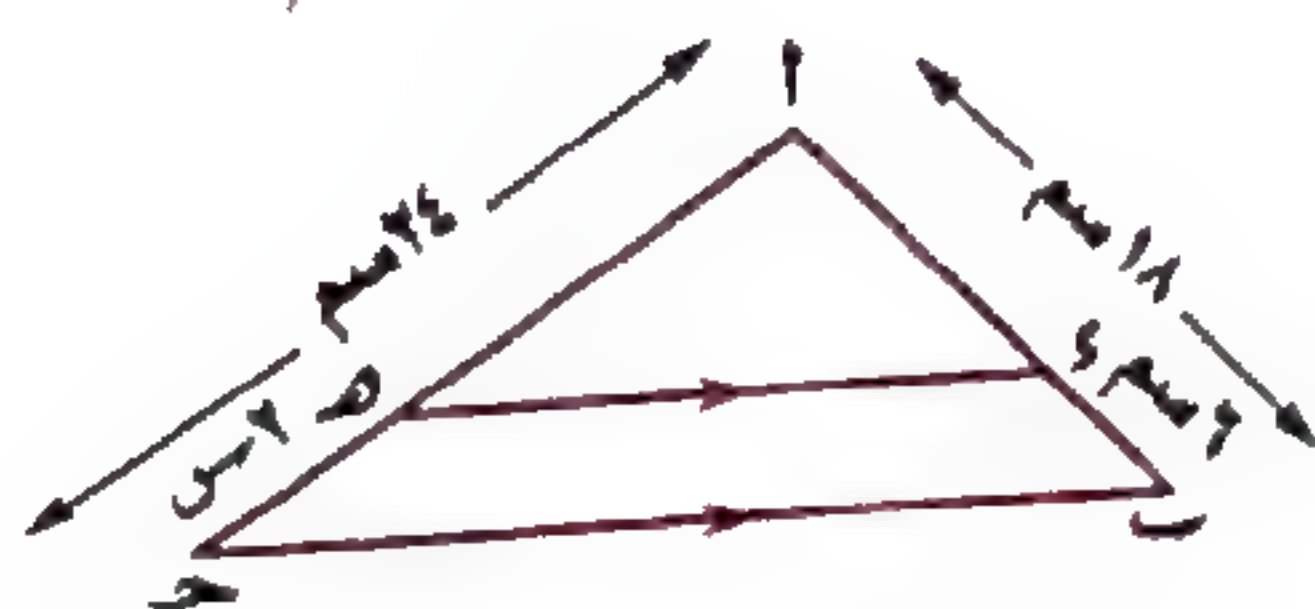
$$\therefore هـ = 36 - 5 = 31$$

$$\therefore هـ = 36 - 5 = 31$$

$$\therefore هـ = 9 - 4 = 5 \text{ (مرفوض) } \therefore هـ = 4 \text{ سم}$$

حاول بنفسك

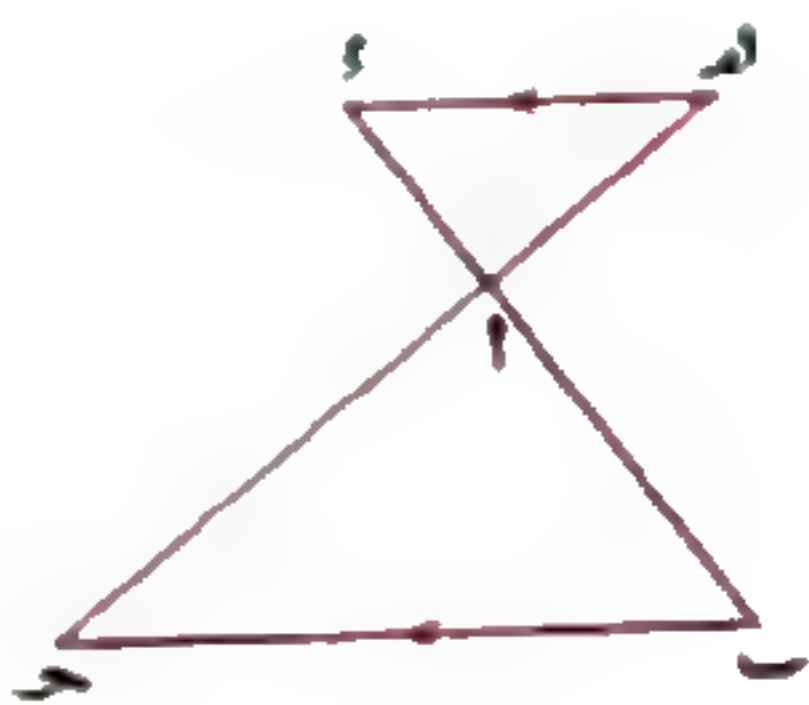
في كل من الشكلين الآتيين : $\overline{هـه} // \overline{هـه}$ أوجد قيمة $هـ$ العددية :



إذا رسم مستقيم خارج مثلث ABC يوازي ضلعاً من أضلاعه ، وليكن BC ، ويقطع AB ، AC في D ، E على الترتيب فإن : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (كما في الشكل)

بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$



مثال ٢

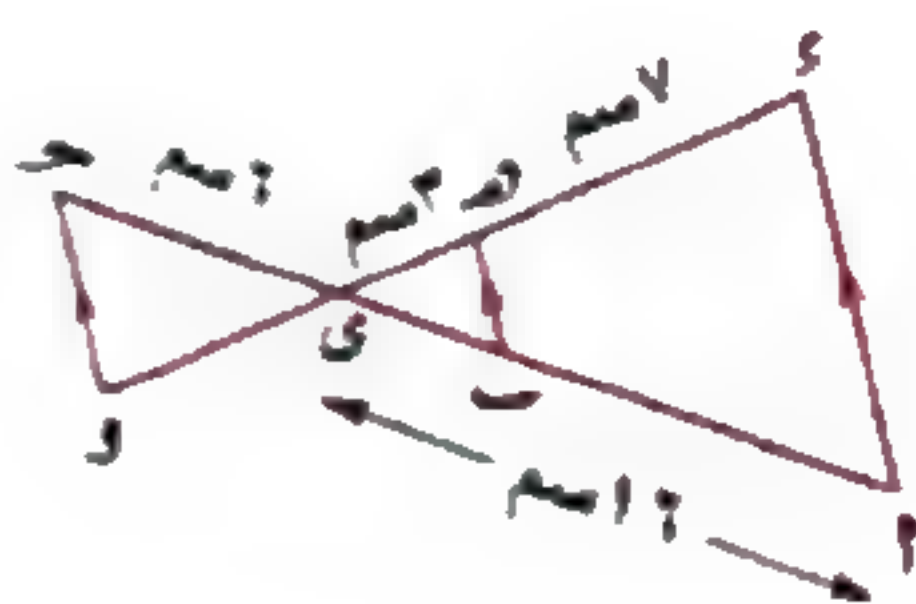
في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$$

$$AD \cap BE = \{D\}, AD \cap CF = \{F\},$$

$$AD = 10 \text{ سم}, BE = 6 \text{ سم}, CF = 2 \text{ سم}$$

أوجد : طول كل من AD ، BE ، CF



الحل

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AE}{BF}$$

$$\therefore AD = \frac{10 \times 6}{16} = 3.75 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{AE}{BF}$$

$$\therefore AD = \frac{16 \times 2}{10} = 3.2 \text{ سم (وهو المطلوب)}$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} \parallel \overline{CF}$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{16}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} \parallel \overline{BE}$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{16}{2}$$

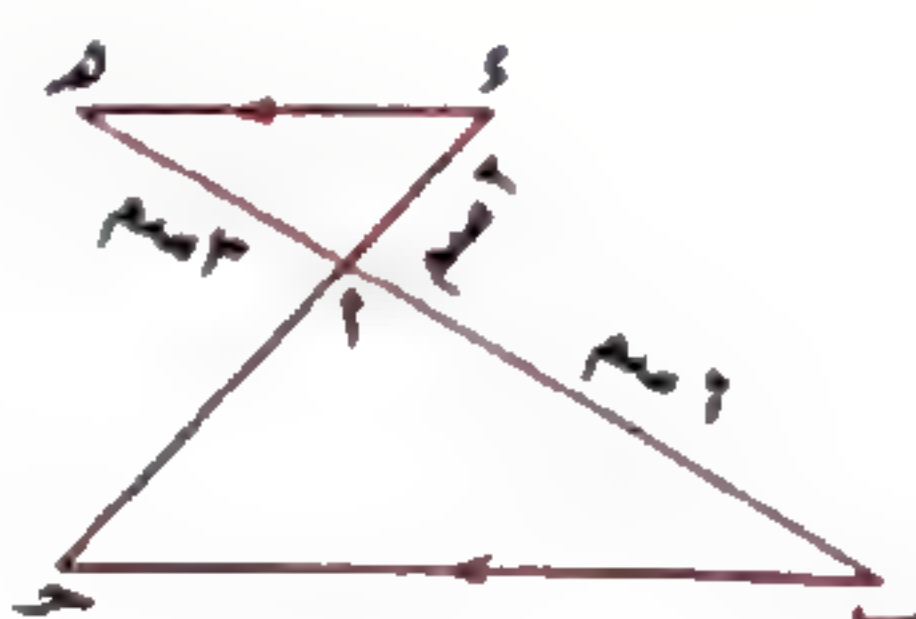
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}, \{D\} = \overline{AD} \cap \overline{BE}, \{F\} = \overline{AD} \cap \overline{CF}$$

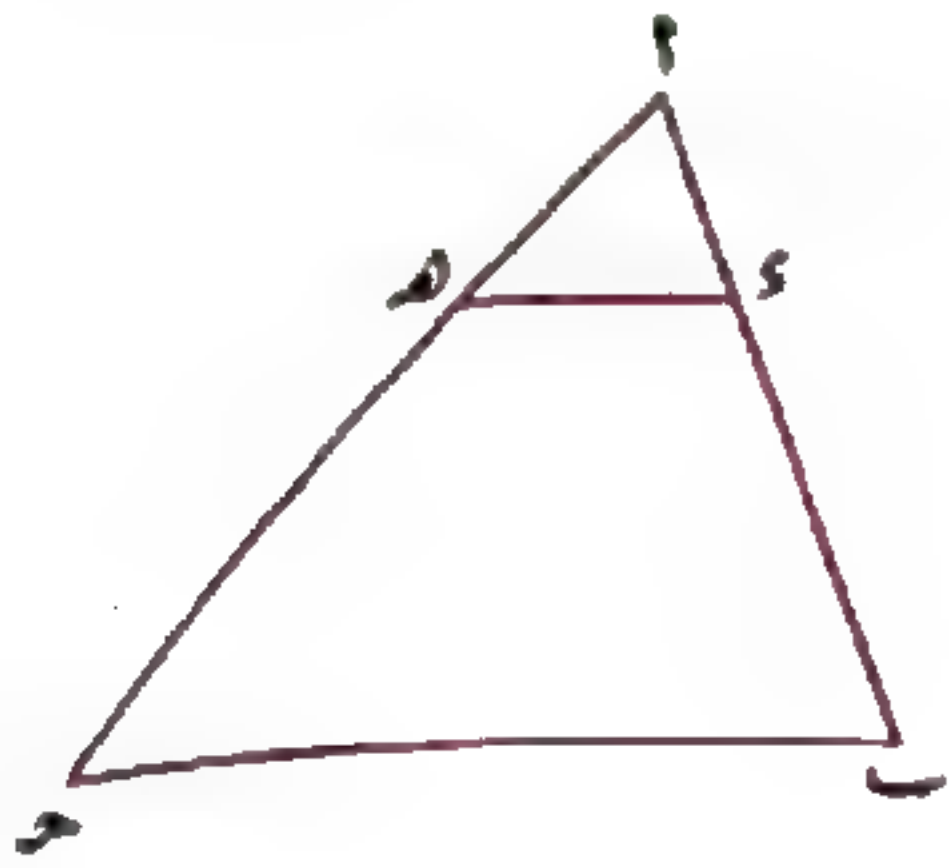
$$AD = 10 \text{ سم}, BE = 6 \text{ سم}, CF = 2 \text{ سم}$$

أوجد : طول AD



عكس نظرية

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطيع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، د ه يقطع أ ب في د ، أ ح في ه ، $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ،

فإن : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

(لأن $\frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{مقدم}}$)

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

، د ه مشتركة

$\therefore \triangle ADE \equiv \triangle ABC$ وهما في وضع تناظر

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore DE \parallel BC$

ملاحظة

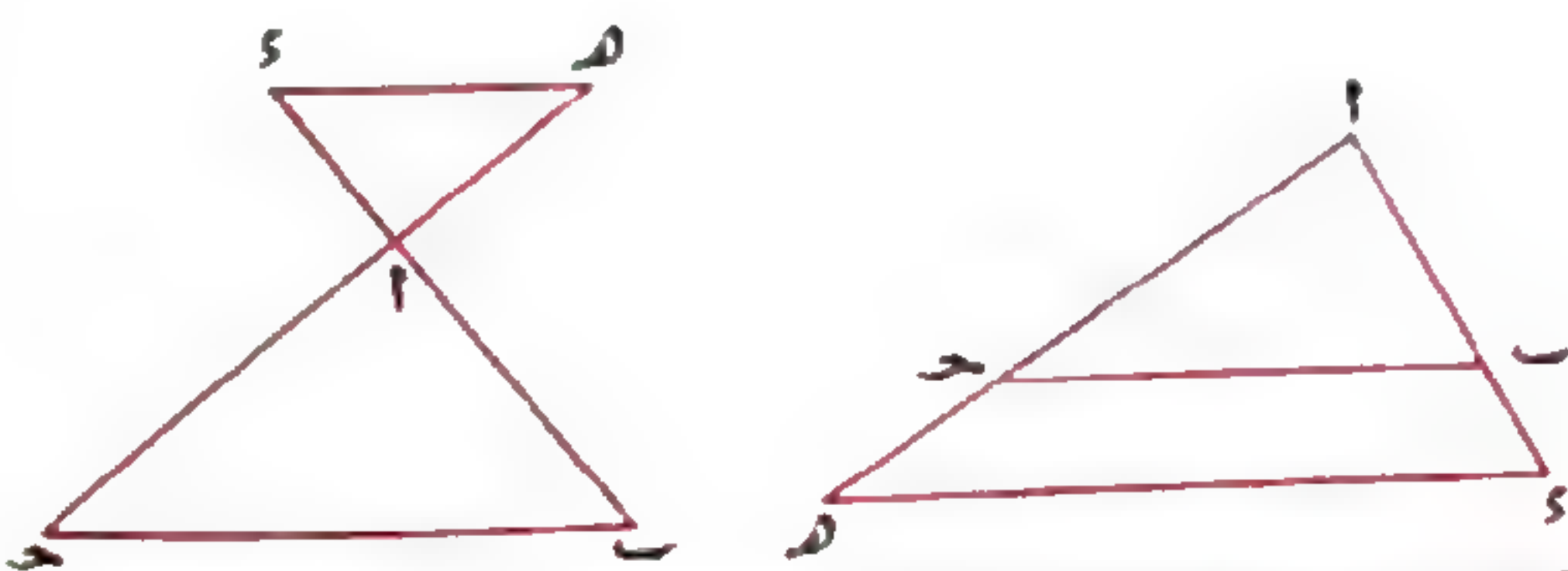
إذا رسم مستقيم (وليكن د ه) خارج مثلث أ ب ح ويقطع أ ب ، أ ح في د ، ه على الترتيب

وكان $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ فإن : $DE \parallel BC$

ففي الشكل المقابل :

إذا كان : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

فإن : $DE \parallel BC$

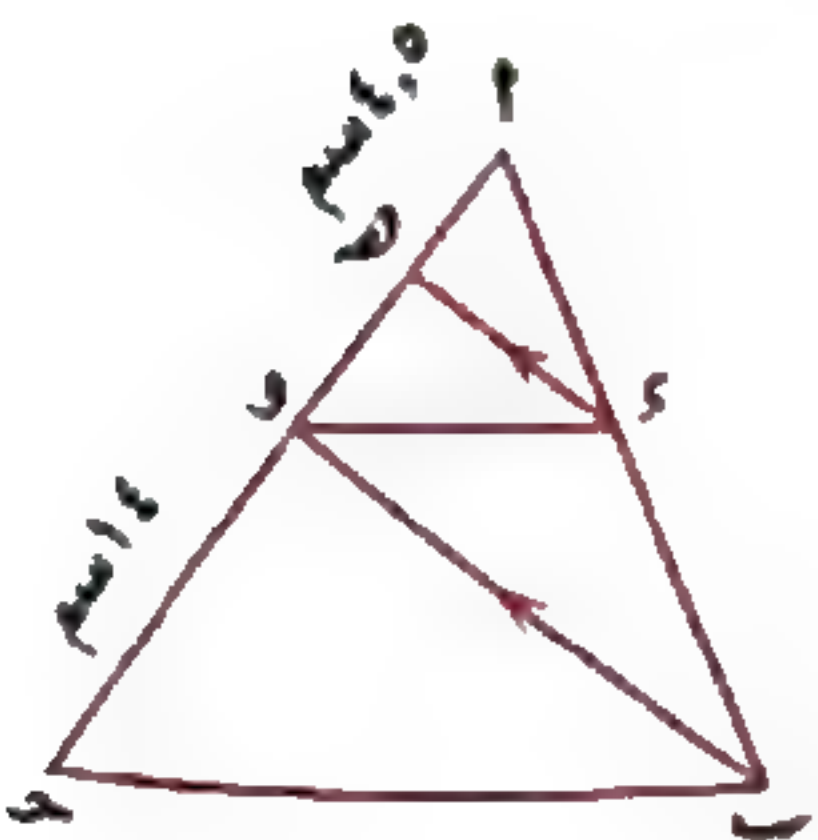


مثال ٣

في الشكل المقابل :

إذا كان : $DE \parallel BC$ ، $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

، $AD = 4$ سم ، $DB = 6$ سم ، فأثبت أن : $DE \parallel BC$



الحل

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore DE \parallel BC = \frac{4 \times 6}{3} = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 10.5 = 6 + 4.5 = 10.5 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{6}{4.5} = \frac{10.5}{4.5}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{10.5}{14} = \frac{10.5}{14}$$

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{AC}$$

(وهو المطلوب)

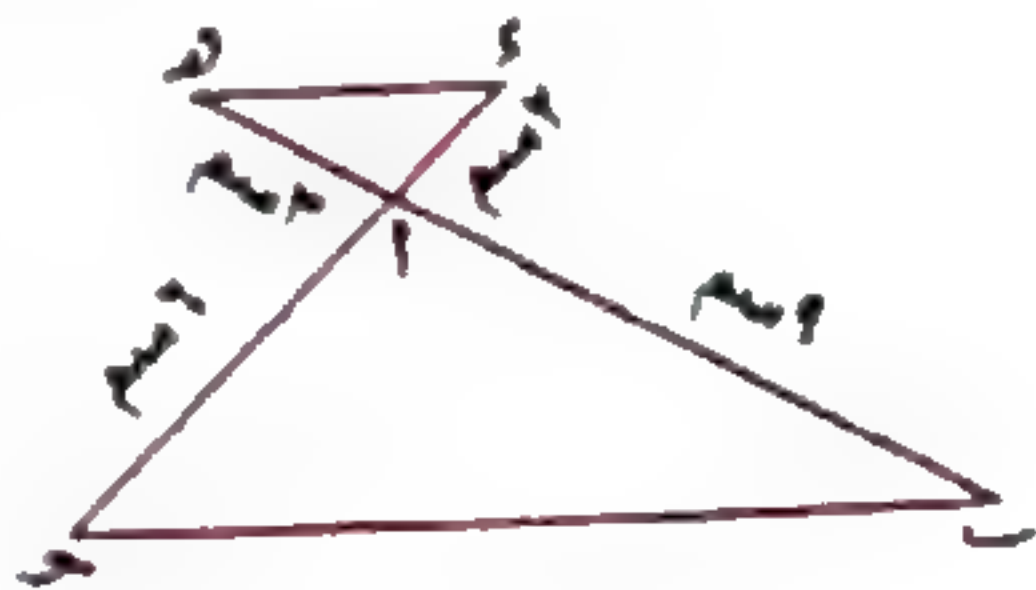
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{A\}, \text{ سم } 2 = \text{سم } 4, \text{ سم } 3 = \text{سم } 6$$

$$\text{سم } 9 = \text{سم } 6, \text{ سم } 4 = \text{سم } 6$$

حدد ما إذا كان : $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ولماذا ؟



مثال ٤

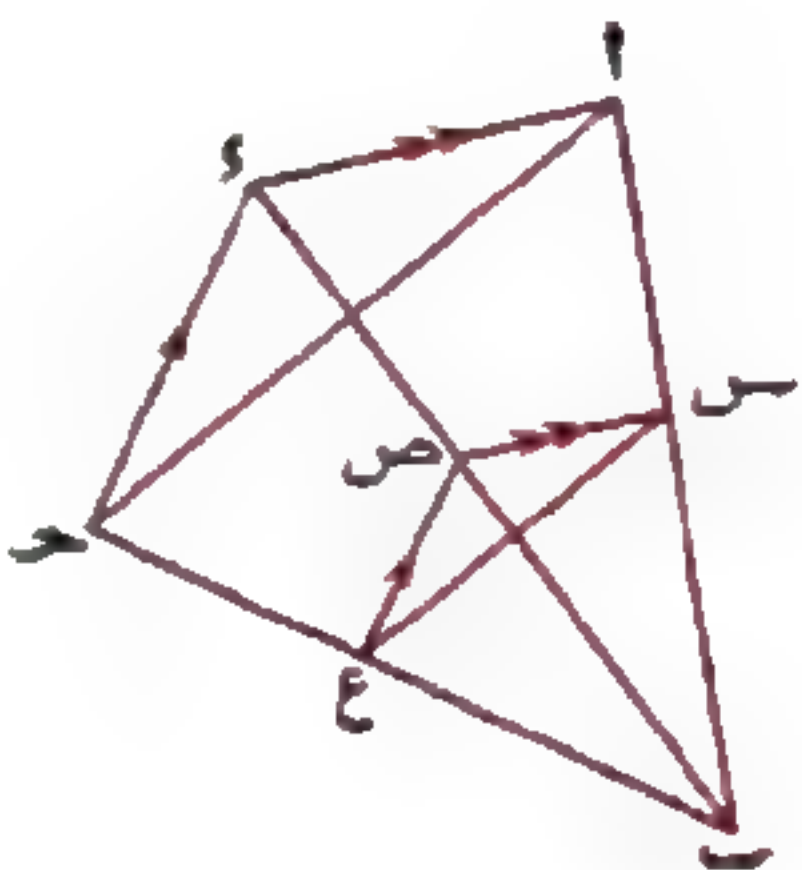
في الشكل المقابل :

ABCD شكل رباعي ، $\overline{AC} \cap \overline{BD} = E$

، رسم $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ فقطع \overline{AB} في F

، ورسم $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ فقطع \overline{AC} في G

أثبت أن : $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



الحل

(١)

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{BE}{DE}$$

(٢)

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{BE}{DE}$$

\therefore في $\triangle ABC$: $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ (وهو المطلوب)

في $\triangle ABC$: $\therefore \overline{CE} \parallel \overline{AD}$

في $\triangle ABC$: $\therefore \overline{CE} \parallel \overline{AD}$

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{BE}{DE}$

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

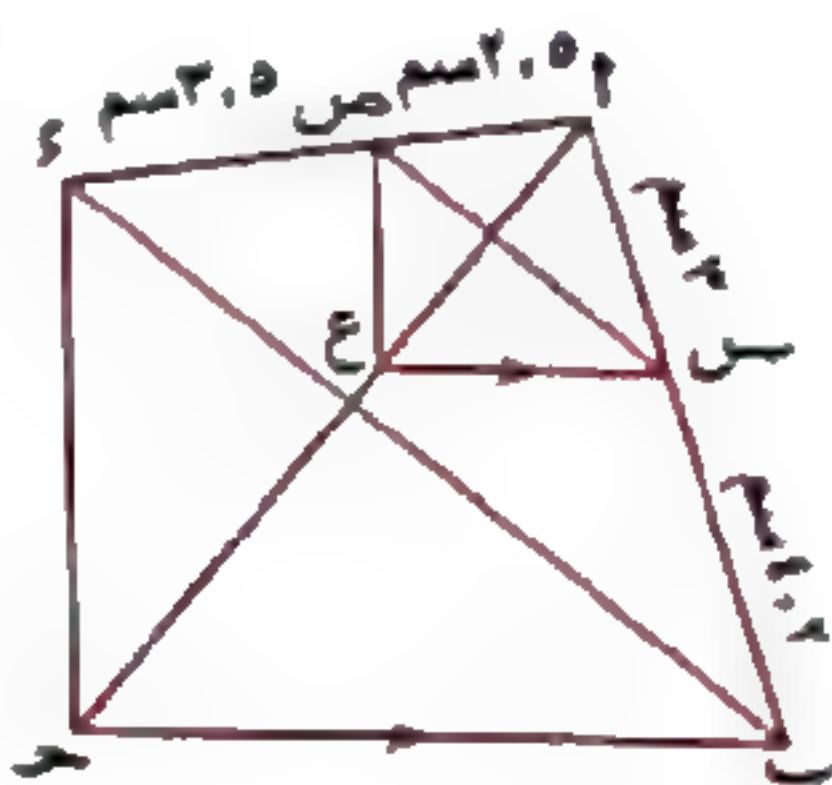
ABCD شكل رباعي ، رسم قطراه \overline{AC} ، \overline{BD}

، $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ حيث : $\text{سم } 2 = \text{سم } 4$ ، $\text{سم } 3 = \text{سم } 6$

، $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ حيث : $\text{سم } 2 = \text{سم } 4$ ، $\text{سم } 3 = \text{سم } 6$

، رسم $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ ويقطع \overline{AB} في F

أثبت أن : $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



$$\boxed{2} \text{ سم } \overline{CE} \parallel \overline{AD}$$

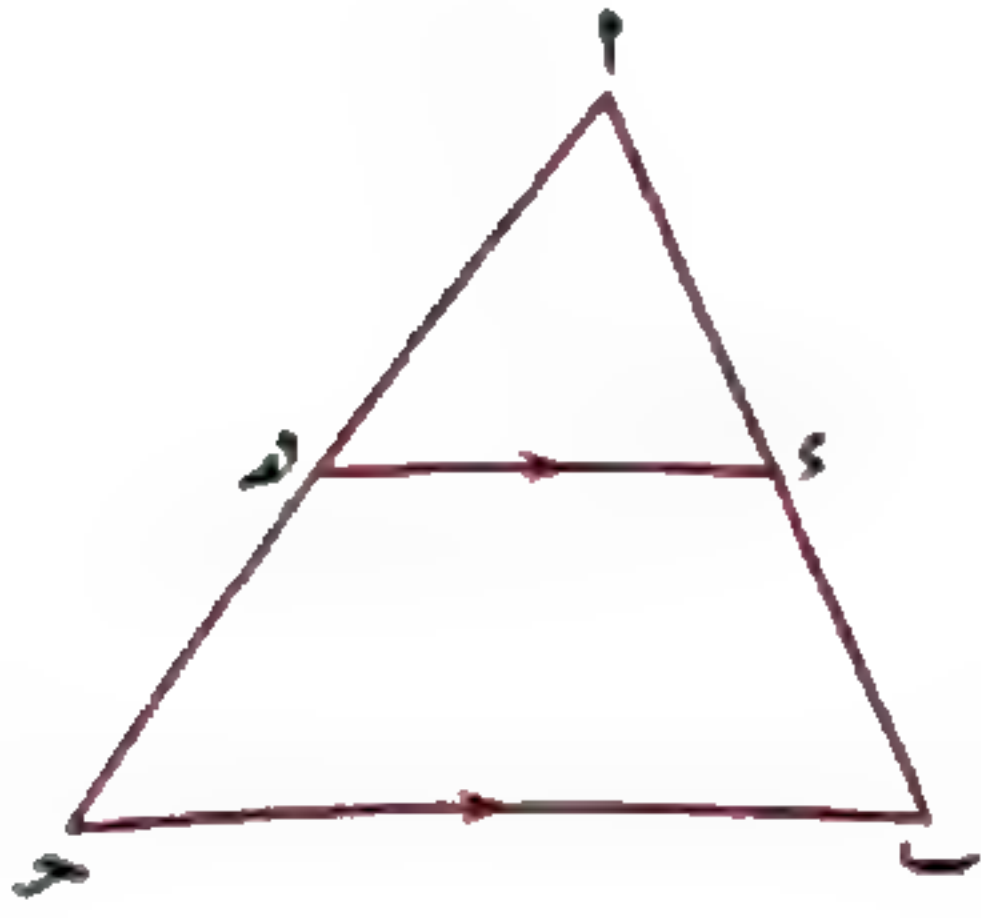


على المستقيمت المتوازية والأجزاء المتناسبة

من أسئلة الكتاب المدرسي



١ باستخدام الشكل المقابل اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) إذا كان : $\frac{5}{3} = \frac{5}{5}$ فإن : $\frac{5}{5} = \frac{5}{5}$ =

(أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$

(ج) $\frac{2}{8}$ (د) $\frac{5}{8}$

(٢) إذا كان : $\frac{4}{7} = \frac{4}{5}$ فإن : $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ =

(أ) $\frac{7}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$

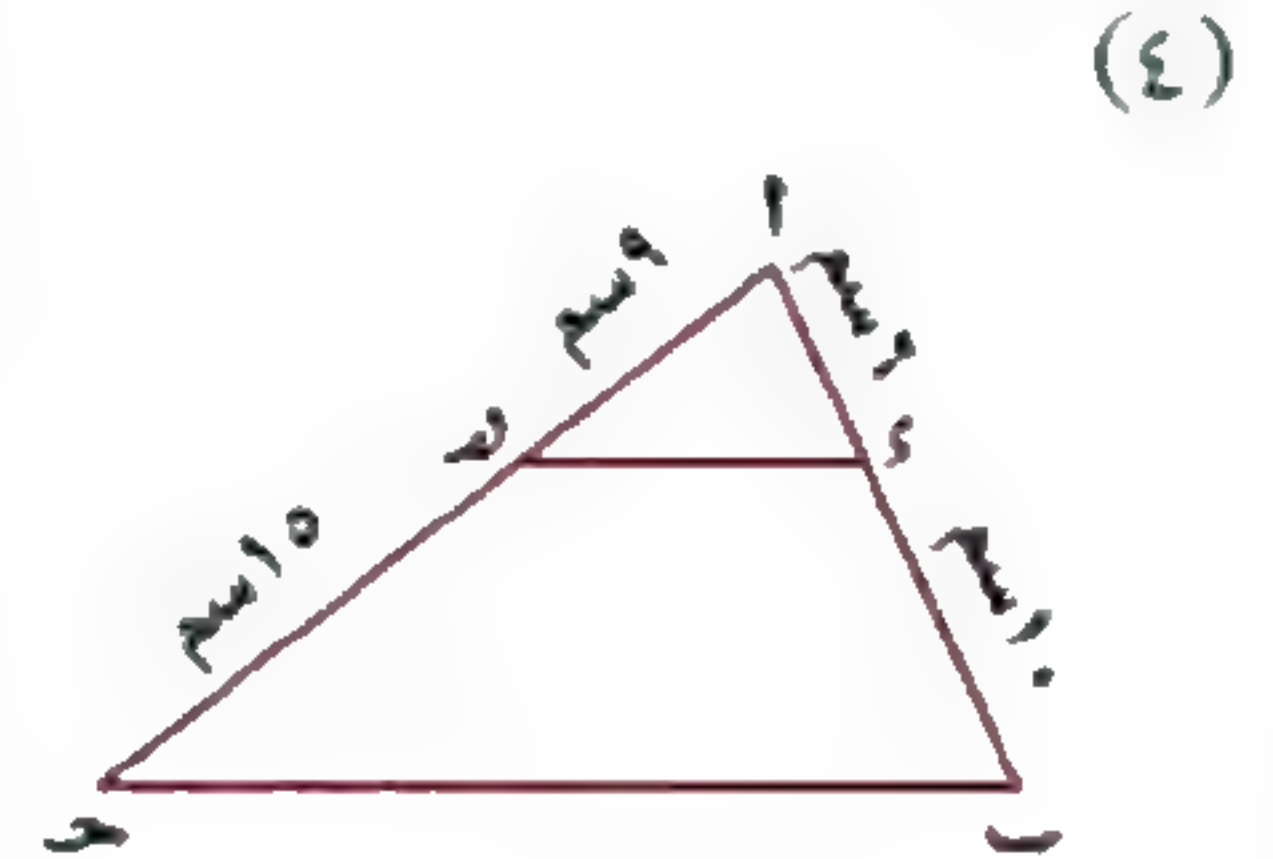
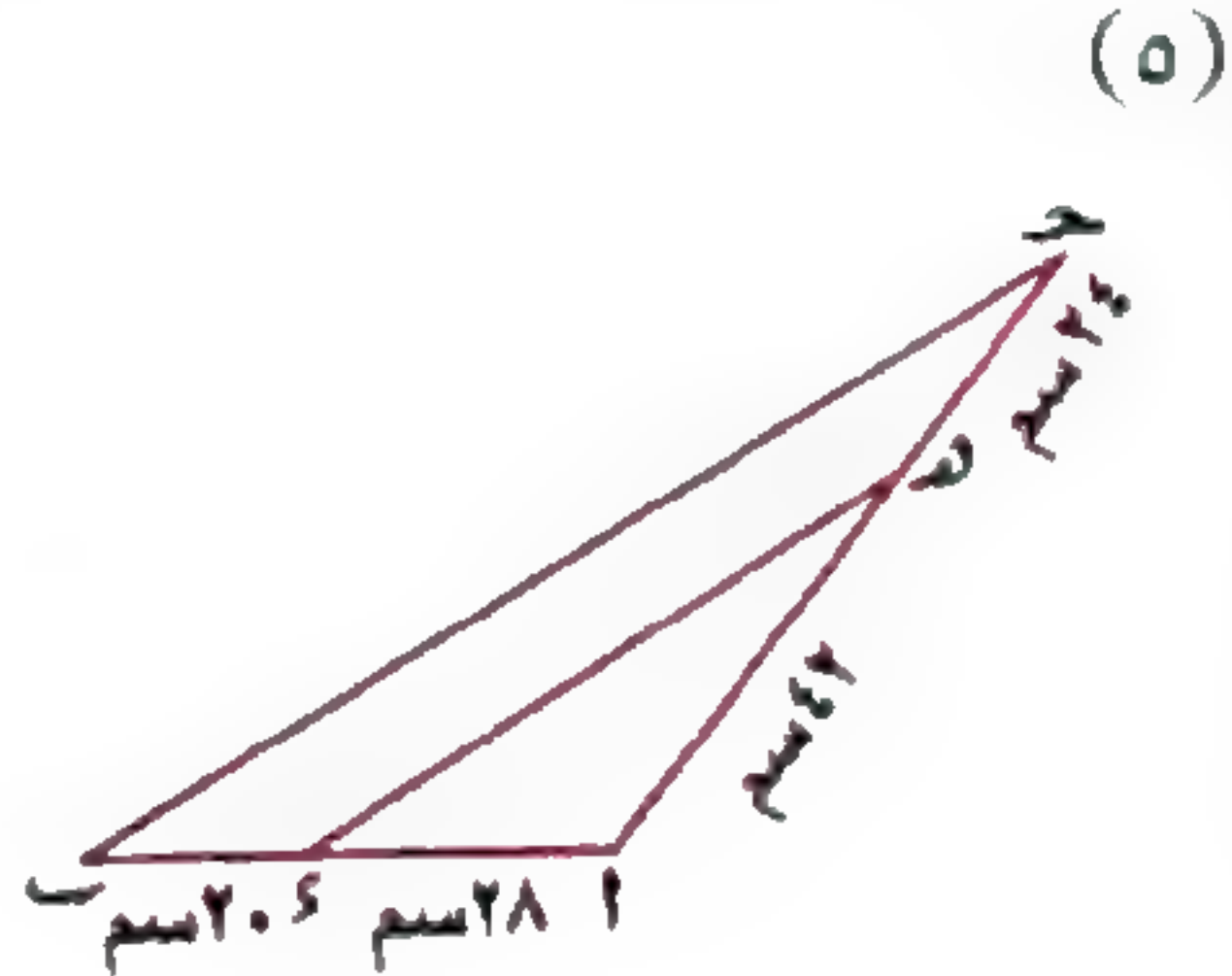
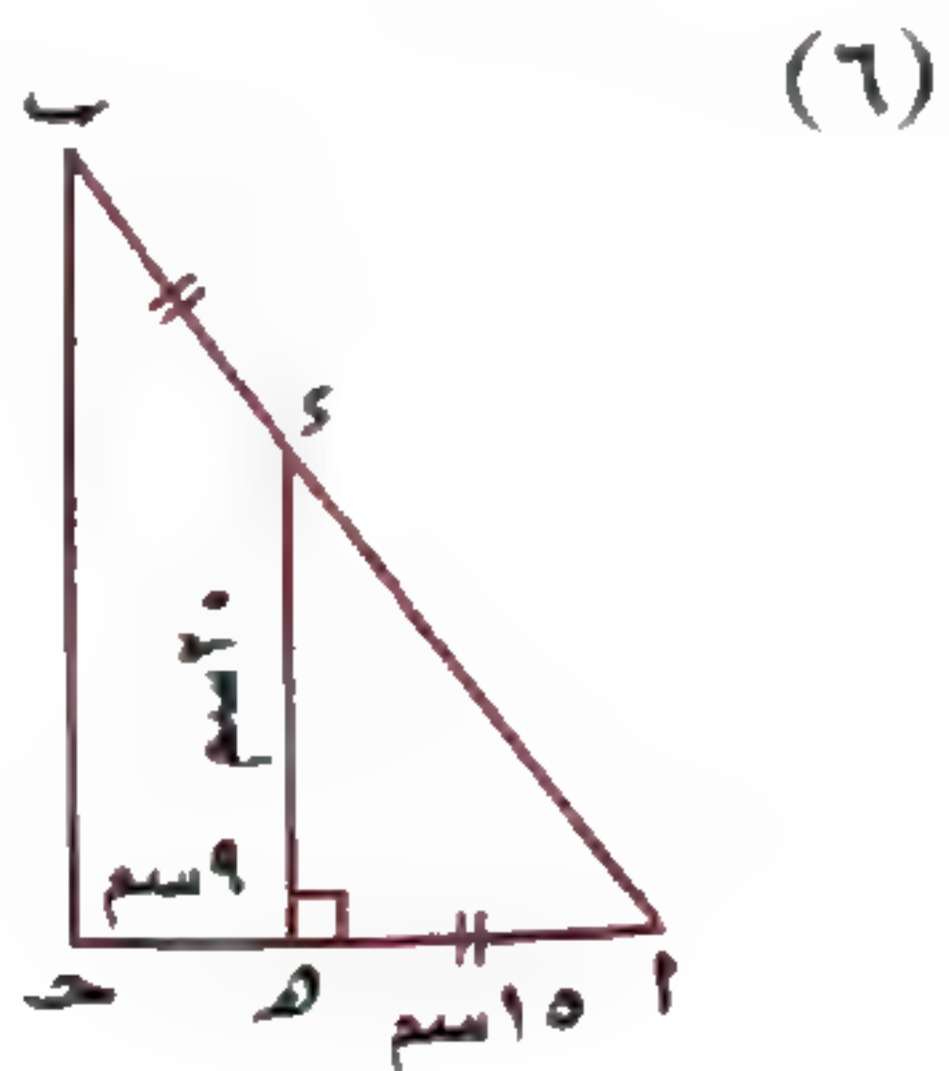
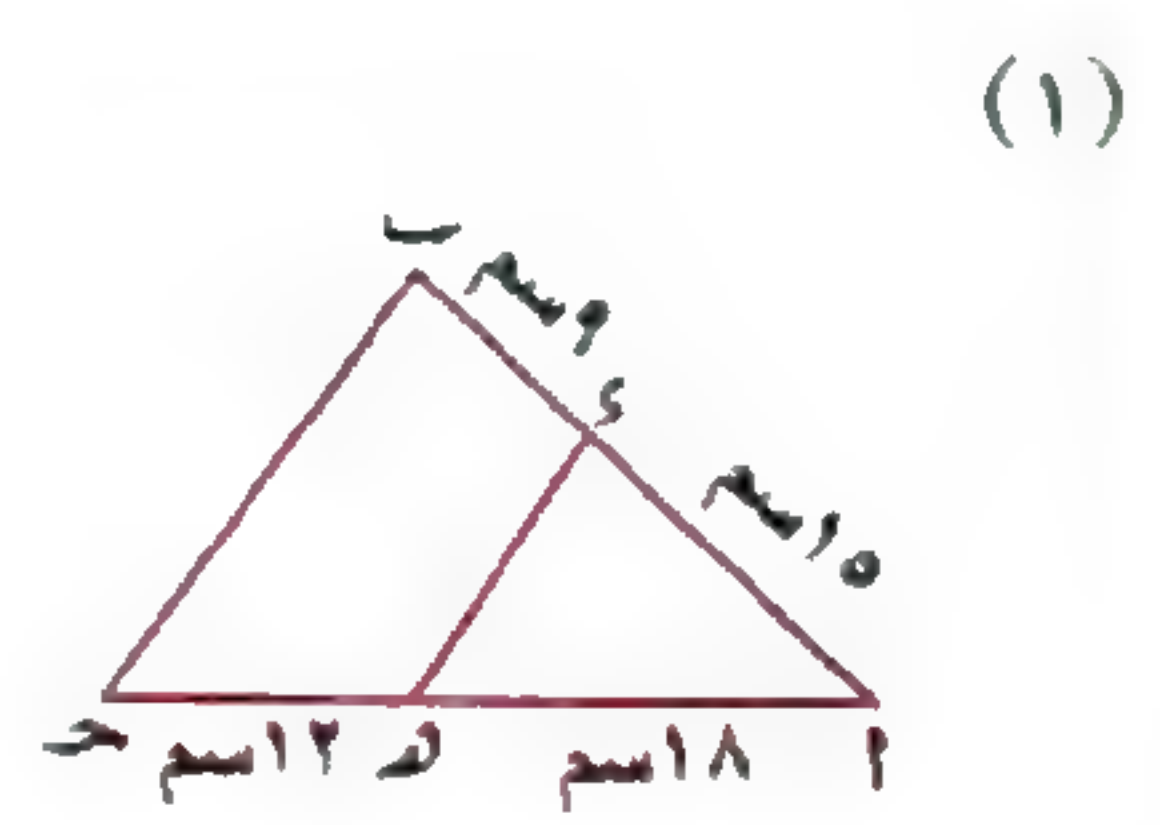
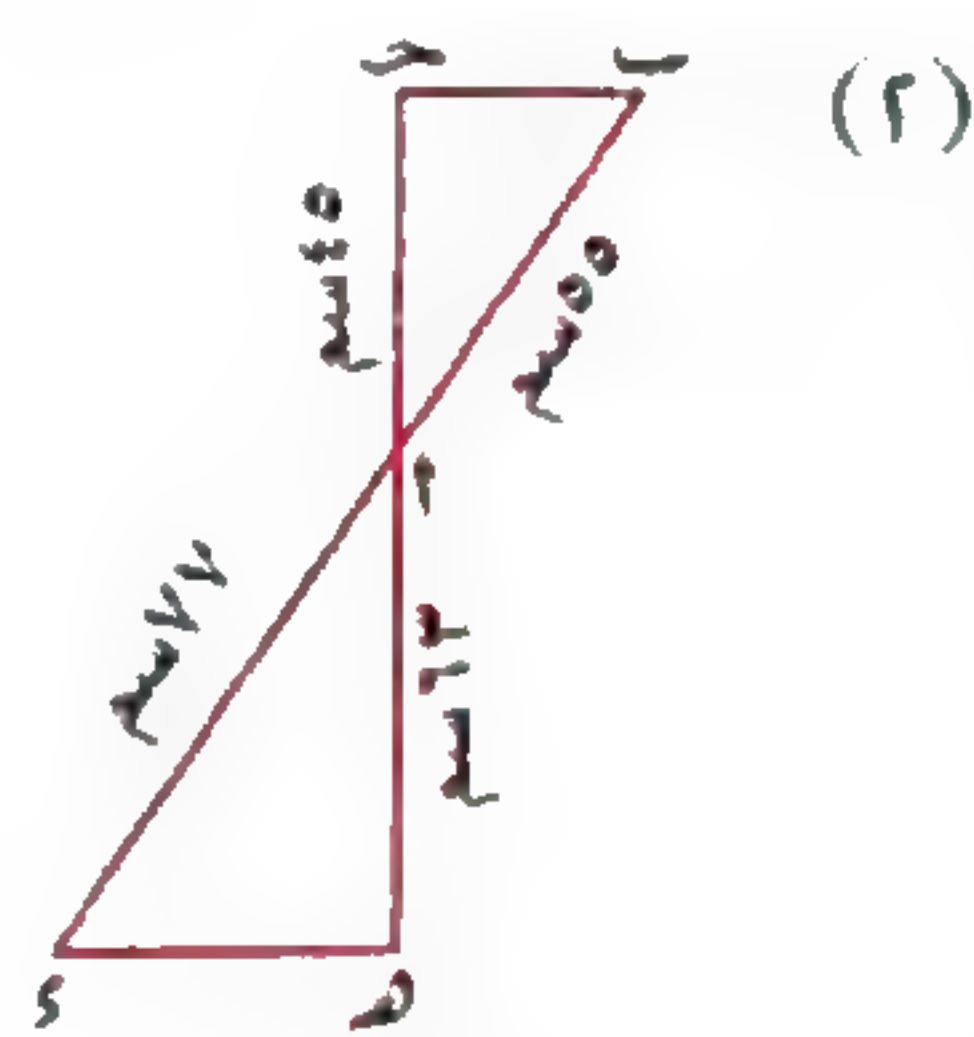
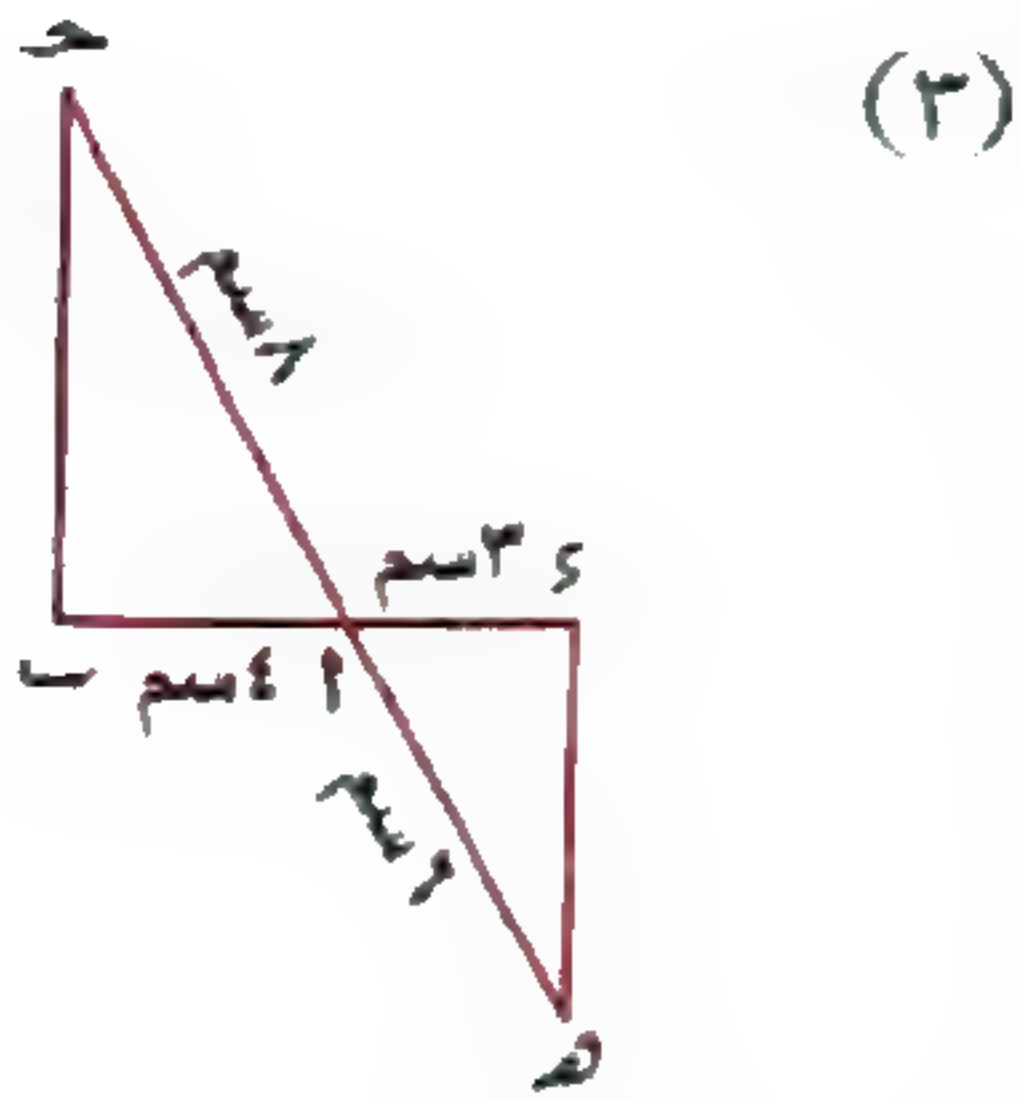
(ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{2}{4}$

(٣) إذا كان : $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ فإن : $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ =

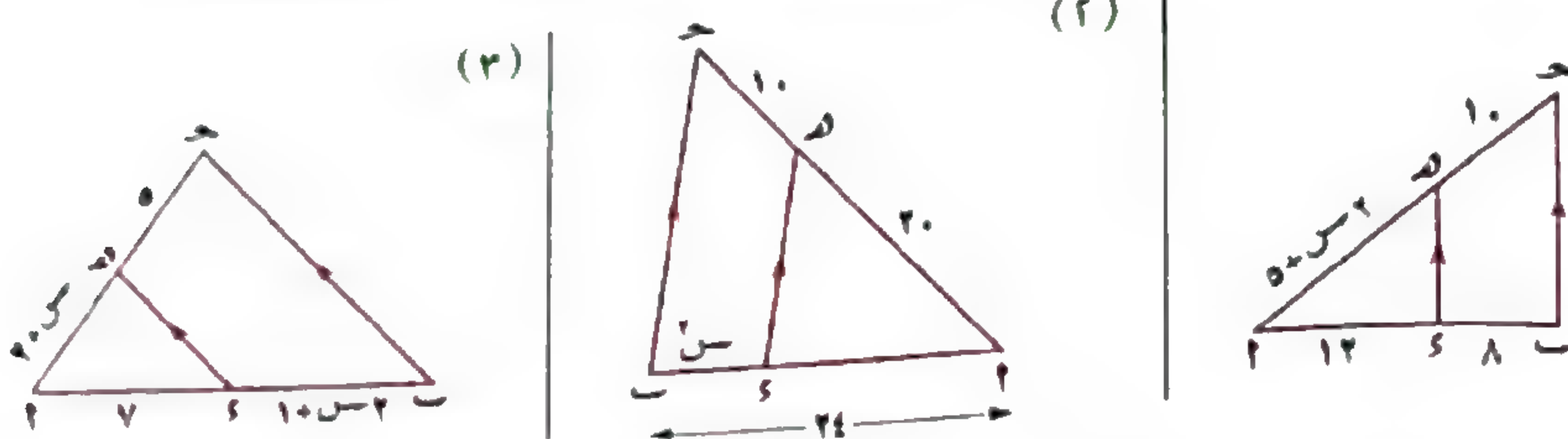
(أ) $\frac{5}{4}$ (ب) ١,٥

(ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{2}{4}$

٢ في كل من الأشكال التالية ، حدد ما إذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$:



في كل من الأشكال التالية : $\overline{DE} // \overline{BC}$ أوجد قيمة x العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

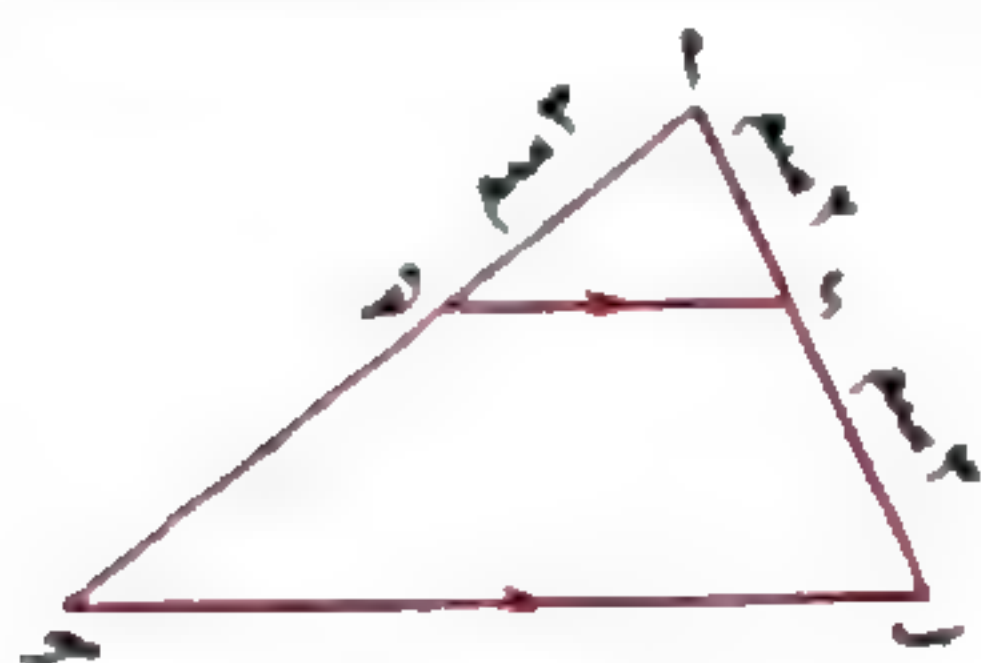


في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{DE} // \overline{BC}$

$AD = 10$ سم ، $DB = 20$ سم ، $EC = 8$ سم ، $BE = 12$ سم

أوجد : طول \overline{DE}



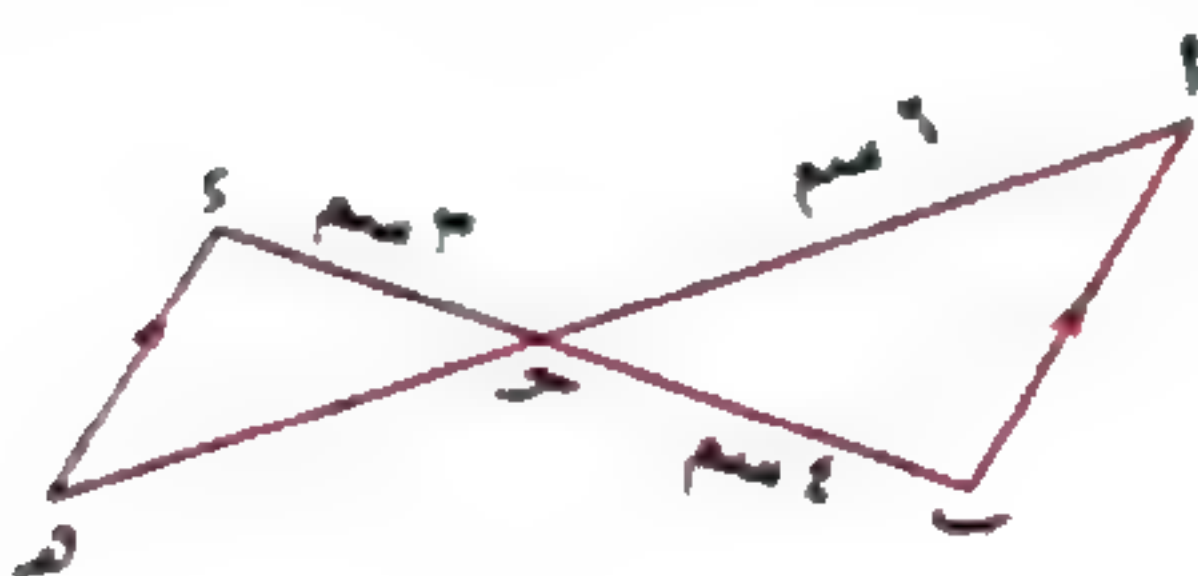
« ٤.٥ سم »

في الشكل المقابل :

$\overline{AB} // \overline{DE}$ ، $\{H\} = \overline{AB} \cap \overline{DE}$

$AD = 10$ سم ، $DB = 20$ سم ، $EC = 8$ سم ، $BE = 12$ سم

أوجد : طول \overline{DE}



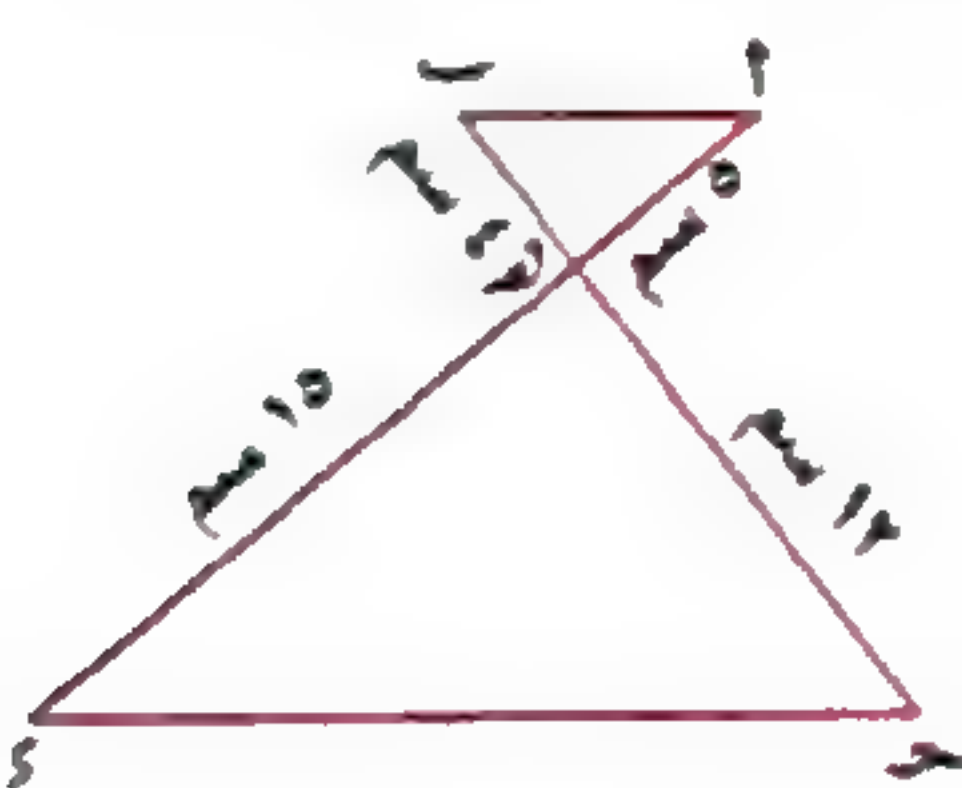
« ٤.٥ سم »

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $\{H\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ ، $AD = 10$ سم

$DB = 20$ سم ، $EC = 8$ سم ، $BE = 12$ سم

أثبت أن : $\overline{AB} // \overline{DE}$



في الشكل المقابل : $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $\{H\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ ، $AD = 10$ سم

$DB = 20$ سم ، $EC = 8$ سم ، $BE = 12$ سم

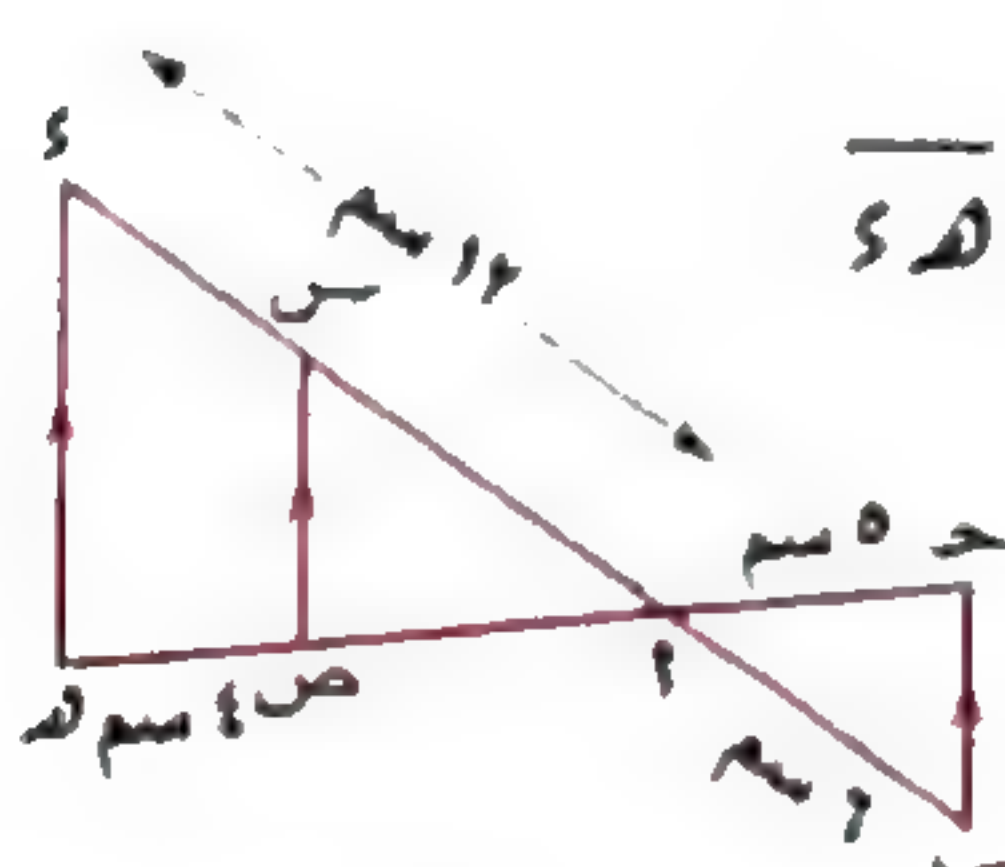
« ١٣.٥ سم »

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $\{H\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ ، $AD = 10$ سم

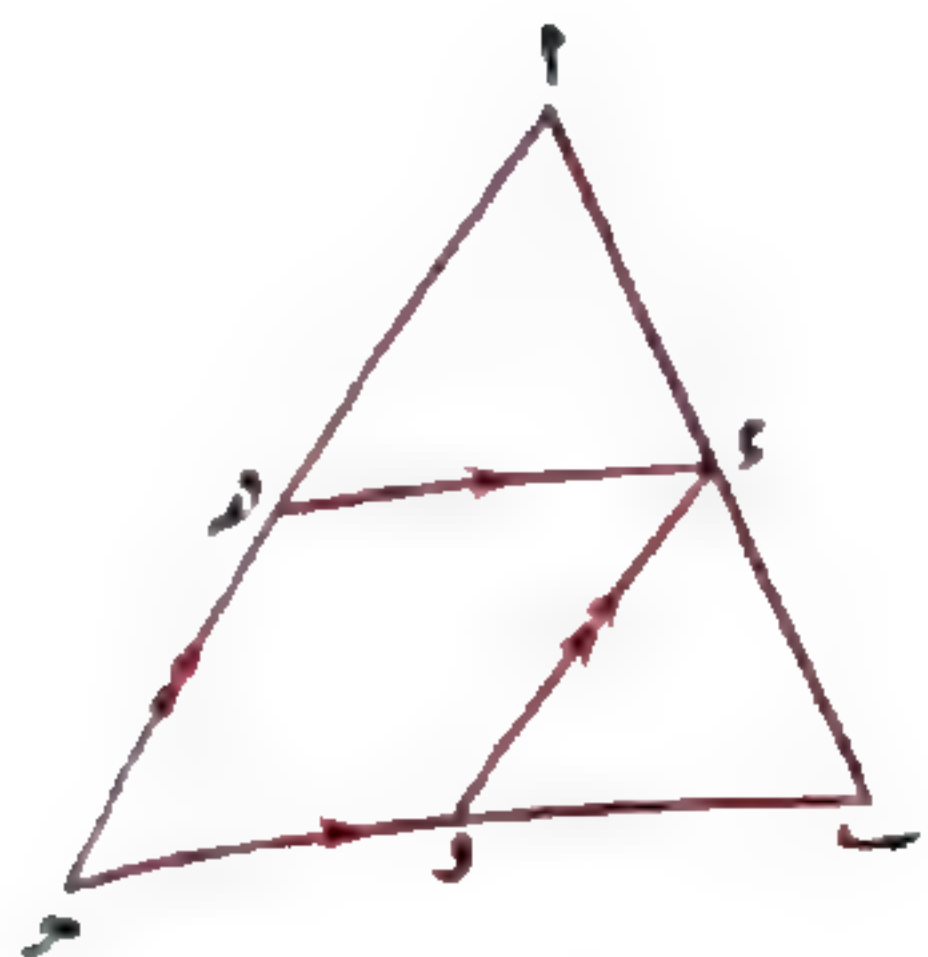
$DB = 20$ سم ، $EC = 8$ سم ، $BE = 12$ سم

أوجد : طول كل من \overline{AD} ، \overline{BC}



« ١٠ سم ، ٤.٨ سم »

استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة \cos (الأطوال بالسنتيمترات) :



$\psi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\lambda = \gamma$, $\epsilon = \delta$ (1)

$٣ = ع$ ، $٢ - س = ع$ ، $٥ = ح$ ، $س = م$ (٢)

$5 = 51$, $6 = 60$, $8 = 80$, $21 = 210$

$$12 = 2 + 10, \quad 5 + 7 = 12, \quad 5 = 12(4)$$

س ل = ٥,٦ سم ، م \exists س ع حيث س م = ٨,٤ سم أثبت أن : ل م // ص ع

۱۰ = ۶ ، ۸ = ۷ سم حدد ما إذا كان : $\overline{OM} // \overline{BC}$ فسر إجابتك.

15

م ۱ = ۲,۵ سم ، $\frac{1}{3}V = ۷$ سم ، م ح = ۲ سم

فاوجد : طول كل من $\overline{مء}$ ، $\overline{مب}$

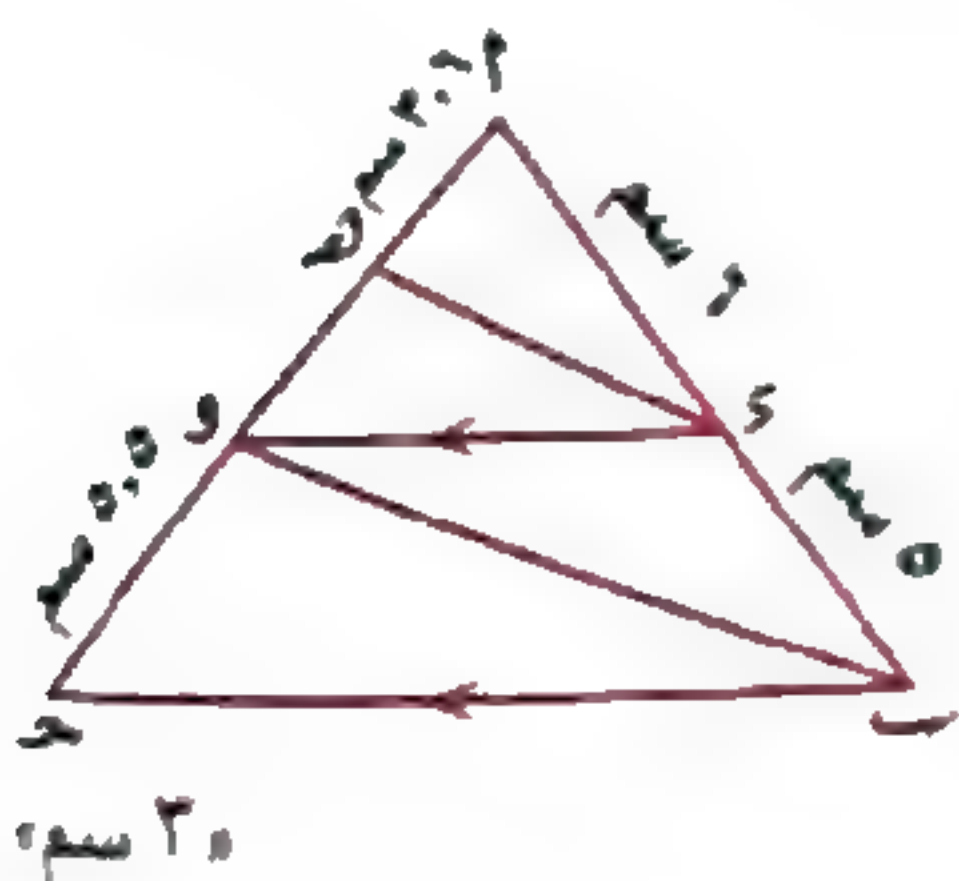
۱) $\frac{1}{2}$ سم ، ۲ سم ، ۳ سم



إذا كان: $\overline{60} // \overline{30}$ ، $\overline{60} = 6$ سم

س = ۵ سم ، ۲ = ۶ سم ، ۵ = ۵ سم

أوجد : طول \overline{MO} ثم أثبت أن : $\overline{MO} \parallel \overline{BO}$



34

۱۲ سم ، ۱۰ سم ، ۸ سم ، ۷ سم

أثبت أن : الشكل ٢ - ح د شبه منحرف.

10

٢-١-٢ مثلث قائم الزاوية في ١

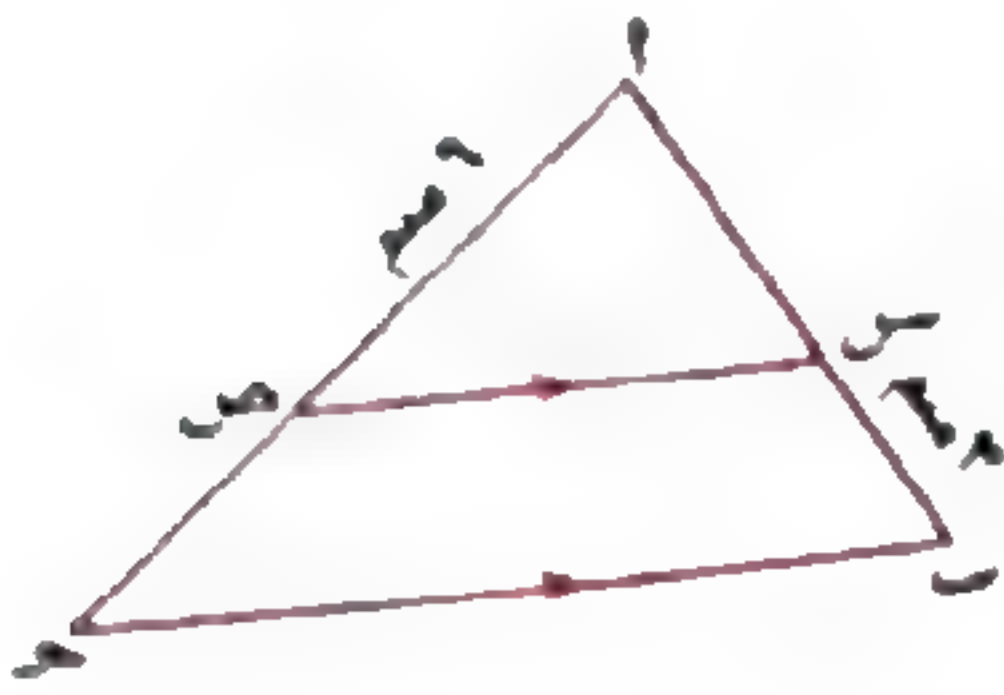
(١) أثبت أن : $\overline{OM} \parallel \overline{BC}$

(۲) أوجد : طول \overline{AB}



7-10

الدرس الاول



١.٥٠ سم ، ٤ سم .

في الشكل المقابل :
 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$: س ص // ح ح
 فإذا كان : $س = ٢$ سم ، $ص = ١$ سم ، ٦ سم
 وكان $\frac{٢}{٥} = \frac{١ + ص}{١ + ح}$
 فأوجد : طول كل من $أ س$ ، $ح ص$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$٢١ = ٢$ ، $٢ = ٤ - ح$ ، ٤ سم

فإن : $ح =$ سم

(١) ١٨

(ج) ٢٤

(٢) في الشكل المقابل :

$س =$ سم

(١) ٢

(ج) ٤

(٣) في الشكل المقابل :

$أ ح =$ سم

(١) ١٥

(ج) ١٨

(٤) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

فإن : $أ و \times ح =$

(١) ١

(ج) ٢

(٥) في الشكل المقابل :

إذا كانت $م$ هي نقطة تلاقي متوسطات $\triangle ABC$

فإن : $٢ س + ص =$ سم

(١) ٢

(ج) ٤

(ب) ٢٠

(د) ٢٥

(ب) ٣

(د) ٥

(ب) ١٦

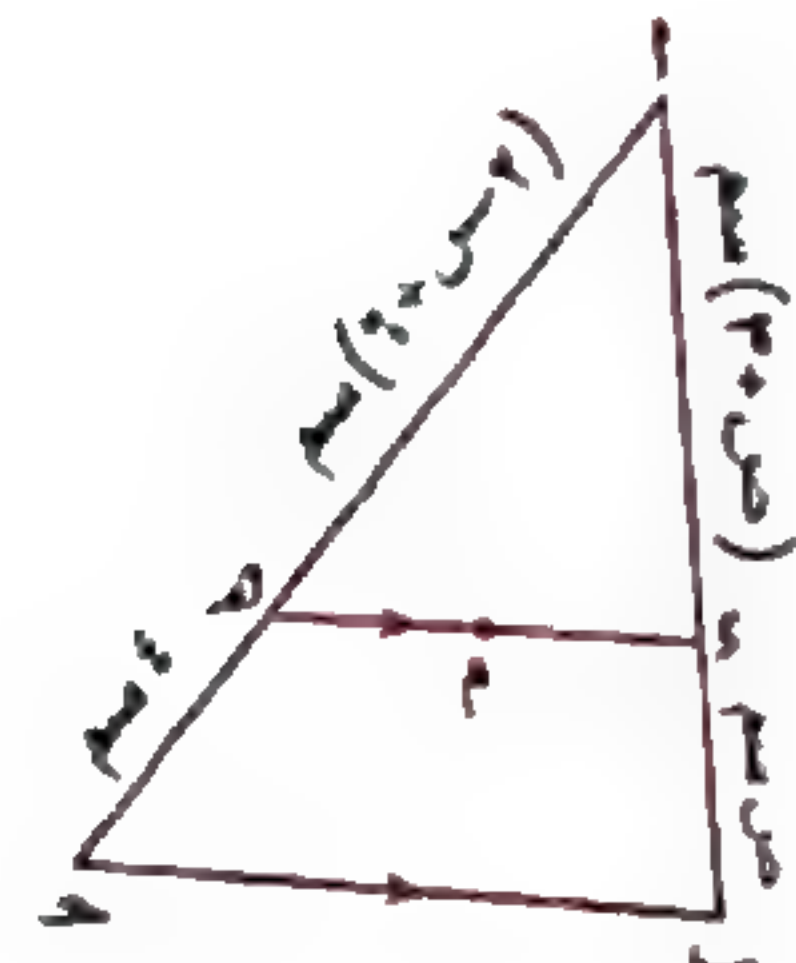
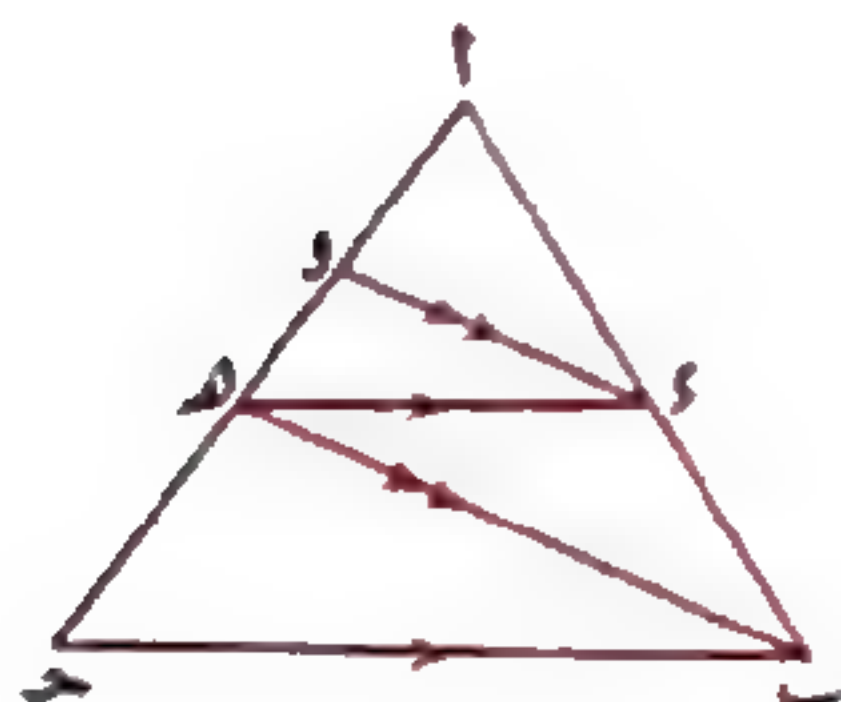
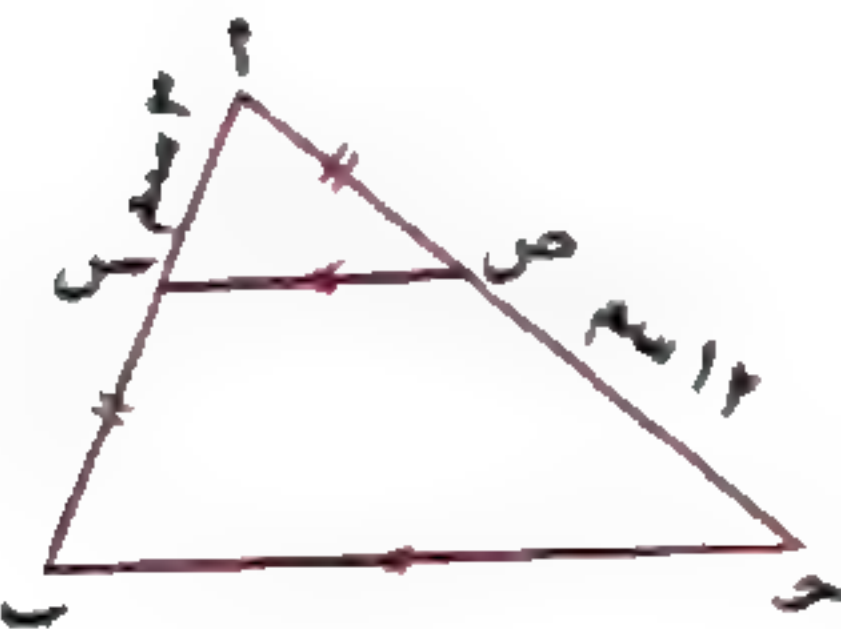
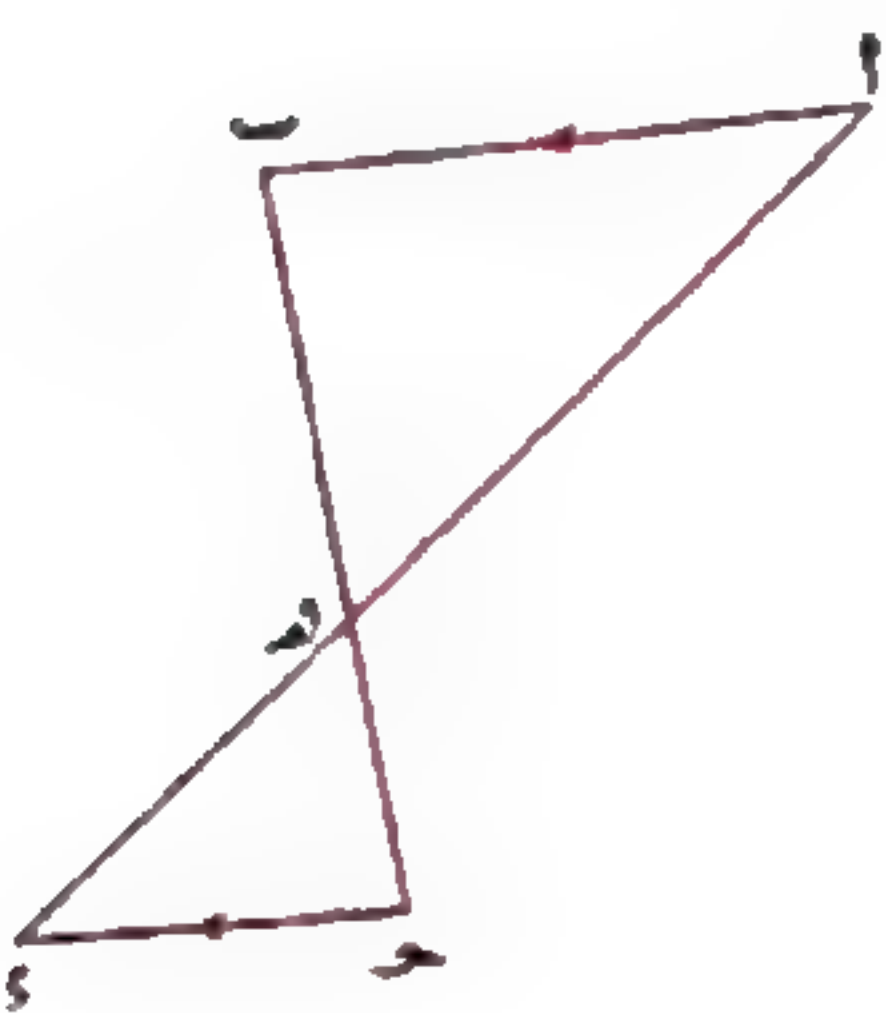
(د) ٢٠

(ب) ٢ (١)

(د) ١ (١) \times ح

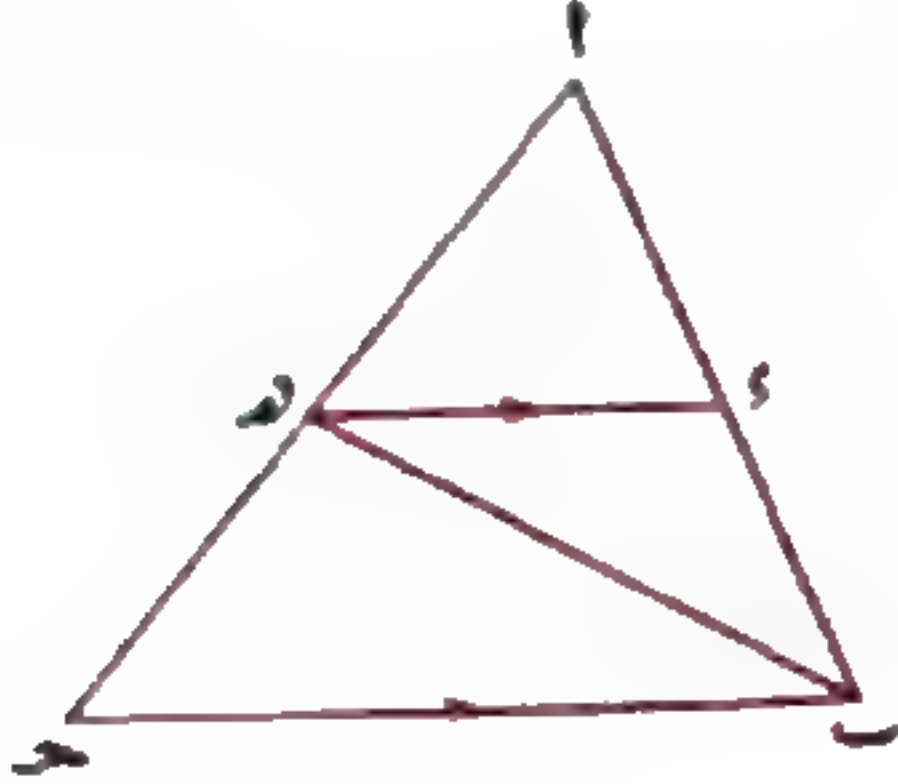
(ب) ٣

(د) ٥



٢٦ ا ب ح مثلث ، د منتصف ب ح ، م \in ا د ، رسم م ه // ا ب ويقطع ب ح في ه ، رسم م و // ا ح ويقطع ب ح في و أثبت أن : د منتصف ه و ، وإذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات المثلث ا ب ح فأثبت أن : ه و = $\frac{1}{3}$ ب ح

٢٧ في الشكل المقابل :



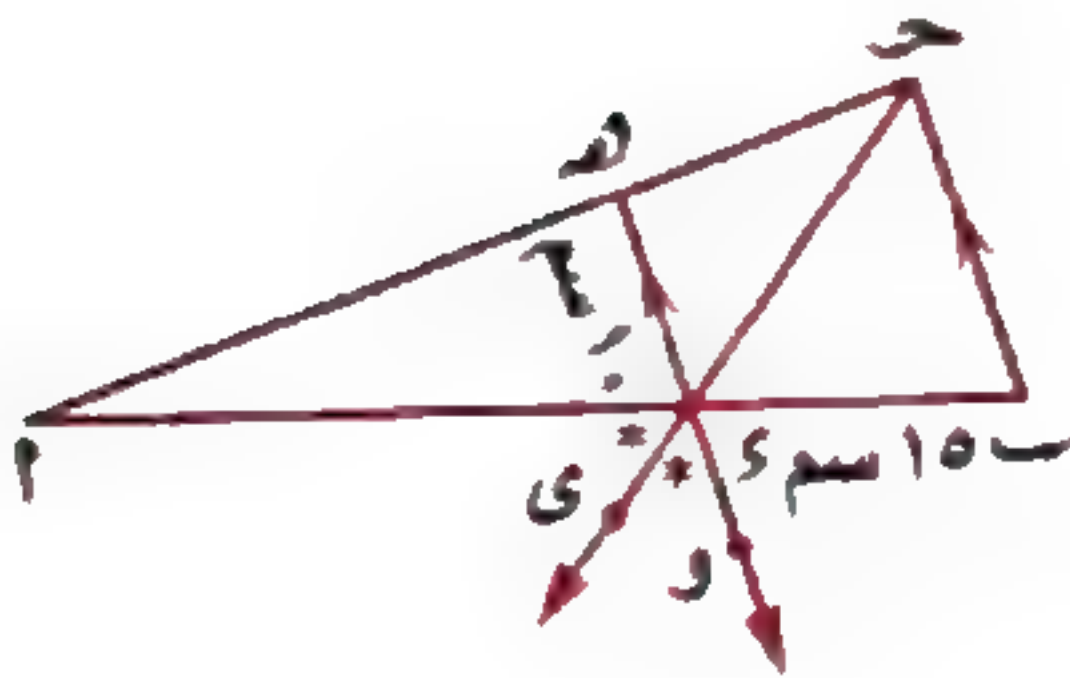
ا ب ح مثلث فيه : د ه // ب ح

أثبت أن : $\frac{\text{مساحة } \triangle ا د ه}{\text{مساحة } \triangle ا ب ح} = \frac{\text{مساحة } \triangle ا د ه}{\text{مساحة } \triangle ا ب ح}$

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

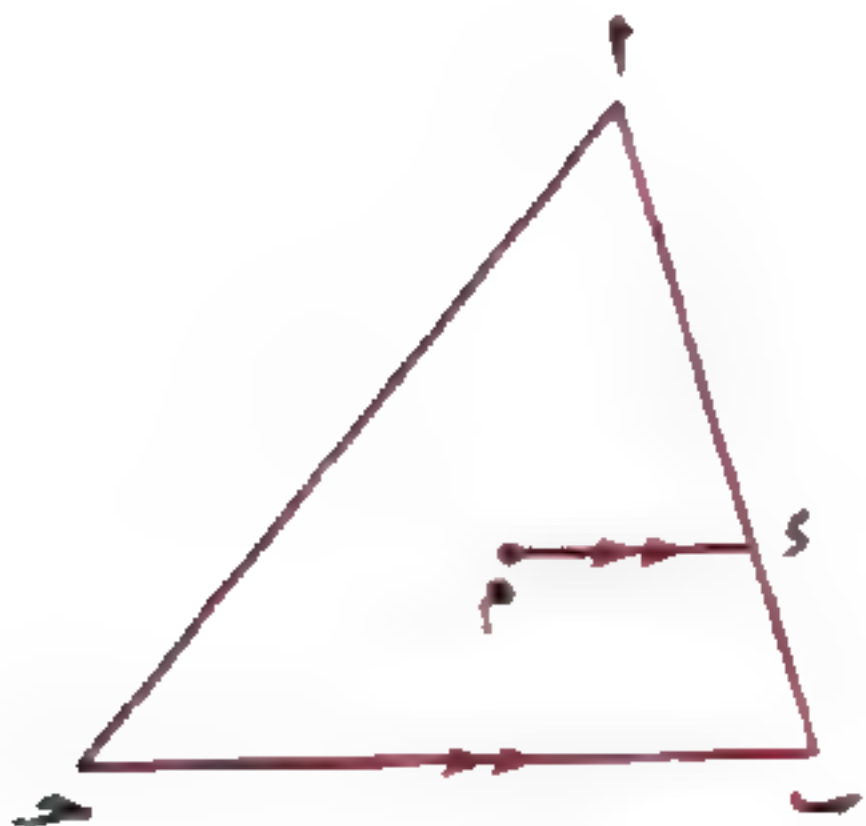
(١) في الشكل المقابل :



إذا كانت : د ه // ب ح ، $\frac{د ه}{ب ح} = \frac{د و}{و ح}$ ، فإن : د و = سم

- وكان : د ه = ١٠ سم ، ب ح = ١٥ سم فإن : د و = سم
- (أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (ج) ٣٠ (د) ٤٥

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات المثلث ا ب ح

، وكانت : د م // ب ح فإن : $\frac{د م}{ب ح} = \frac{م ح}{ب ح}$ ،

- (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٣) في الشكل المقابل :

إذا كانت : د و // ب ح لإثبات أن د ه // ب ح يكون كافياً

الحصول على

(ب) $ا د \times و ح = ا ح \times د ه$ فقط.

(أ) $\frac{د و}{ب ح} = \frac{د ه}{ب ح}$ فقط.

(د) لا شيء مما سبق.

(ج) (أ) ، (ب) معاً.

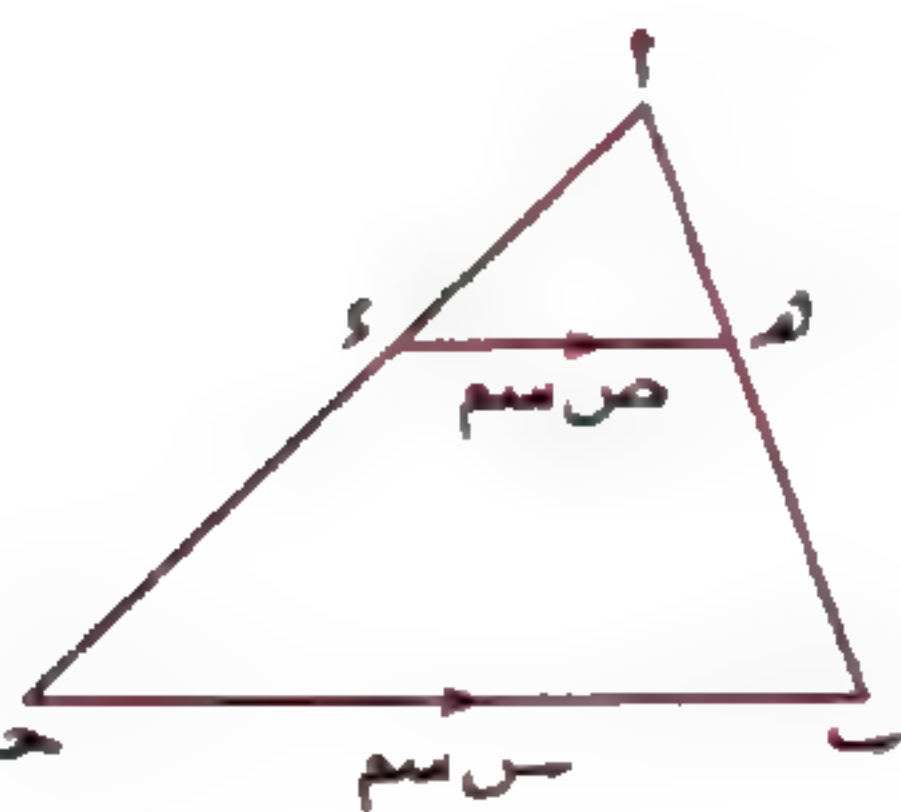
(٤) في الشكل المقابل :

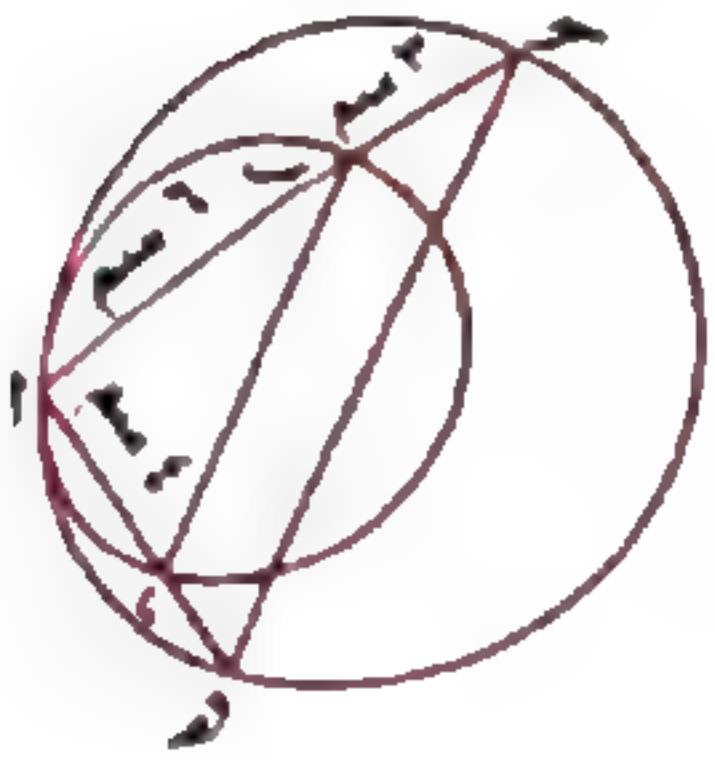
إذا كانت : د ه // ب ح ، د ه = ح ص ، ب ح = س س

وكان : $٢ س - ٣ ح - ٥ ص = ٠$ وكان : ا ب = ١٠ سم

فإن : د ه = سم

- (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

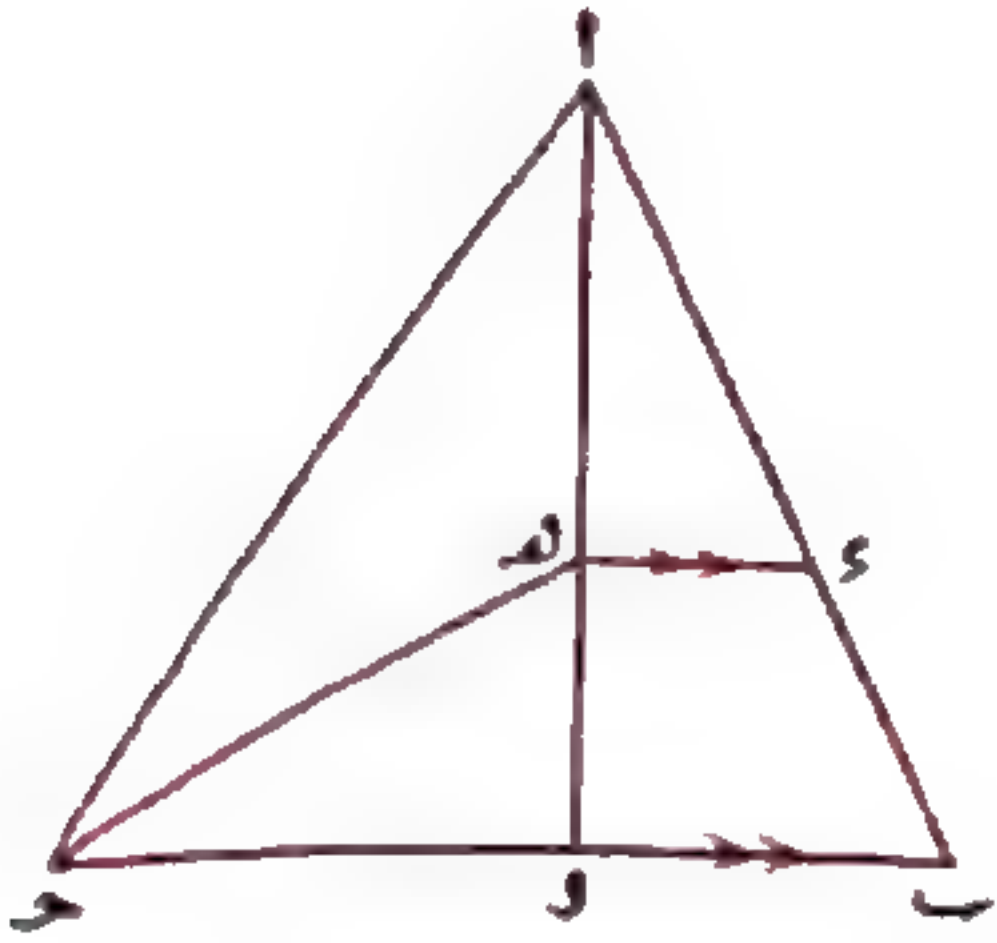




(٥) في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الداخل في P فإن : $ME = \dots \dots \dots$ سم

- (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٣.٥ (د) ٤



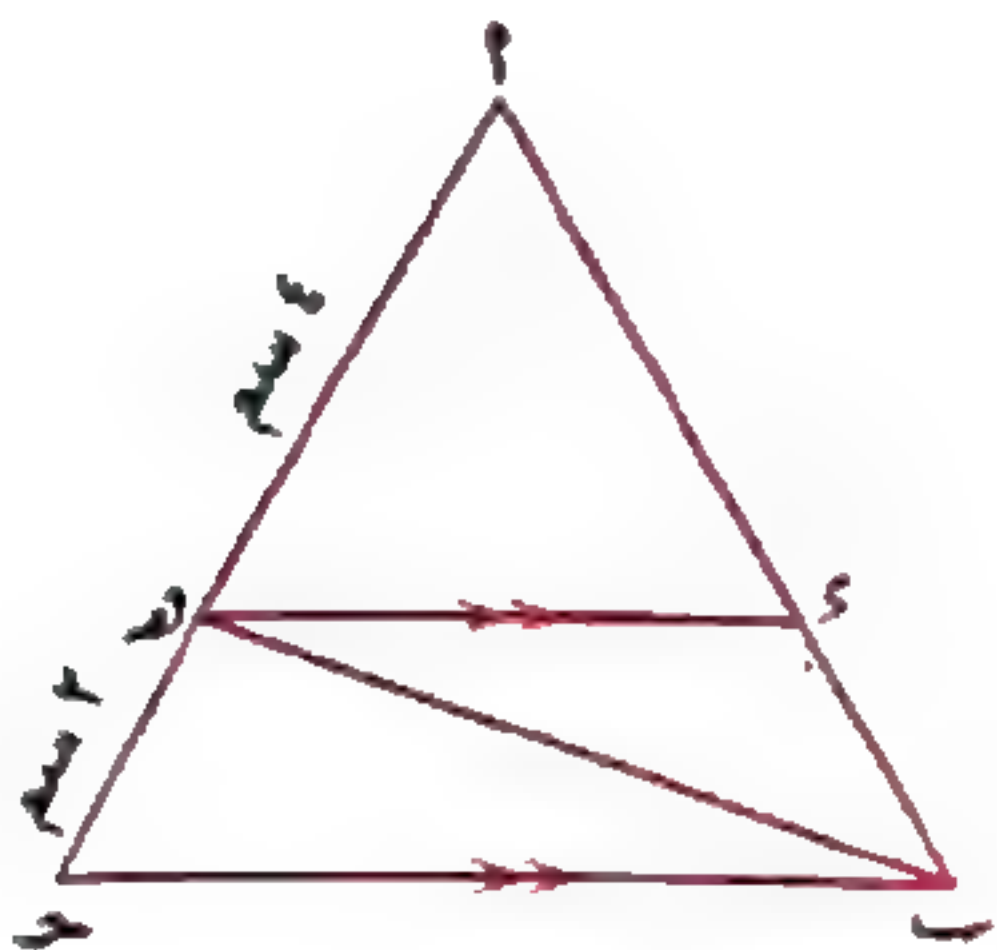
(٦) في الشكل المقابل :

إذا كانت : مساحة $(\triangle ADE) = ١٥$ سم^٢

، مساحة $(\triangle DOE) = ٩$ سم^٢ ، $AB = ١٦$ سم

فإن : $AE = \dots \dots \dots$ سم

- (أ) ٦ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣



(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $DE \parallel BC$

وكانت مساحة $(\triangle ABC) = ٩$ سم^٢

فإن : مساحة $(\triangle ADE) = \dots \dots \dots$ سم^٢

- (أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٨ (د) ٢٧

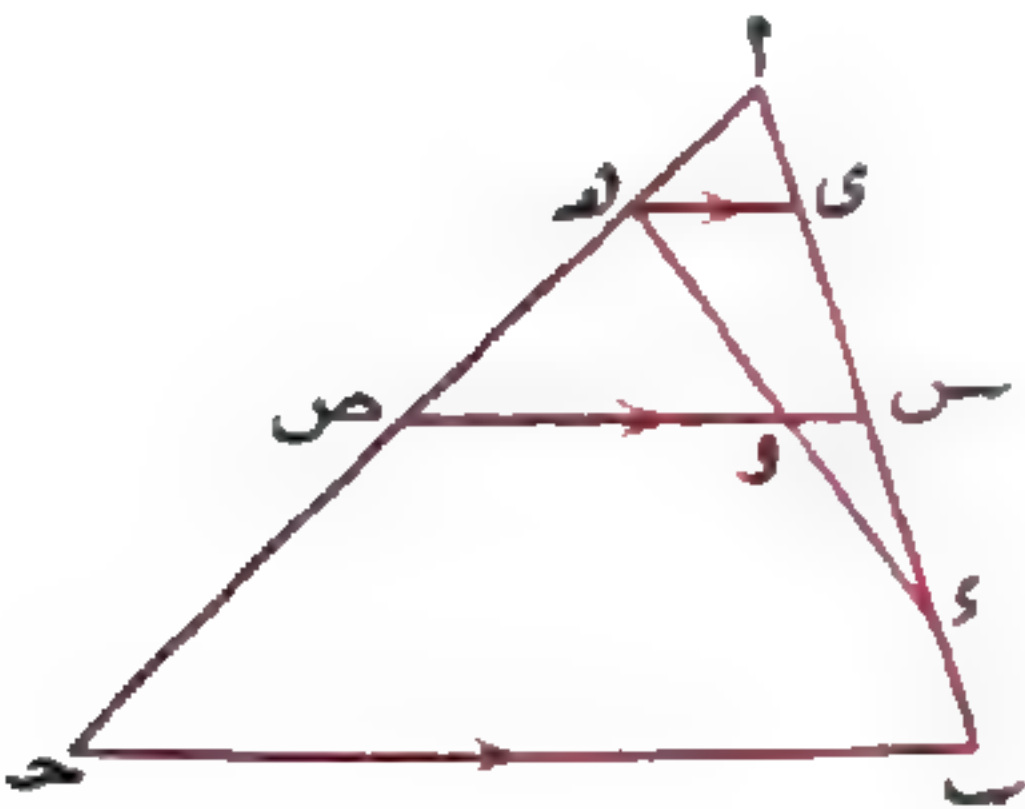
٢٩ في الشكل المقابل :

AB مثلث ، S منتصف AB

، S منتصف AC ، $D \in BC$ ، $E \in AD$ بحيث $\frac{AE}{ED} = \frac{AS}{SD}$

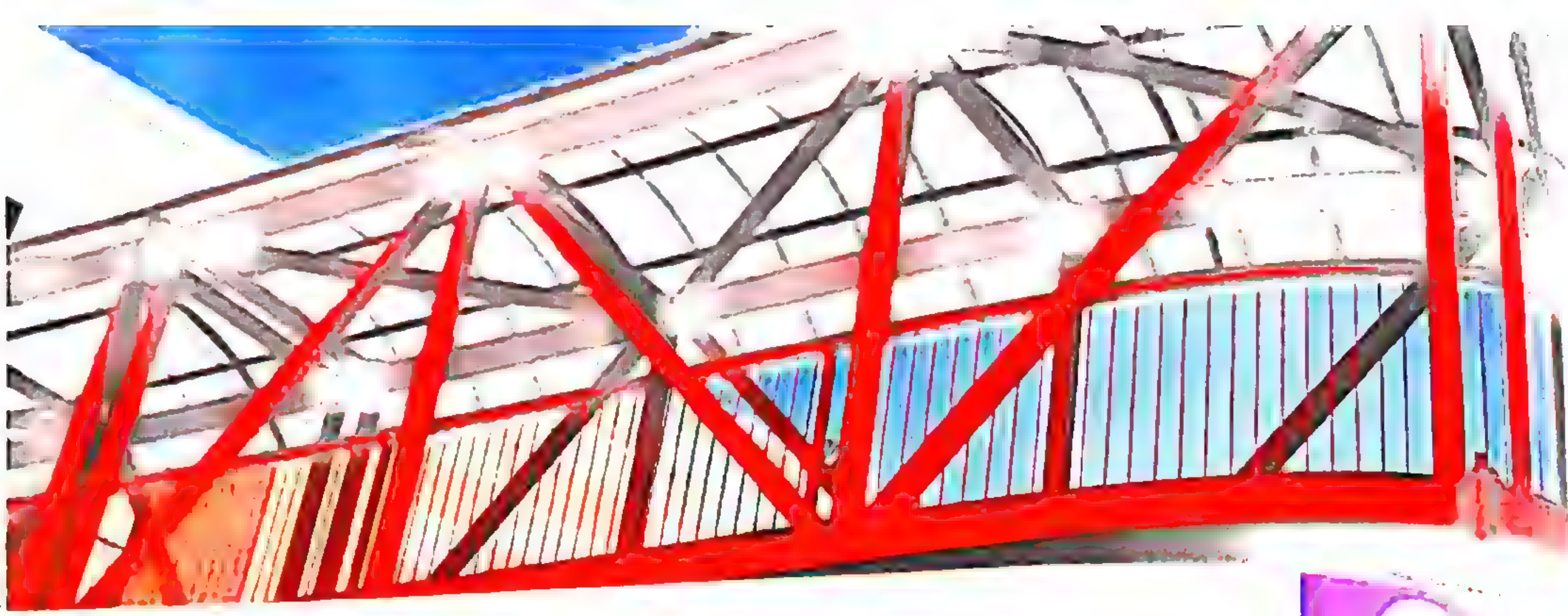
، $DE \parallel SC \parallel AB$ ،

أثبت أن : D منتصف BC



٣٠ AB مستطيل تقاطع قطراه في M ، M منتصف AC ، و S منتصف BC ، رسم DE يقطع AB

في S ، ورسم DE يقطع BC في V أثبت أن : $SV \parallel AC$



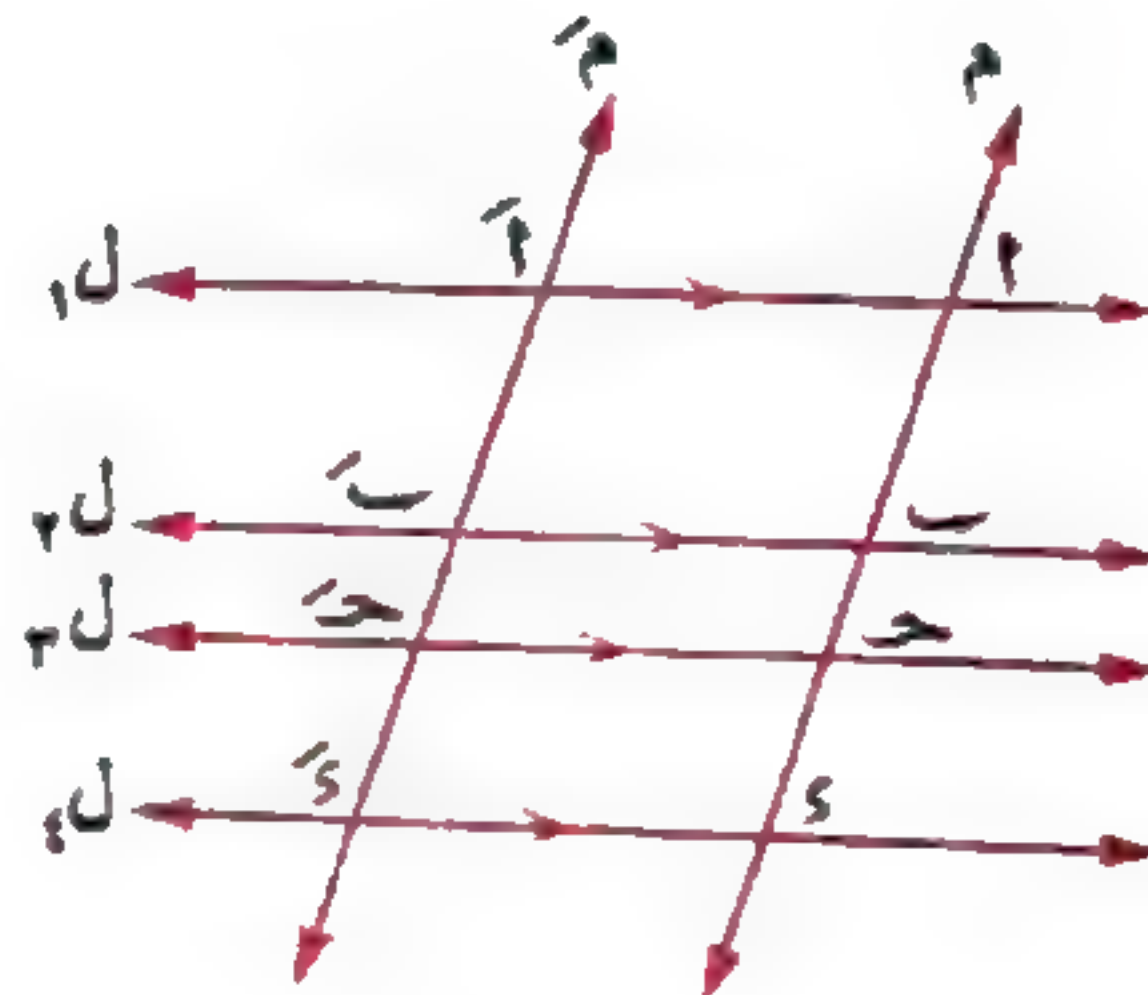
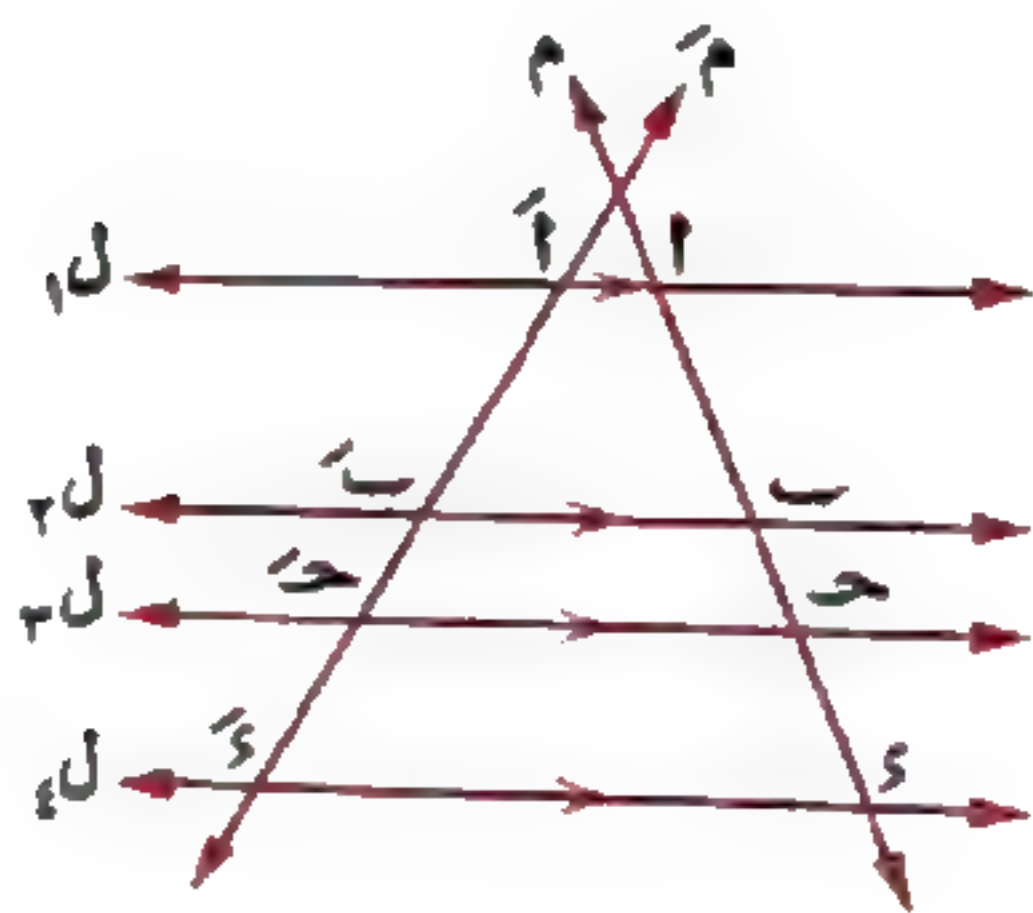
2

نظرية تاليس

(نظرية تاليس العامة)

نظرية ٢

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمتان متوازيتان فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

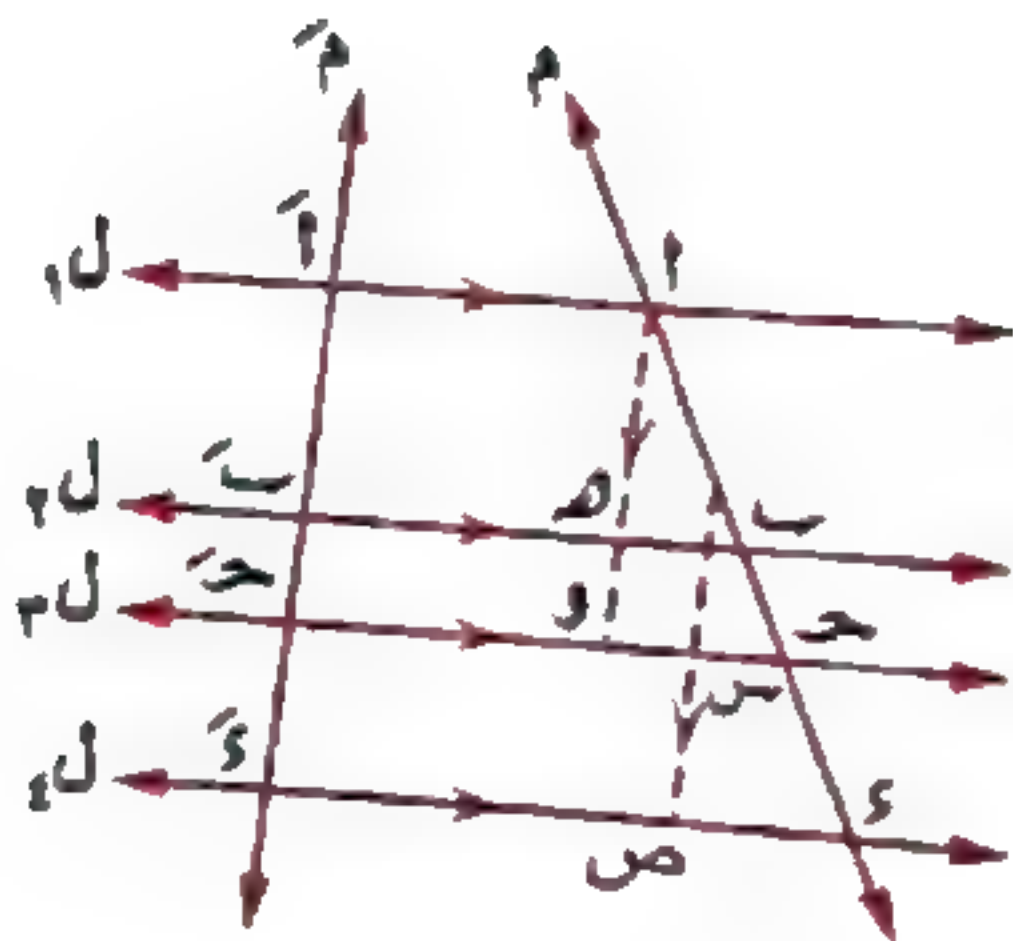


ففي الشكلين السابقين :

إذا كان : $ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤$ ، $م$ ، $ل$ قاطعين لهم

$$\text{فإن : } \frac{أ}{أ١} = \frac{ب}{ب١} = \frac{ج}{ج١} = \frac{د}{د١}$$

وفيما يلي إثبات صحة هذه النظرية :



المعطيات ، $ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤$ ، $م$ ، $ل$ قاطعان لهم

إثبات أن : $أ : ب : ج : د = أ١ : ب١ : ج١ : د١$

ارسم $أو // م$ ، ويقطع $ل٢$ في $هـ$ ، $ل٣$ في $و$

، $ص // م$ ، ويقطع $ل٢$ في $س$ ، $ل٣$ في $ص$

المعطيات ،
المطلوب ،
الفصل

البرهان

$$\overline{AA'} // \overline{BB'}, \overline{BB'} // \overline{CC'} :$$

$\therefore AA' // BB' // CC'$ ويكون : $AA' = BB' = CC'$

بالمثل : $BB' = CC' = AA'$ ، $BB' = CC' = AA'$ ، $BB' = CC' = AA'$

$$\text{في } \triangle ABC : \therefore \overline{AA'} // \overline{BB'} \therefore \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BC}$$

(إبدال الوسطين) (١)

$$\text{ويكون : } \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BC}, \frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{BC}$$

بالمثل $\triangle ABC$: $BB' = CC'$

(إبدال الوسطين) (٢)

$$\therefore \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BC}, \frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{BC}$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BC} = \frac{BB'}{CC'}$

(وهو المطلوب)

$$\therefore AA' : BB' : CC' = AB : BC : CA$$

في الشكل السابق لاحظ أن :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BC} \quad \bullet \quad \frac{BB'}{CC'} = \frac{BC}{CA} \quad \bullet \quad \frac{CC'}{AA'} = \frac{CA}{AB}$$

فمثلاً في الشكل المقابل :

إذا كان : $AA' // BB' // CC'$

وكان : $AA' = 24$ سم ، $BB' = 16$ سم

، $CC' = 20$ سم ، $AA' = 35$ سم

$$\text{فإن : } \frac{AA'}{BB'} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{CC'}{AA'}$$

أي أن $\frac{24}{16} = \frac{16}{20} = \frac{20}{35}$ ومنها :

$$BB' = \frac{24 \times 20}{16} = 30 \text{ سم ، } CC' = \frac{35 \times 16}{20} = 28 \text{ سم}$$

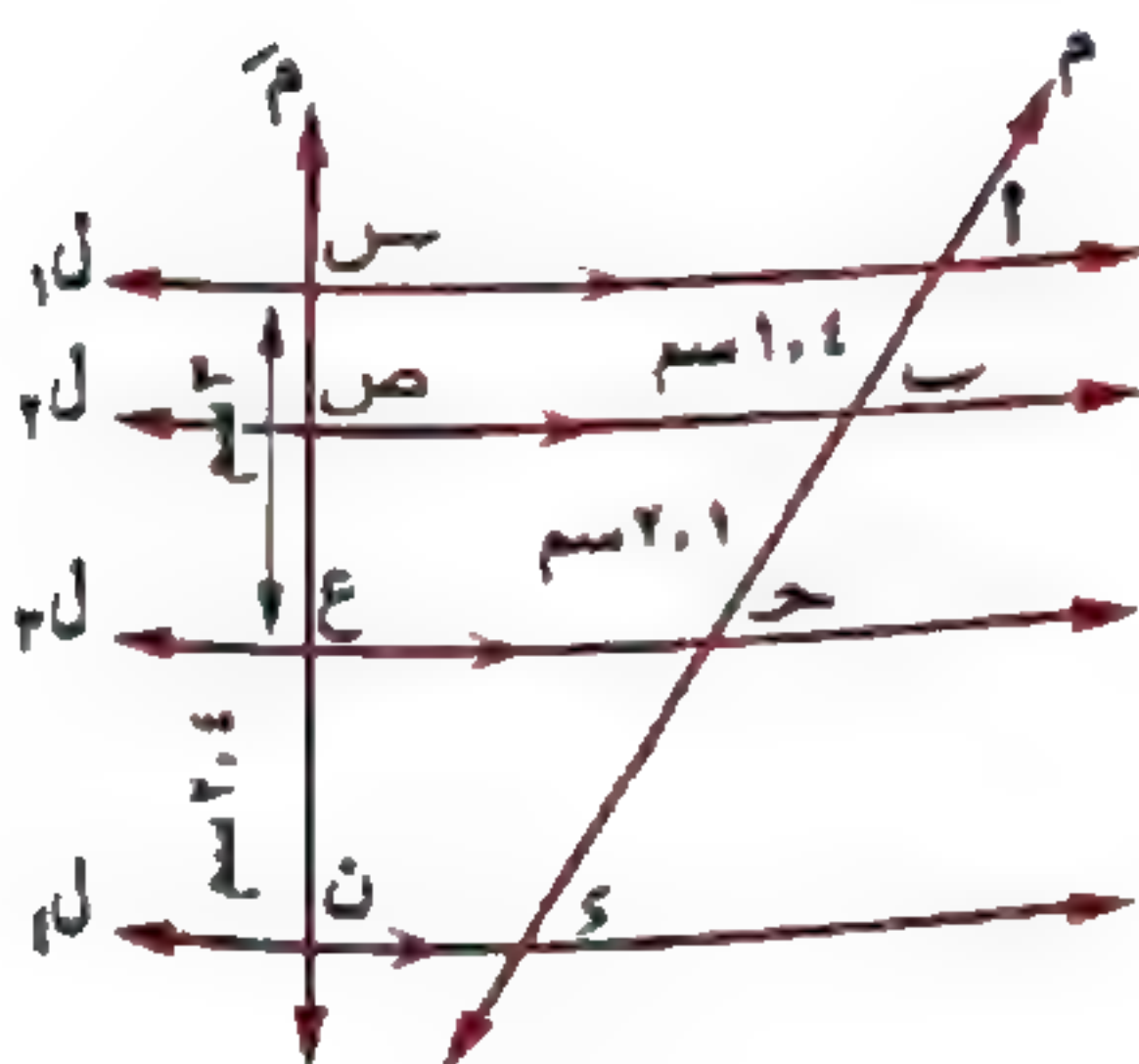
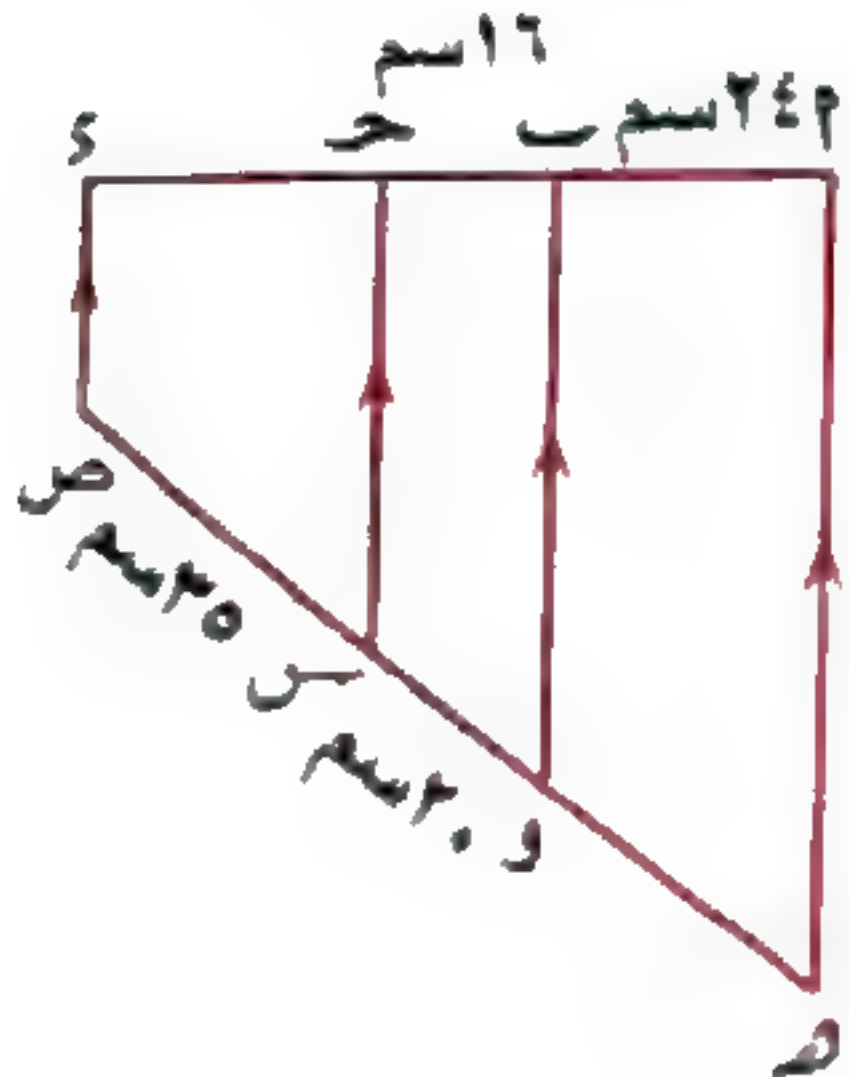
مثال ١

في الشكل المقابل :

$AA' // BB' // CC' // DD'$ ، $AA' = 10$ سم ، $BB' = 12$ سم ، $CC' = 14$ سم ، $DD' = 16$ سم

استخدم الأبعاد الموضحة في الشكل لحساب :

طول كل من AA' ، BB' ، CC' ، DD'



∴ $ل // ل // ل // ل // ل$ ، $م$ ، $م$ قاطعان لهم.

$$\therefore \frac{أ}{س ص} = \frac{ح د}{ع ن} = \frac{أ ح}{س ع}$$

$$\therefore \frac{3,5}{3} = \frac{2,1 + 1,4}{3} = \frac{ح د}{2,4} = \frac{1,4}{س ص}$$

$$\therefore س ص = \frac{3 \times 1,4}{3,5} = 1,2 \text{ سم}$$

$$ح د = \frac{3,5 \times 2,4}{3} = 2,8 \text{ سم}$$

(المطلوب أولاً)

(المطلوب ثانياً)

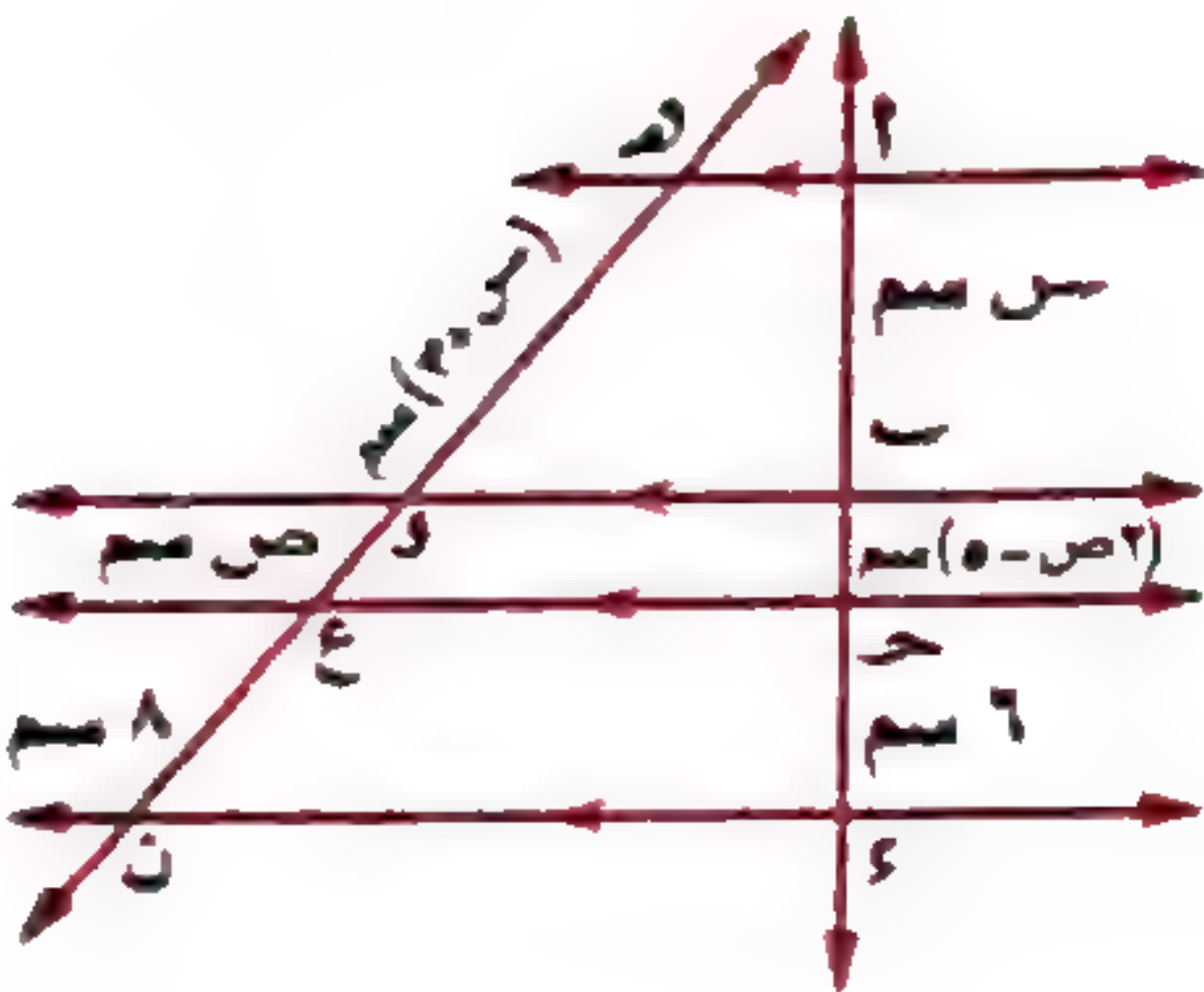
مثال ٢

في الشكل المقابل :

إذا كان : $أه // بو // حو // دن$

احسب قيمة كل من $س$ ، $ص$

العددية علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.



الحل

∴ $أه // بو // حو // دن$ ، $أه$ ، $أه$ قاطعان لهم.

$$\therefore \frac{أه}{س ص} = \frac{أ ح}{و ع} = \frac{أ ب}{د ن}$$

$$\therefore س = 9$$

$$\therefore 8 = س = 6 + س = 18$$

$$\therefore 8 = س = 6 + (س + 3)$$

(وهو المطلوب)

$$\therefore ص = 4$$

$$\therefore 6 = ص = 16 - ص = 40$$

$$6 = ص = 8 = (2 - ص + 5)$$

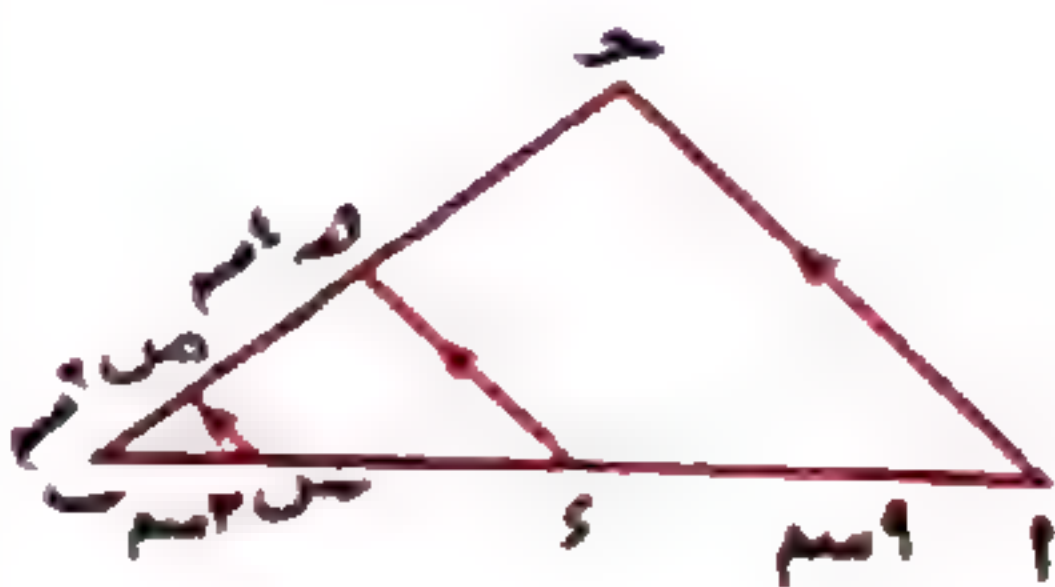
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

أب ح مثلث ، $أه // بو // حو$ ، $أه = 9$ سم

، $س ب = 2$ سم ، $ب ح = 2$ سم ، $أه = 4$ سم

أوجد : $أه$ ، $س$



الحل

$$\therefore \overline{أ} // \overline{ب} // \overline{د} // \overline{و} // \overline{م}$$

$$\therefore \overline{أ} = \overline{ب} = \overline{د} = \overline{و} = \overline{م}$$

$$\therefore \overline{أ} - \overline{ب} - \overline{د} = 6 = 0$$

$$\therefore \overline{أ} = 2، \overline{ب} = 3$$

$$، \text{عند } \overline{ب} = 2 : \therefore \overline{ب} = 2 \text{ سم}$$

$$، \text{عند } \overline{ب} = 3 : \therefore \overline{ب} = 7 \text{ سم}$$

$$، \therefore \overline{ب} = \overline{و}$$

$$\therefore \text{عند } \overline{ب} = 2 \text{ سم} : \therefore \overline{ب} - \overline{و} = 2 = 2 \text{ ومنها } \overline{و} = 2$$

$$، \text{عند } \overline{ب} = 7 \text{ سم} : \therefore \overline{ب} - \overline{و} = 7 = 2 \text{ ومنها } \overline{و} = 5، 4$$

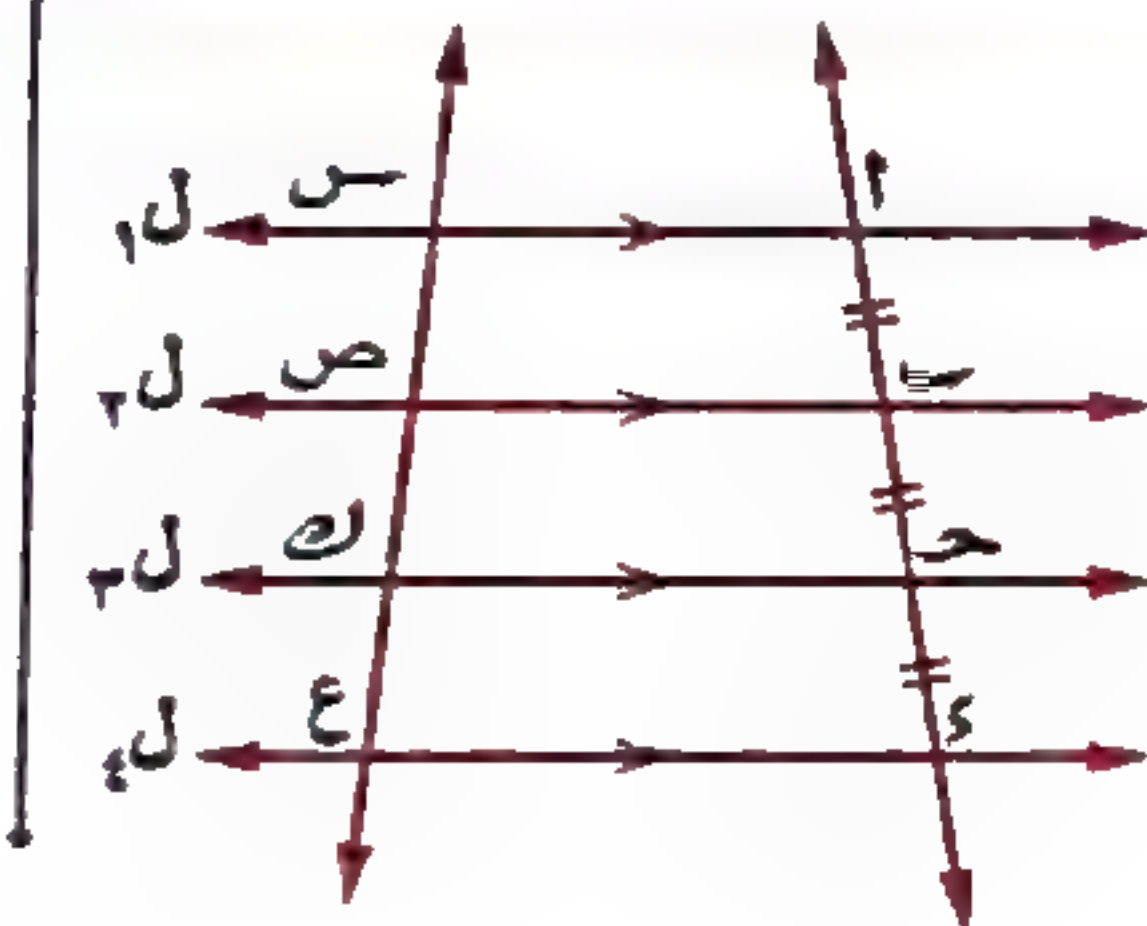
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ} = 6$ سم

أوجد : طول $\overline{و}$



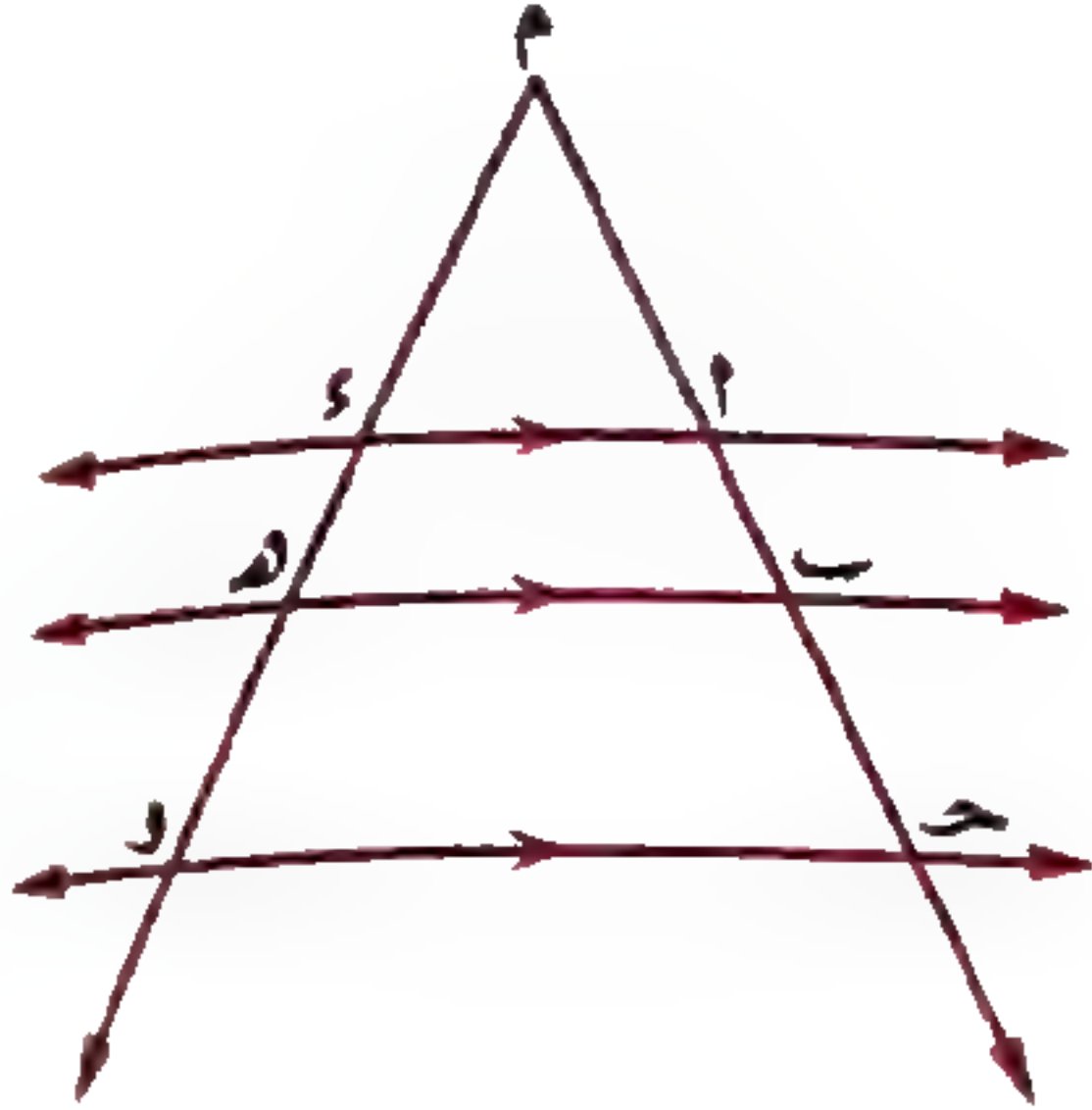


على نظرية تاليس



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل :



$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{a}{b} \quad (4)$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{c}{d} \quad (6)$$

$$\frac{a}{\dots} = \frac{e}{m} \quad (8)$$

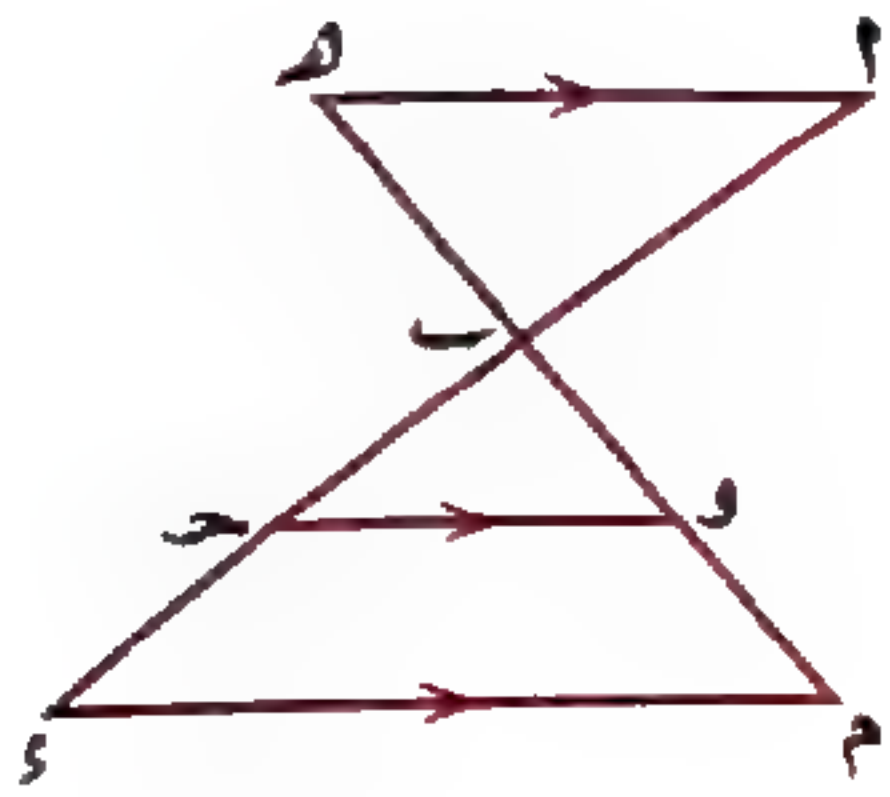
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (3)$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{c}{d} \quad (5)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (7)$$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) في الشكل المقابل :

$$a : b = c : d = \dots$$

$$(b) \quad a : b = c : d = e : f$$

$$(d) \quad a : b = c : d = e : f$$

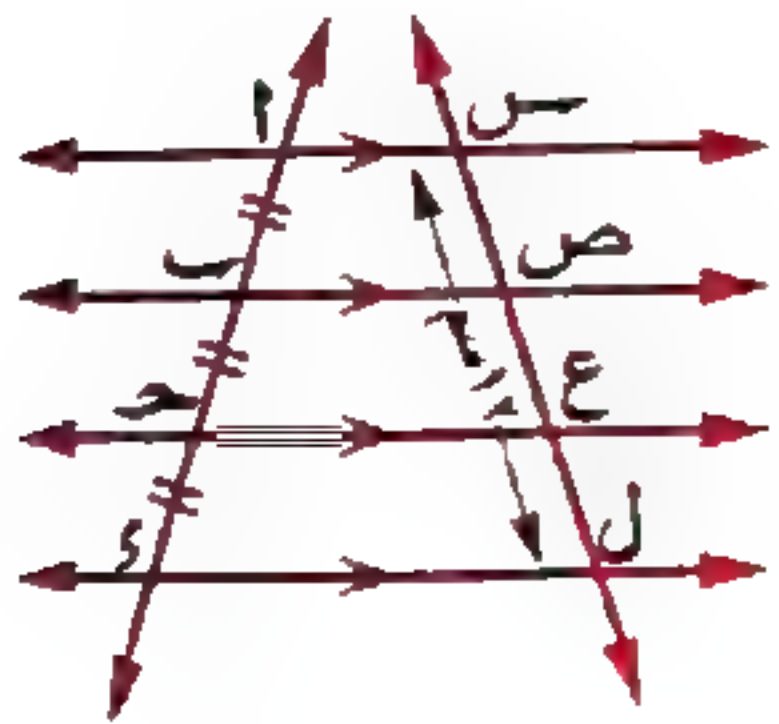
$$(i) \quad a : b = c : d = e : f$$

$$(j) \quad a : b = c : d = e : f$$

(٢) في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } a = b = c = d = e = f, \text{ سم } l = 12 \text{ سم}$$

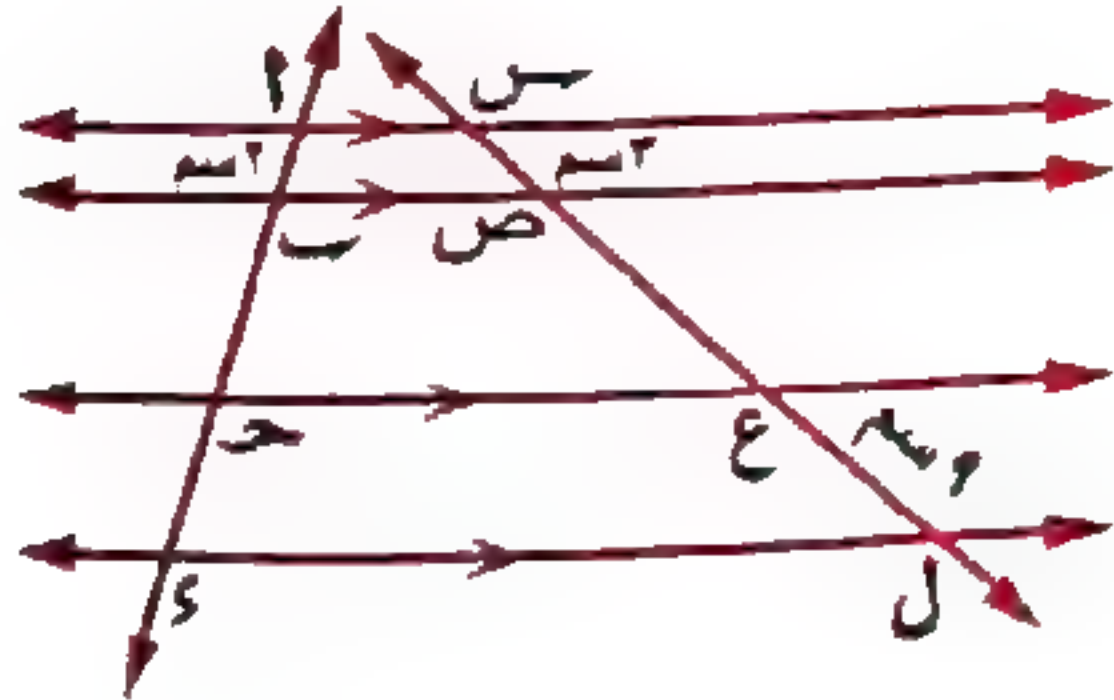
$$\text{فإن : } a : b = c : d = \dots$$



$$(i) \quad 4 \text{ سم} \quad (b) \quad 3 \text{ سم} \quad (j) \quad 2 \text{ سم} \quad (d) \quad 1 \text{ سم}$$

(٣) في الشكل المقابل :

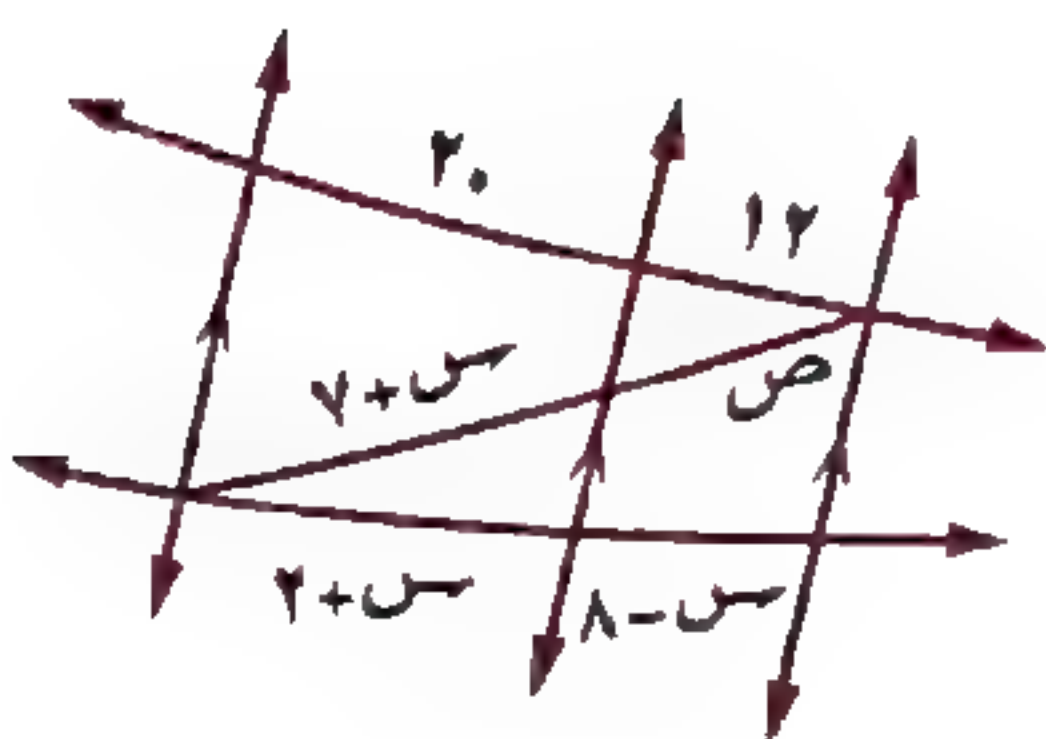
$$a : b = c : d = \dots \text{ سم}$$



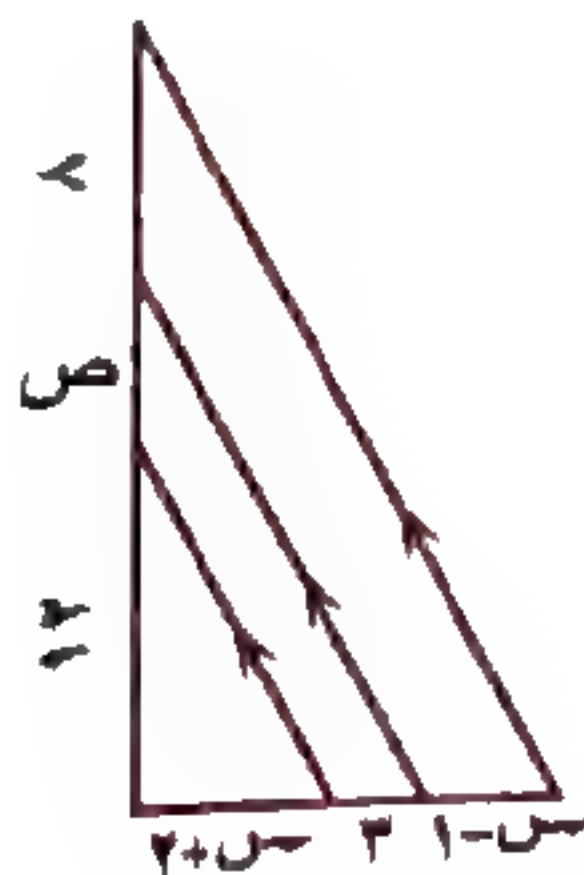
$$(i) \quad 12 \quad (b) \quad 6 \quad (j) \quad 14 \quad (d) \quad 5$$

٣ في كل من الأشكال التالية ، احسب قيم س ، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

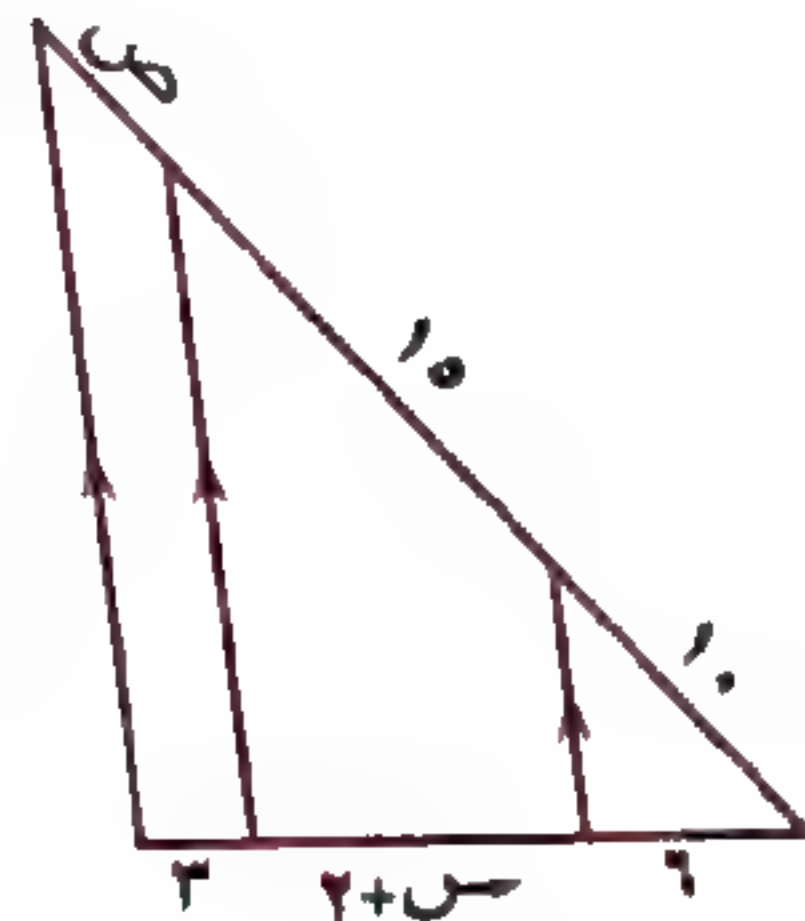
(٣)

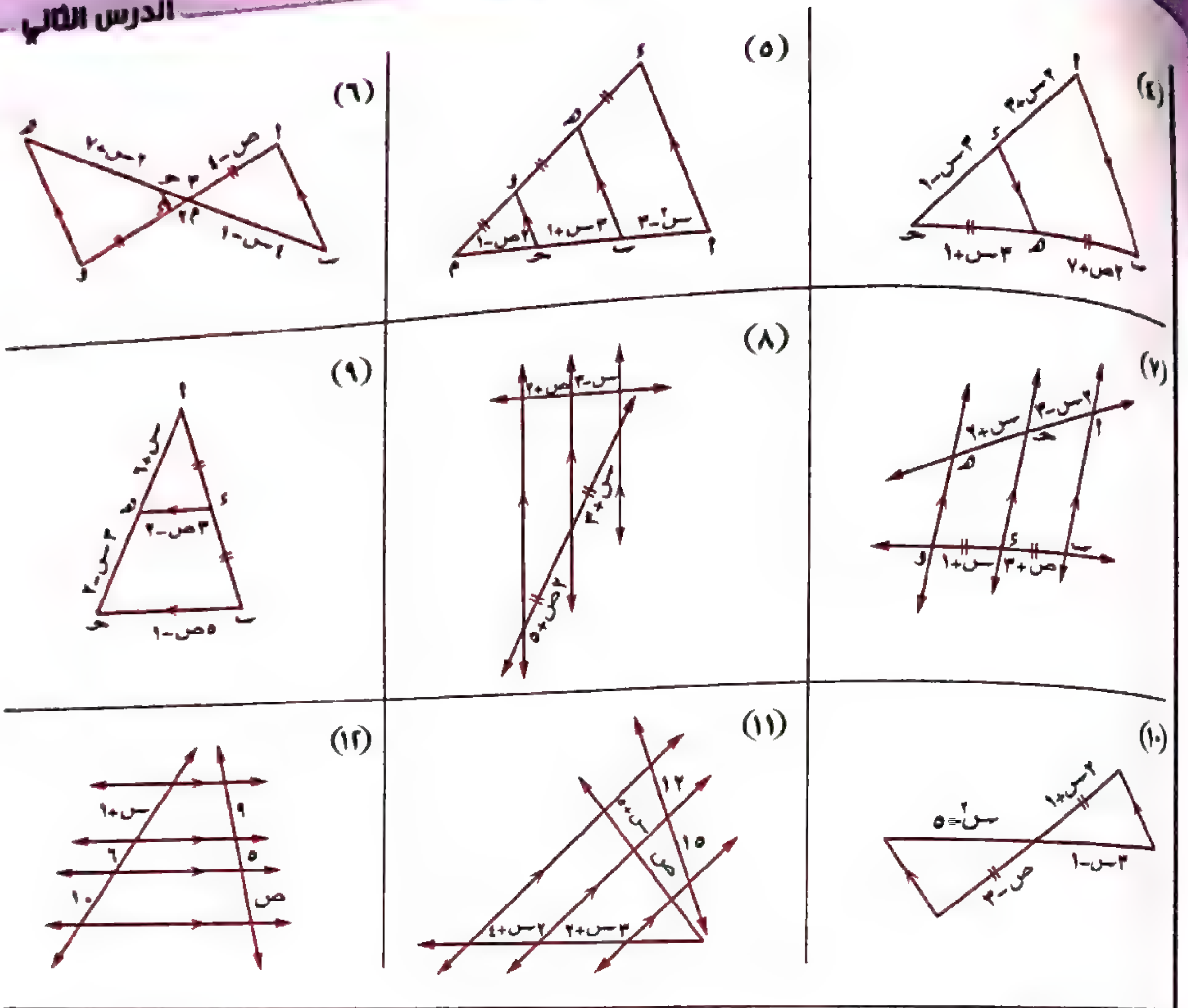


(٢)



(١)





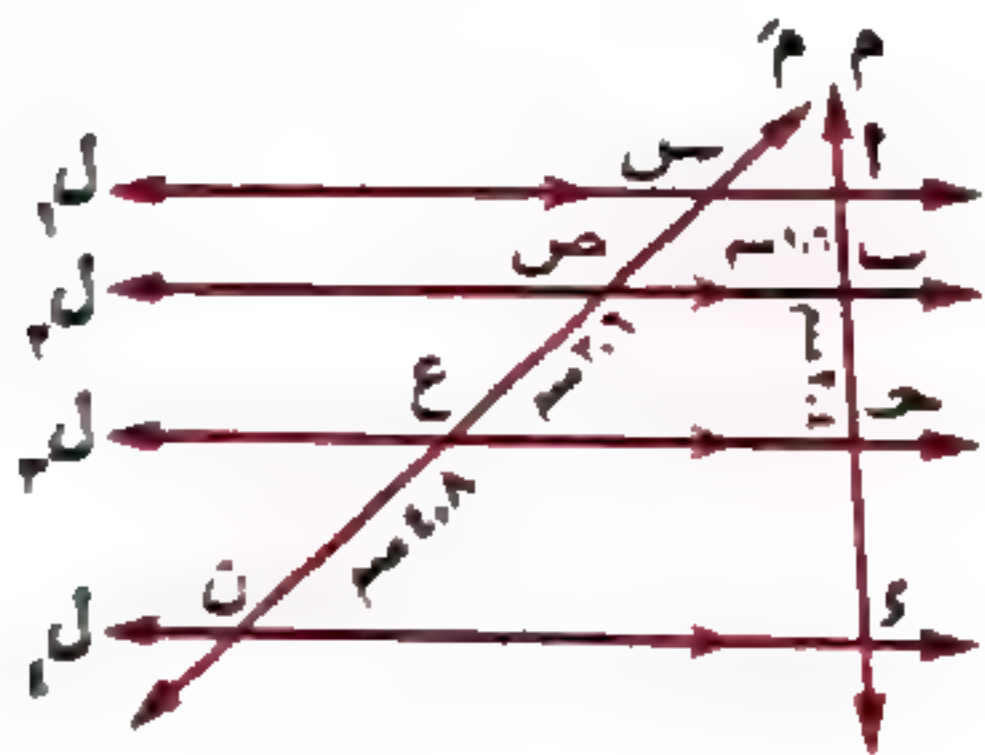
٤ في الشكل المقابل :

$l // m // n // o // p // q$ ، m ، n مستقيمان قاطعان لهم

فإذا كان : $a = b = 1$ سم ، $c = d = 2$ سم

، $e = f = 3$ سم ، $g = h = 4$ سم

فاحسب : طول كل من mn ، op



سم ٢ ، ٤ ، ٢ ، ٢ سم

٥ في الشكل المقابل :

إذا كان : $a // b // c // d // e$ وكان : $a = b = 1$ سم ، $c = d = 2$ سم

، $e = f = 3$ سم ، $g = h = 4$ سم

أوجد : طول كل من ac ، bd



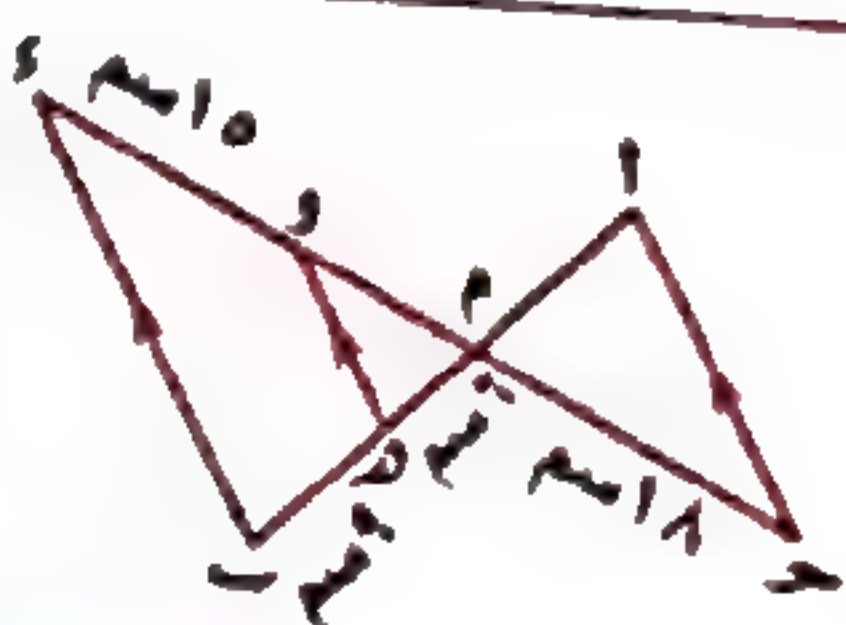
سم ٦ ، ٤ سم

٦ في الشكل المقابل :

$a // b // c // d // e$ ، $a = b = 1$ سم ، $c = d = 2$ سم

(٢) طول ac

أوجد : (١) طول bd



سم ١٠ ، ٨ ، ١٠ سم

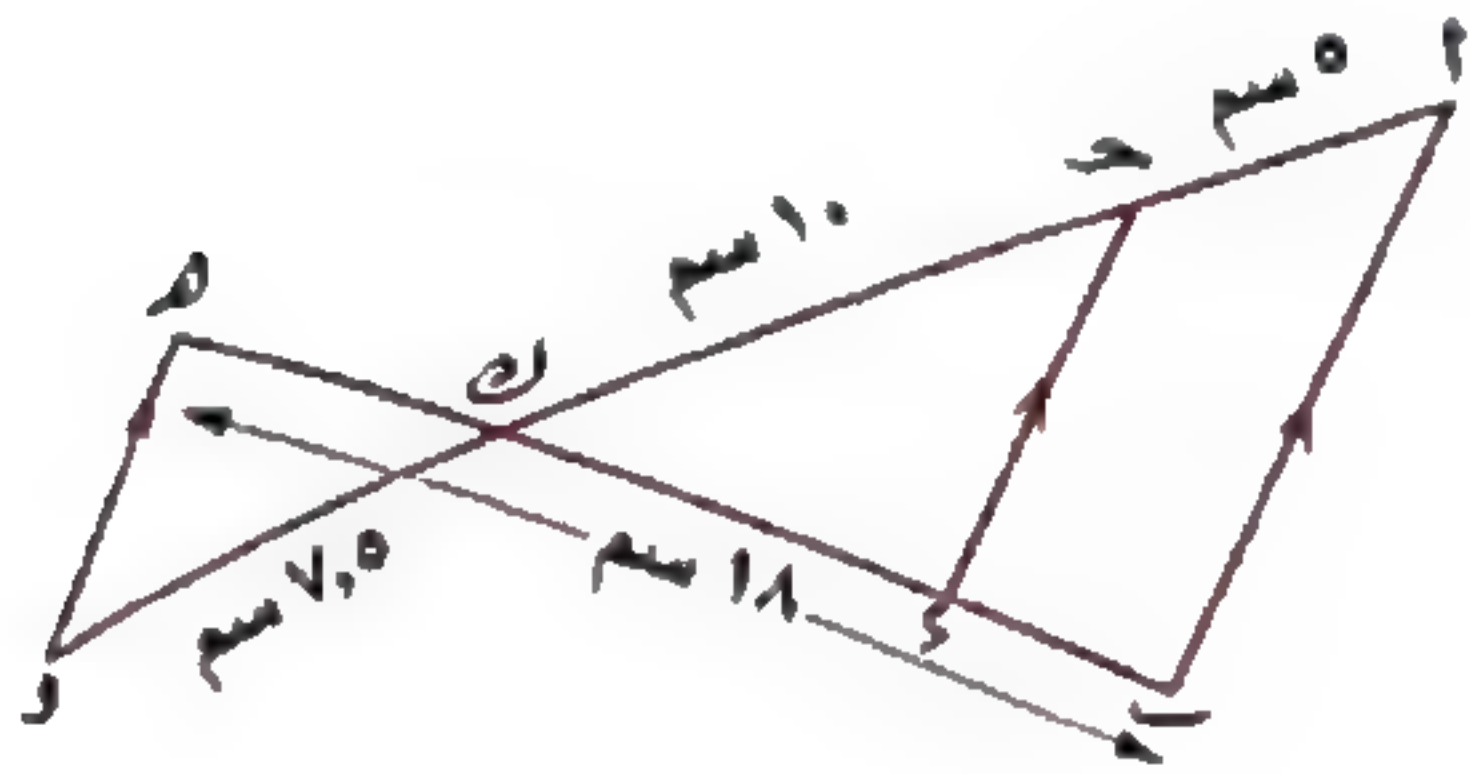
٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

وكان : $AD = 5$ سم ، $DE = 10$ سم

، $BE = 7,5$ سم ، $BF = 18$ سم

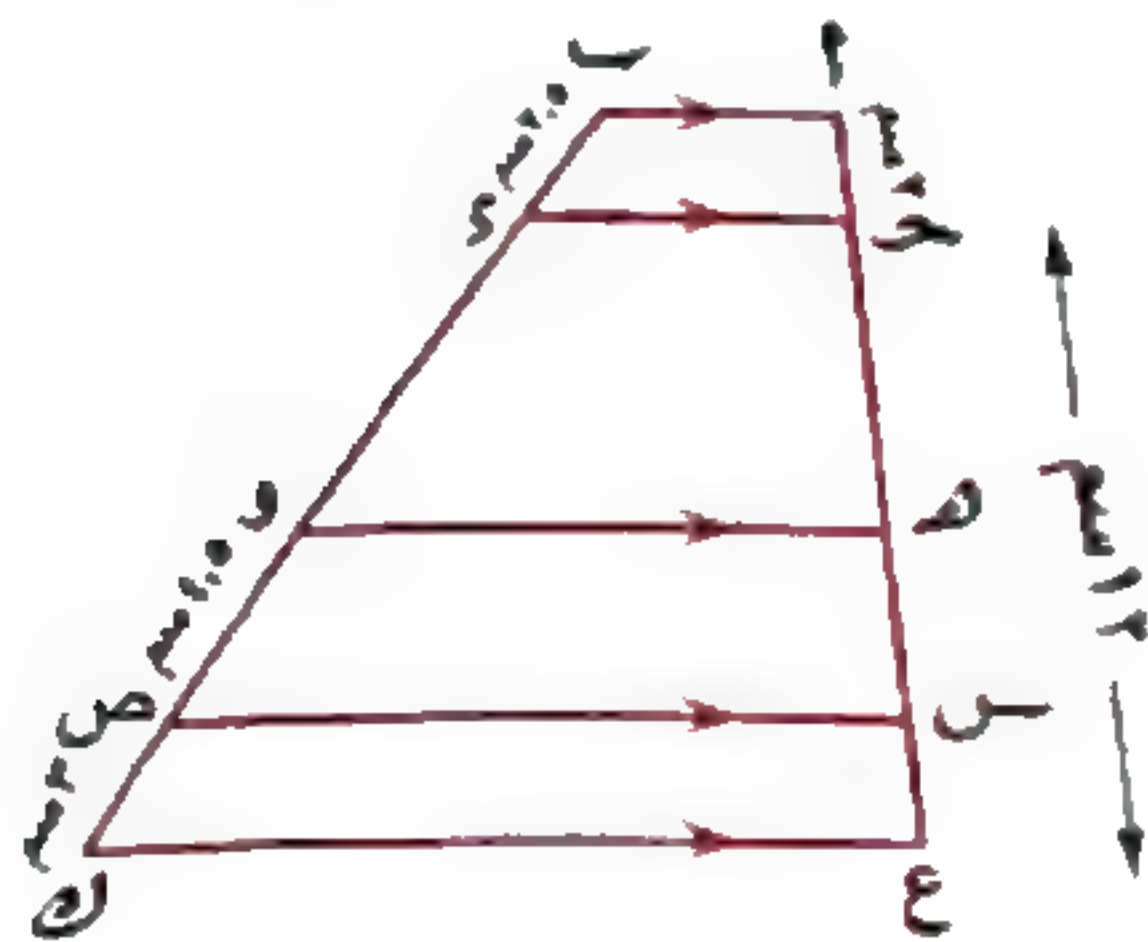
أوجد : طول كل من \overline{AE} ، \overline{CE} ، \overline{DE}



« ٤ سم ، ٨ سم ، ٦ سم »

٨ $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

، وكان $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ أثبت أن : $AH \times BD = CH \times AC$



٩ في الشكل المقابل :

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{IJ}$

، $AD = 2$ سم ، $DE = 2,5$ سم

، $BC = 4,5$ سم ، $CE = 7,5$ سم ، $CF = 12$ سم

أوجد : طول كل من \overline{AG} ، \overline{CG} ، \overline{EG} ، \overline{FG}

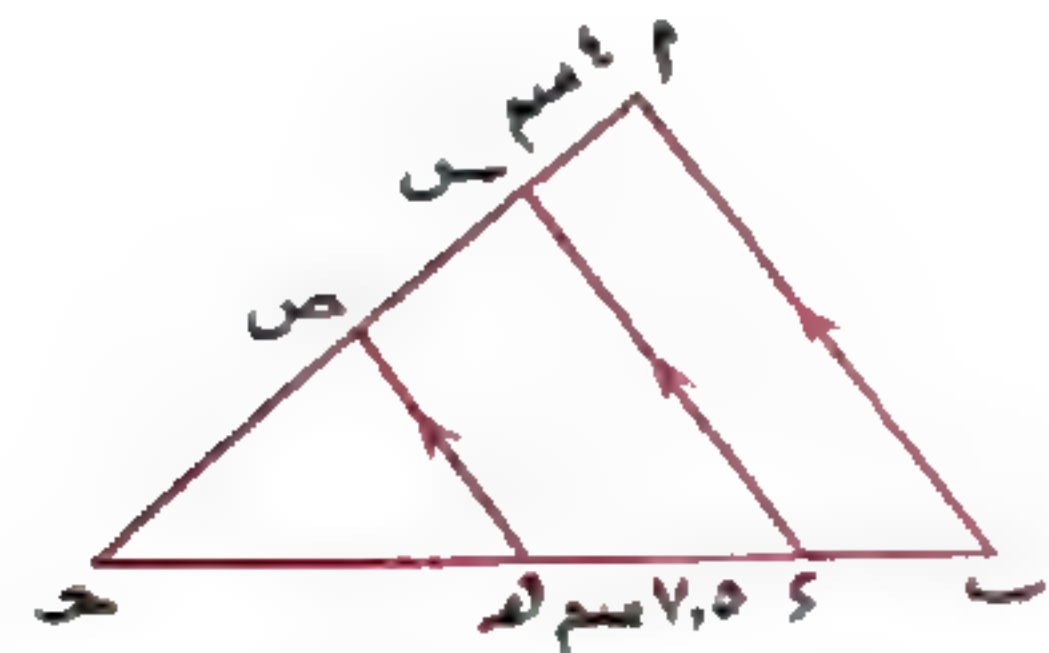
« ٣.٦ سم ، ٢.٤ سم ، ٦ سم ، ٧.٥ سم »

١٠ في الشكل المقابل :

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ، $AD : DE : EC = 2 : 3 : 5$

فإذا كان : $AD = 7,5$ سم ، $DE = 4$ سم

فأوجد : طول كل من \overline{AE} ، \overline{CE} ، \overline{DE}



« ٥ سم ، ١٢.٥ سم ، ٢٠ سم »

١١ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، \overline{AC} و \overline{BD} يقطعان \overline{AB} في S ، \overline{CD} في T

الترتيب فإذا كان : $AS = \frac{1}{4} AD$ ، $BT = \frac{1}{3} BD$ ، $CT = 24$ سم

فأوجد : طول كل من \overline{AB} ، \overline{CD} ، \overline{AC} ، \overline{BD}

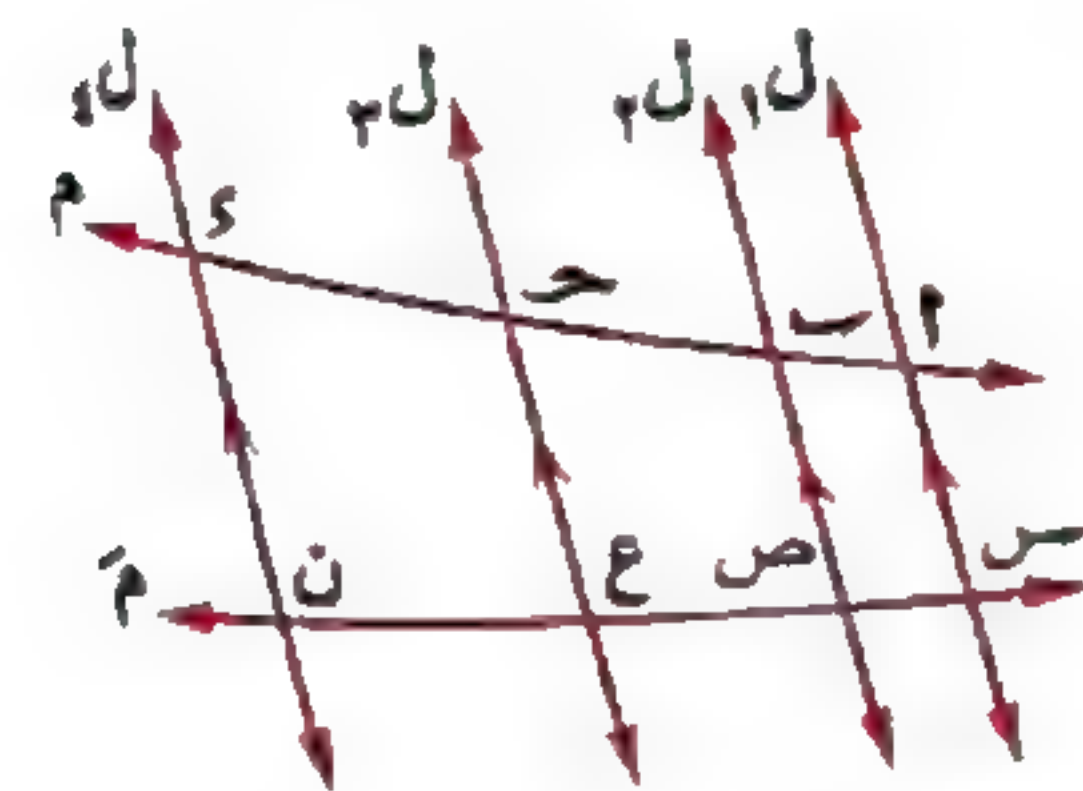
« ٤ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم »

١٢ في الشكل المقابل :

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH}$ ، \overline{AC} ، \overline{BD} مستقيمان قاطعان لها فإذا كان :

$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ ، $AD = 16,5$ سم

فأوجد : طول كل من \overline{AB} ، \overline{CD} ، \overline{EF} ، \overline{GH}

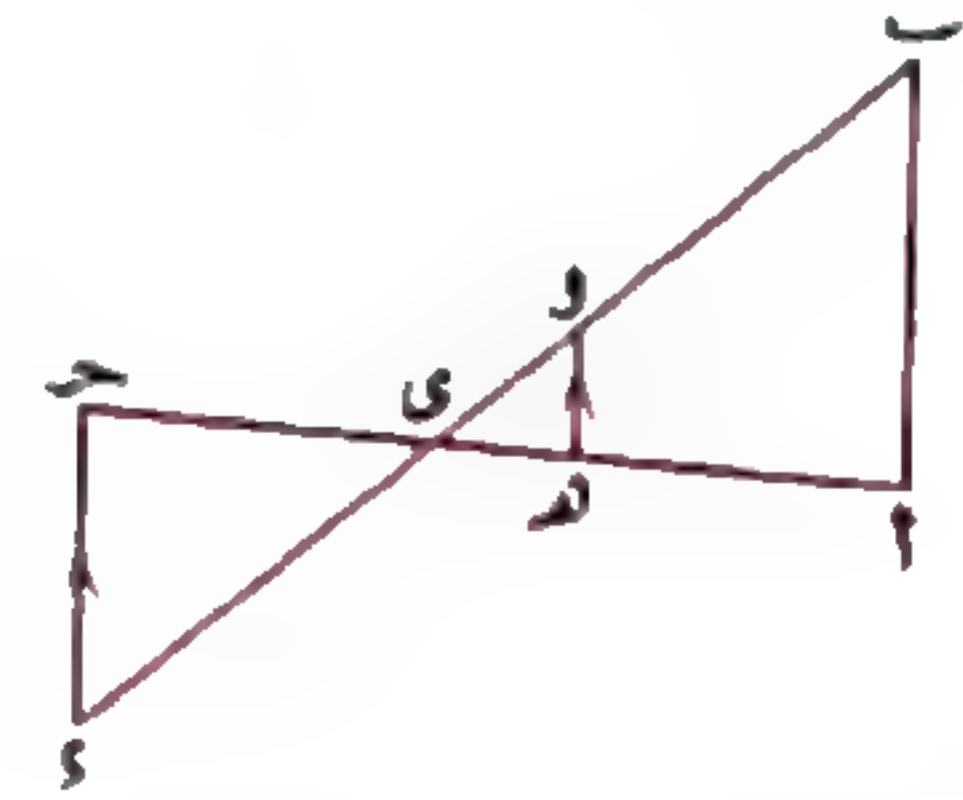


« ٢ سم ، ٦ سم ، ٧.٥ سم »

الدرس الثاني

١٣ ا ب ح مثلث ، \exists $\overline{أ ب}$ بحيث $\frac{أ ب}{ب ح} = \frac{٢}{٥}$ ، $\overline{أ ب} \cap \overline{أ ح} = أ$ وتقع خارج المثلث بحيث

١٤ $\frac{أ ب}{ب ح} = \frac{١}{٢}$ ، رسم $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ ، $\overline{أ ب}$ و $\overline{أ ح}$ يوازيان $\overline{أ ح}$ ويقطعان $\overline{أ ب}$ في $س$ ، $ص$ على الترتيب فإذا كان :
 ١٥ $ص = ١٤$ سم فأوجد : طول كل من $\overline{أ س}$ ، $\overline{أ ح}$



١٦ في الشكل المقابل :

$$\overline{أ ب} \parallel \overline{أ ح} ، \frac{أ ب}{ب ح} = \frac{١}{٢} ، \frac{أ ب}{ب ح} = \frac{١}{٢}$$

أثبت أن : $(أ ب) = ٢ (أ ح) = ٢ (أ ب) \times ١$

١٧ $\overline{أ ب}$ شبه منحرف فيه : $\overline{أ ب} \parallel \overline{أ ح}$ ، $م$ منتصف $\overline{أ ب}$ ، رسم مستقيم يمر بالنقطة $م$ ، يوازي $\overline{أ ب}$ ويقطع القطر $\overline{أ ب}$ في $ن$ ، ويقطع القطر $\overline{أ ح}$ في $و$ ، والضلع $\overline{أ ب}$ في $و$

(١) بين أن النقط $ن$ ، $و$ ، منتصفات القطع المستقيمة $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ ، $\overline{أ ب}$

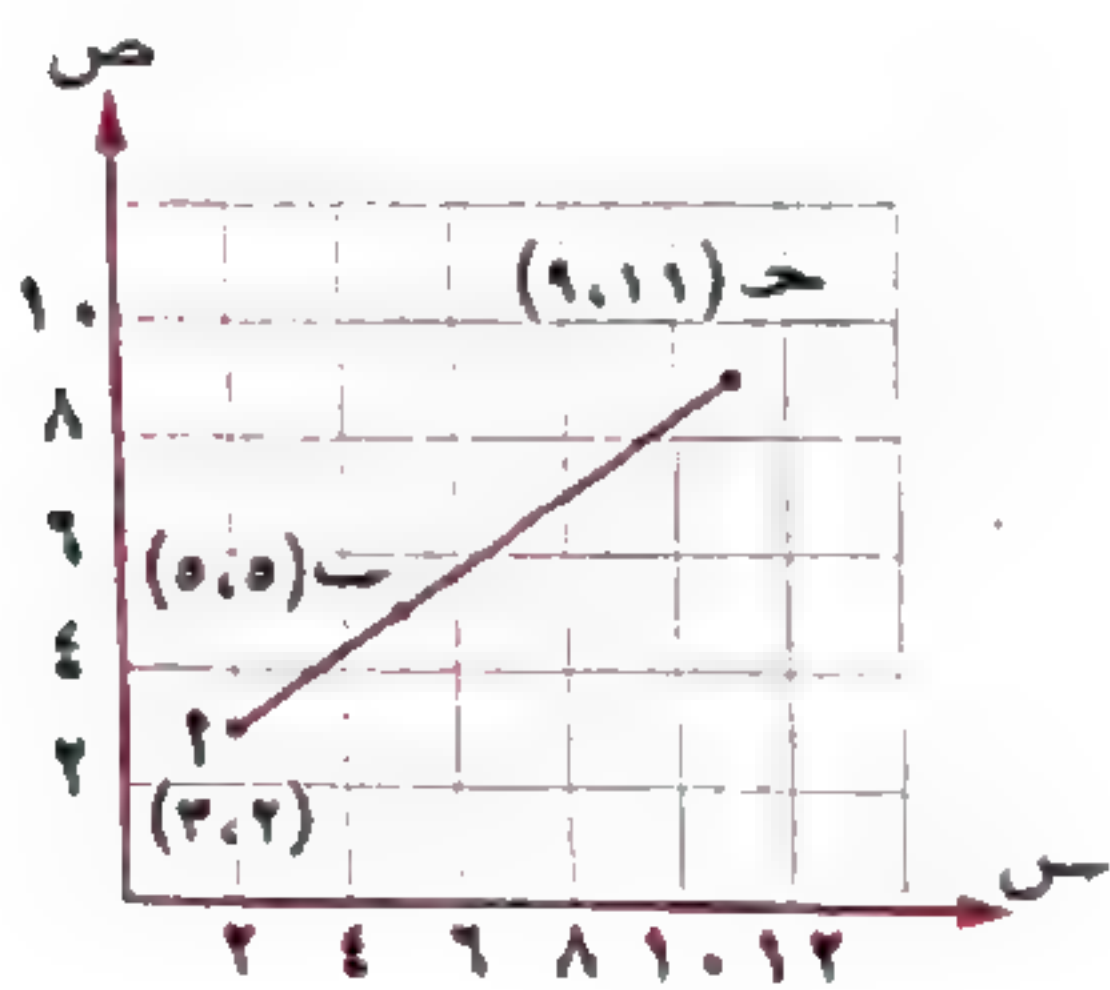
(٢) أثبت أن : $م و = \frac{١}{٢} (أ ب + أ ح)$

١٨ ا ب ح د شكل رباعي فيه : $\overline{أ ب} \parallel \overline{أ ح}$ ، تقاطع قطراه في $م$ ، نصفت $\overline{أ ب}$ في $و$

، ورسم $\overline{أ ب}$ و $\overline{أ ح}$ ، ويقطع $\overline{أ ب}$ في $س$ ، $\overline{أ ح}$ في $ص$ ، $\overline{أ ب}$ في $و$

أثبت أن : (١) $ص = \frac{١}{٢} أ ب$ (٢) $\frac{أ ب}{ب ح} = \frac{أ ح}{ح د}$

١٩ تفكير ناقد :



أوجد من الشكل $\frac{أ ب}{ب ح}$ بعدة طرق مختلفة

، كلما أمكنك ذلك.

هل حصلت على نفس الناتج ؟

تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $ص = ٧$ ، $س = ٢$ ، $ص = ٧$

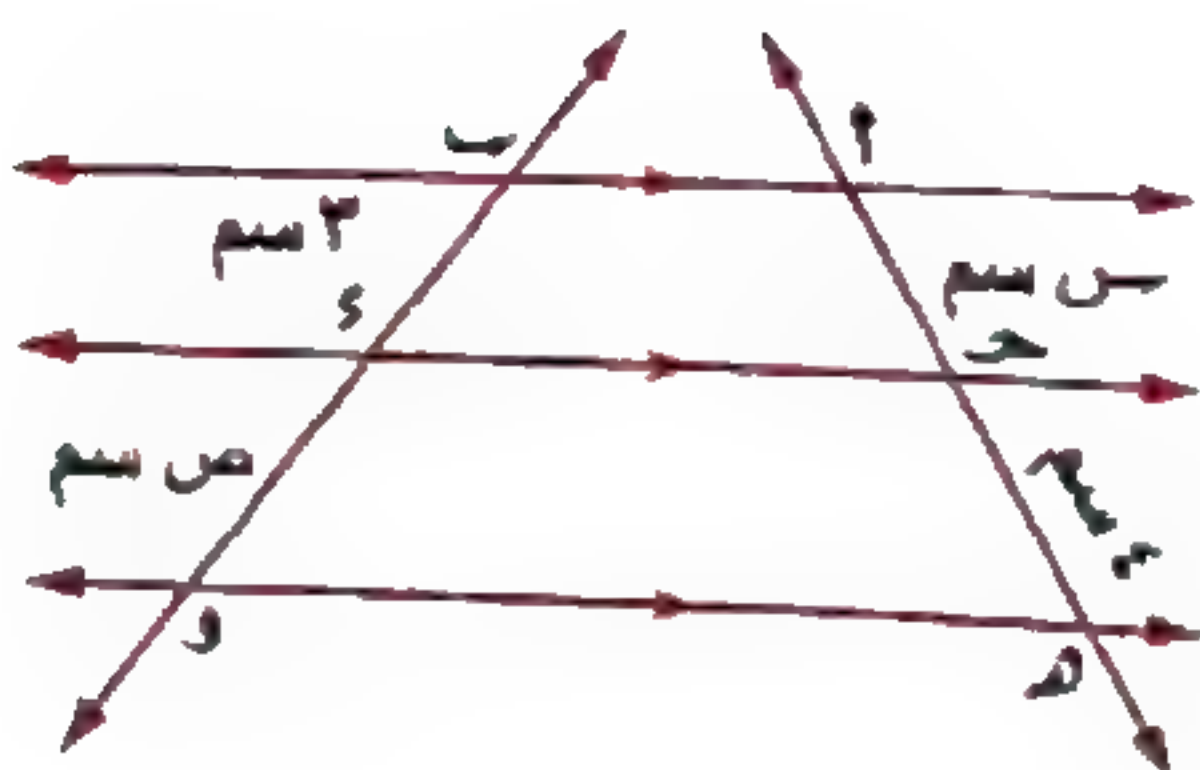
فإن : $س + ص = \dots \dots \dots$ سم

(١) ٧

(ب) ٩

(ج) ١١

(د) ١٢



(٢) في الشكل المقابل :

سم سم

$$\overline{٥٢} (١)$$

$$\overline{٥٢} (ج)$$

$$\overline{٥٢} (ب)$$

$$\overline{٥٢} (د)$$

(٣) في الشكل المقابل :

$$\frac{٢}{٣} = \frac{م}{ب}$$

فإن : م و = سم

$$٩ (١)$$

$$١٣ (ج)$$

$$١١ (ب)$$

$$١٥ (د)$$

(٤) في الشكل المقابل :

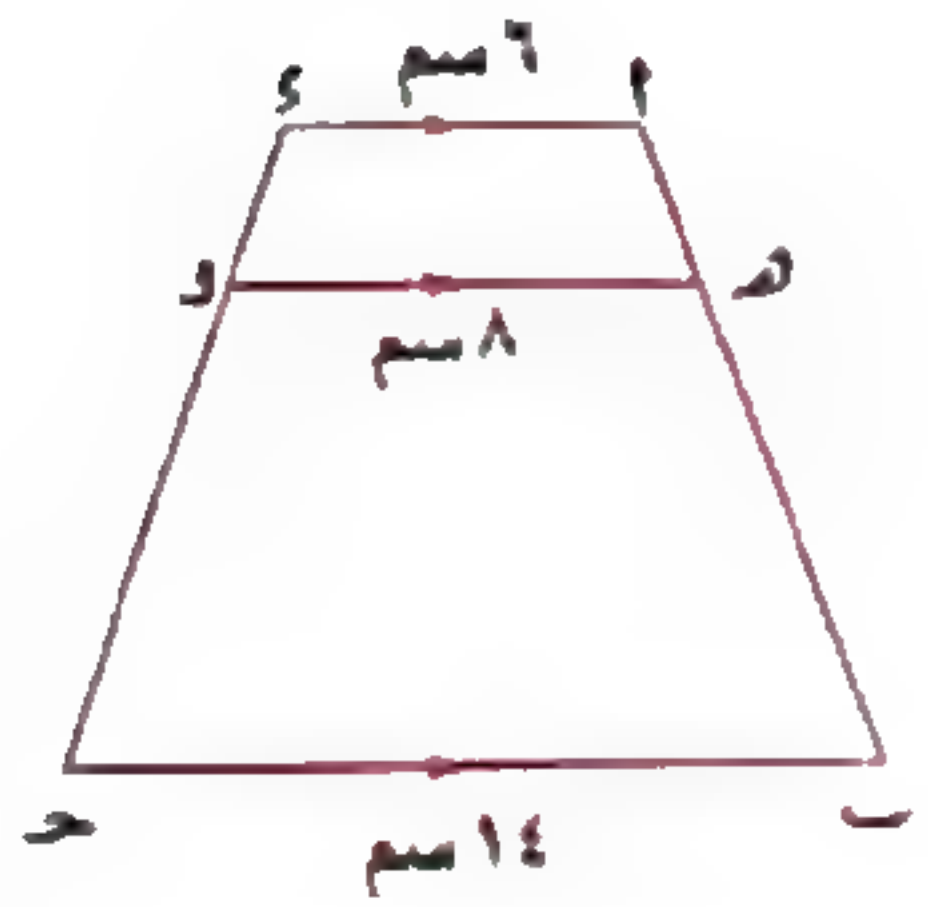
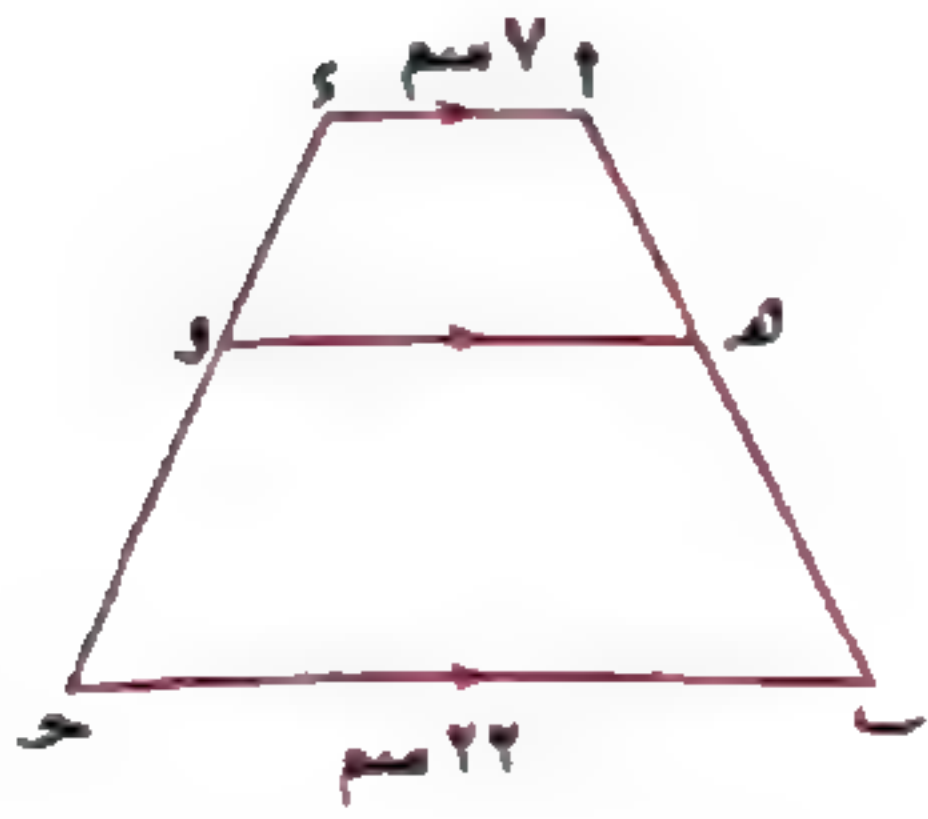
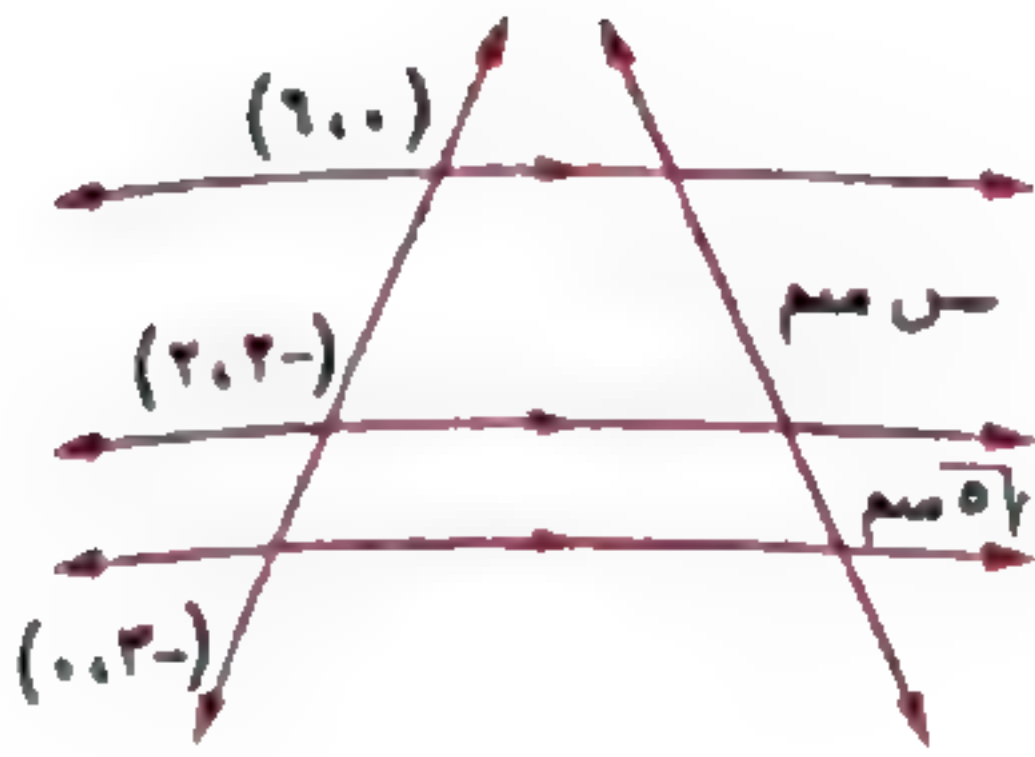
$$\frac{م}{ب} = \frac{٢}{٤}$$

$$\frac{٢}{٤} (١)$$

$$\frac{٢}{٧} (ج)$$

$$\frac{٤}{٧} (ب)$$

$$\frac{١}{٣} (د)$$

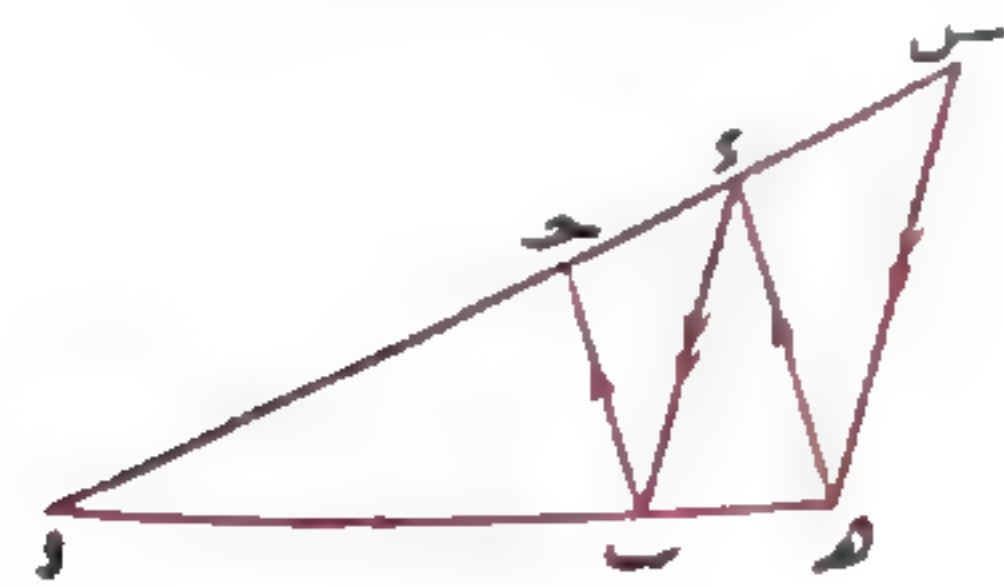


١٦ أ ب ح مثلث ، م منتصف الضلع ب ح فرضت نقطة و على أ م ، رسم و م // أ ب ويقطع ب ح في م ، ورسم و م // أ ح ويقطع ب ح في ي أثبت أن : م منتصف م ي ، وإذا كانت و ملتقى متوسطات المثلث أ ب ح فاثبت أن : م = م ي = م ح = $\frac{١}{٣}$ ب ح

في الشكل المقابل :

$$\overline{م د} // \overline{ب ح} ، \overline{د ب} // \overline{م س}$$

$$\text{أثبت أن : } \left(\frac{و ب}{و م} \right) = \frac{و ح}{و س}$$



١٧ أ ب ح د متوازي أضلاع ، رسم د م فقطع أ ح ، أ ب في س ، م على الترتيب ، رسم و و فقطع أ ح ، ب ح في ص ، و على الترتيب فإذا كان : أ س = ح ص فاثبت أن : م و // م ص

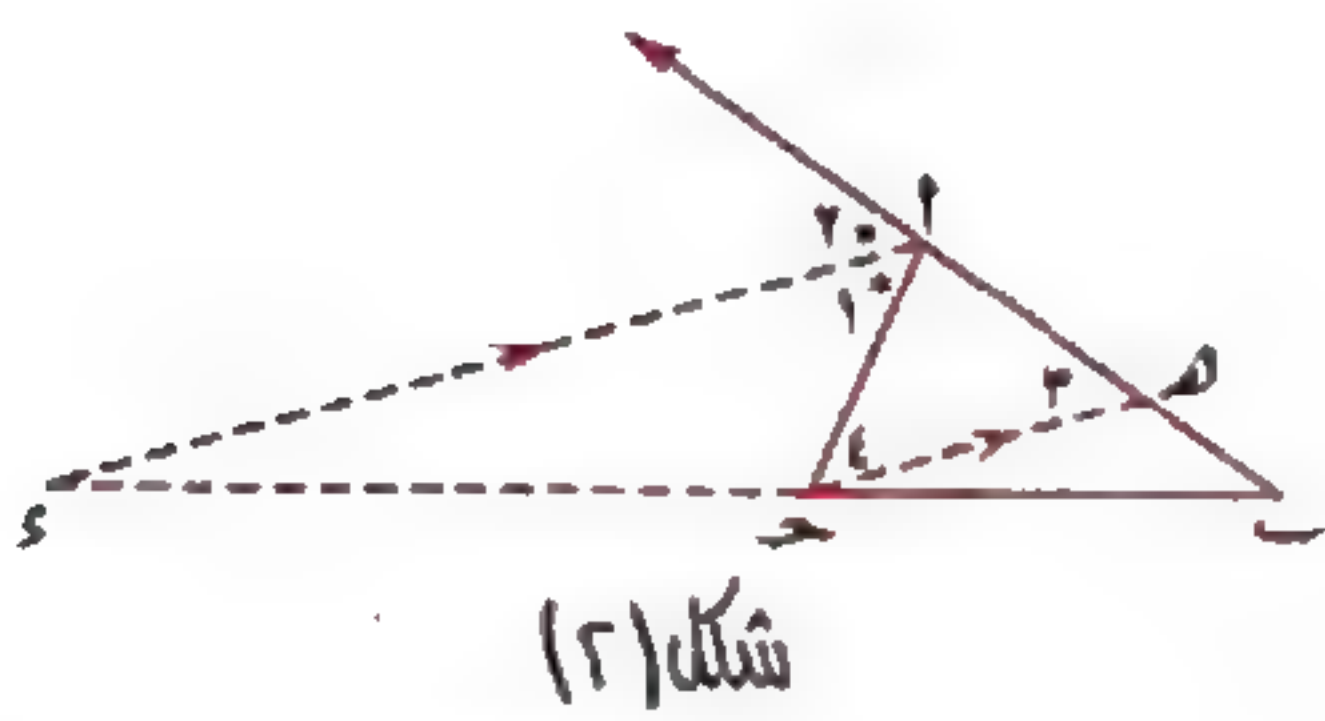


3
التمرين

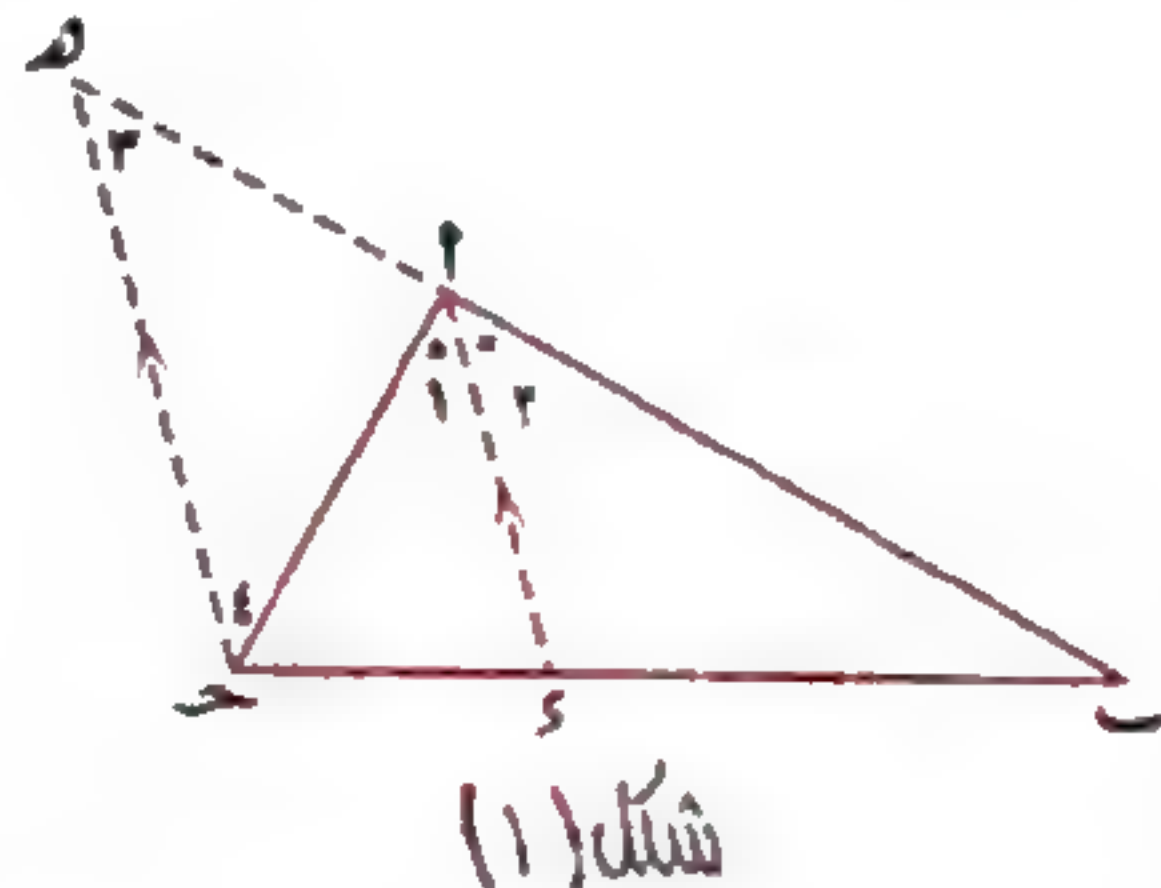
منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

نظريّة

إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين.



شكل (٢)



شكل (١)

المعطيات : \overrightarrow{AD} ينصف $\angle BAC$ (من الداخل فى شكل (١) ، من الخارج فى شكل (٢))

المطلوب : إثبات أن : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

العمل : ارسم $\overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{AD}$ ويقطع \overrightarrow{AB} فى H

البرهان : \overrightarrow{AD} ينصف $\angle BAC$

$$\therefore \overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \angle 1 \equiv \angle 2 \text{ (بالتناظر)}$$

$$\therefore \angle 1 \equiv \angle 2$$

$$\therefore \overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{AD}$$

$$\text{من (١) ، (٢) : } \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\therefore \angle 1 \equiv \angle 2$$

$$\therefore \angle 1 \equiv \angle 2 \text{ (بالتبادل)}$$

$$\therefore \angle 1 \equiv \angle 2$$

(١)

(٢)

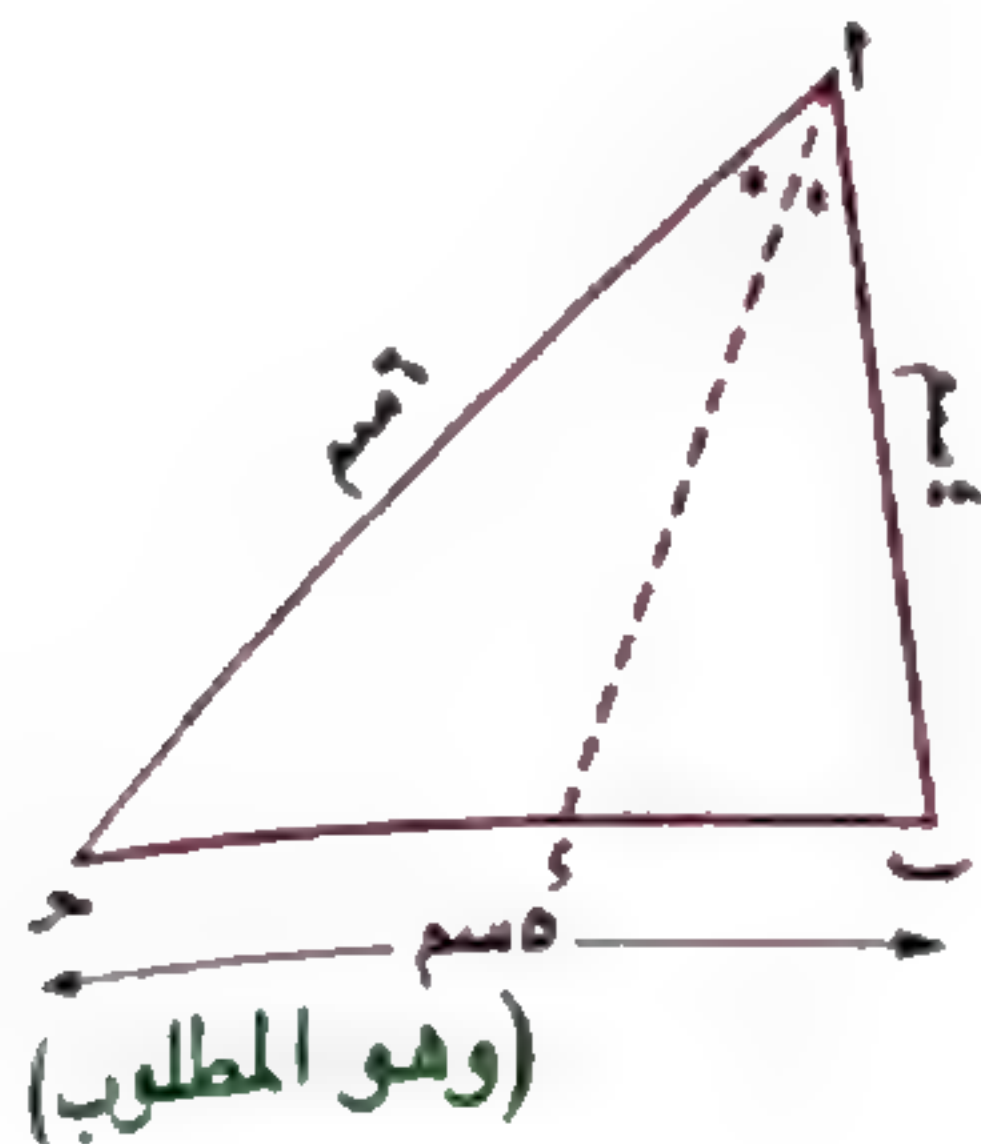
(وهو المطلوب)

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

مثال ١

أ ب ح مثلث أضلاعه أ ب ، ب ح ، ح أ هي على الترتيب ٤ ، ٥ ، ٦ من السنتيمترات ، نصفت زاوية أ بمنصف قطع ب ح في د أوجد : طول كل من ب د ، د ح

الحل



$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{BD}{DC} \therefore \\ \frac{4}{6} &= \frac{BD}{5-BD} \therefore \\ 10 &= 5BD \therefore \end{aligned}$$

∴ أ د ينصف أ

$$\frac{4}{6} = \frac{BD}{5-BD} \therefore$$

$$2BD - 10 = 2BD$$

$$2BD = 5 - 2 = 3 \text{ سم ، } BD = 1.5 \text{ سم}$$

مثال ٢

أ ب ح مثلث أضلاعه أ ب ، ب ح ، ح أ هي على الترتيب ٦ ، ٥ ، ٩ من السنتيمترات ، نصفت الزاوية الخارجة للمثلث عند أ بمنصف قطع ب ح في د أوجد : طول كل من ب د ، د ح

الحل



∴ أ ب > أ ح ، أ د ينصف الزاوية الخارجة عند أ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \therefore \frac{6}{9} = \frac{BD}{5-BD}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{BD}{5-BD} \therefore$$

$$\frac{2}{3} = \frac{BD}{5-BD} \therefore$$

$$2BD + 10 = 3BD$$

$$BD = 10 - 2BD = 10 \text{ سم ، } BD = 10 \text{ سم (وهو المطلوب)}$$

مثال ٣

أ ب ح مثلث ، س منتصف ب ح ، نصفت د أ س ب بمنصف قطع أ ب في د ، نصفت د أ س ح بمنصف قطع أ ح في د أثبت أن : د ه // ب ح

الحل

في $\triangle ADB$: ∴ س د ينصف د أ س ب

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AS}{SB} \therefore$$

(١)

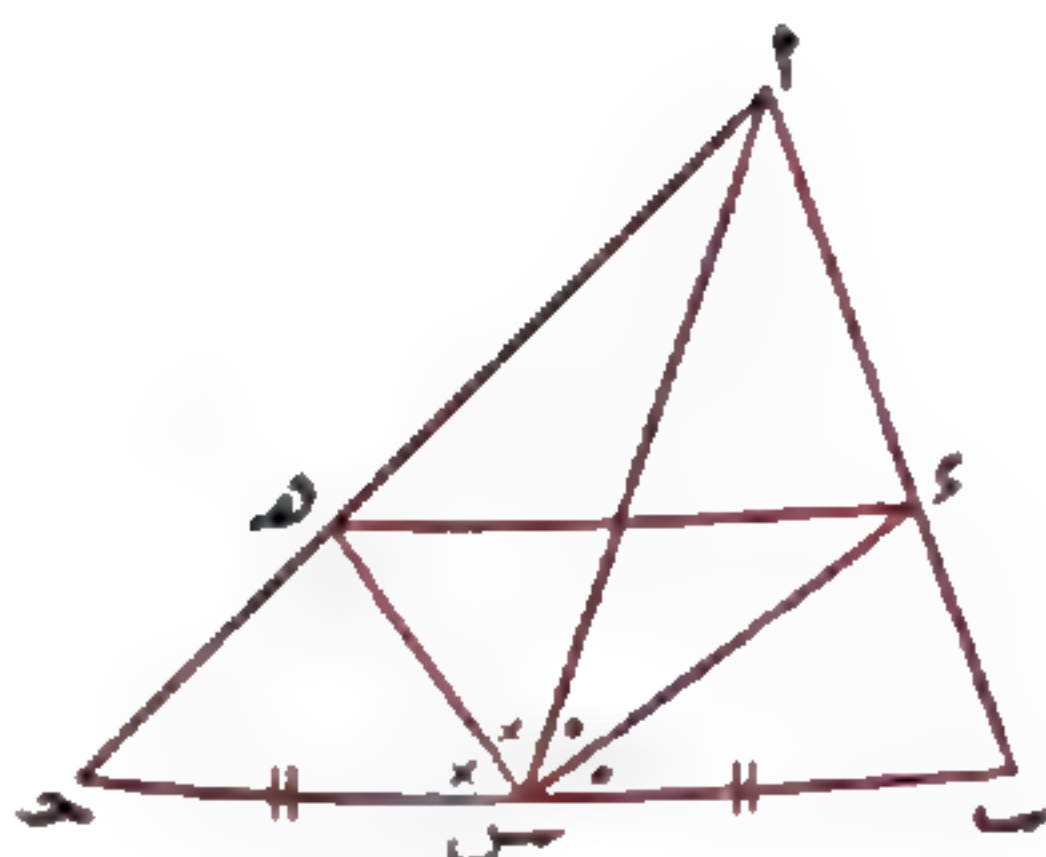
في $\triangle AHC$: ∴ س د ينصف د أ س ح

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AS}{SC} \therefore$$

(٢)

من (١) ، (٢) وملاحظة أن : س ب = س ح

∴ في $\triangle ABC$: د ه // ب ح



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AS}{SB} \therefore$$

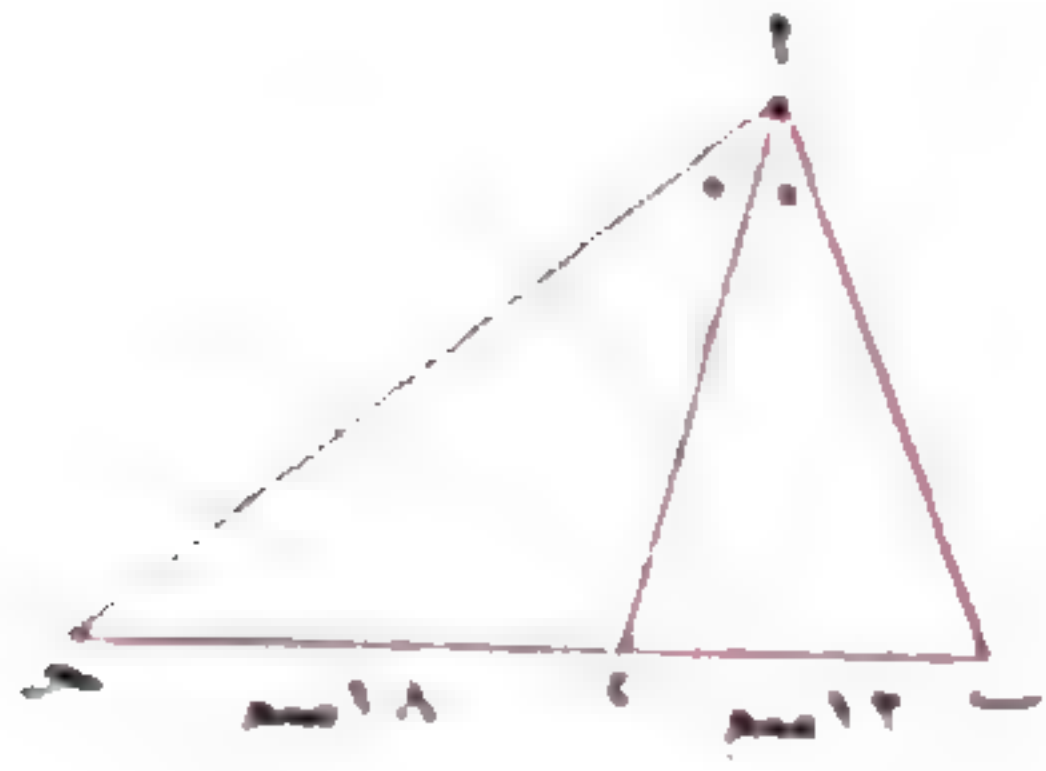
(وهو المطلوب)

في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، د أ ينصف ب ح ويقطع أ ح في ع

بحيث : ب د = ١٢ سم ، ع د = ١٨ سم فإذا كان محيط Δ أ ب ح = ٨٠ سم

أوجد : طول كل من أ ح ، أ ب



الحل

في Δ أ ب ح : \therefore د أ ينصف ب ح

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{12}{18} = \frac{ع د}{ب د} = \frac{أ ح}{أ ب}$$

\therefore محيط Δ أ ب ح = ٨٠ سم ، ب د = ١٨ + ١٢ = ٣٠ سم

\therefore أ ب + أ ح = ٨٠ - ٣٠ = ٥٠ سم

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{أ ح}{أ ب}$$

$\therefore \frac{2+2}{3} = \frac{أ ب + أ ح}{أ ب}$ (من خواص التناسب)

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{٥٠}{أ ب}$$

$$\therefore أ ب = \frac{٥٠ \times 3}{4} = ٣٧.٥ \text{ سم}$$

\therefore أ ح = ٥٠ - ٣٧.٥ = ١٢.٥ سم

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

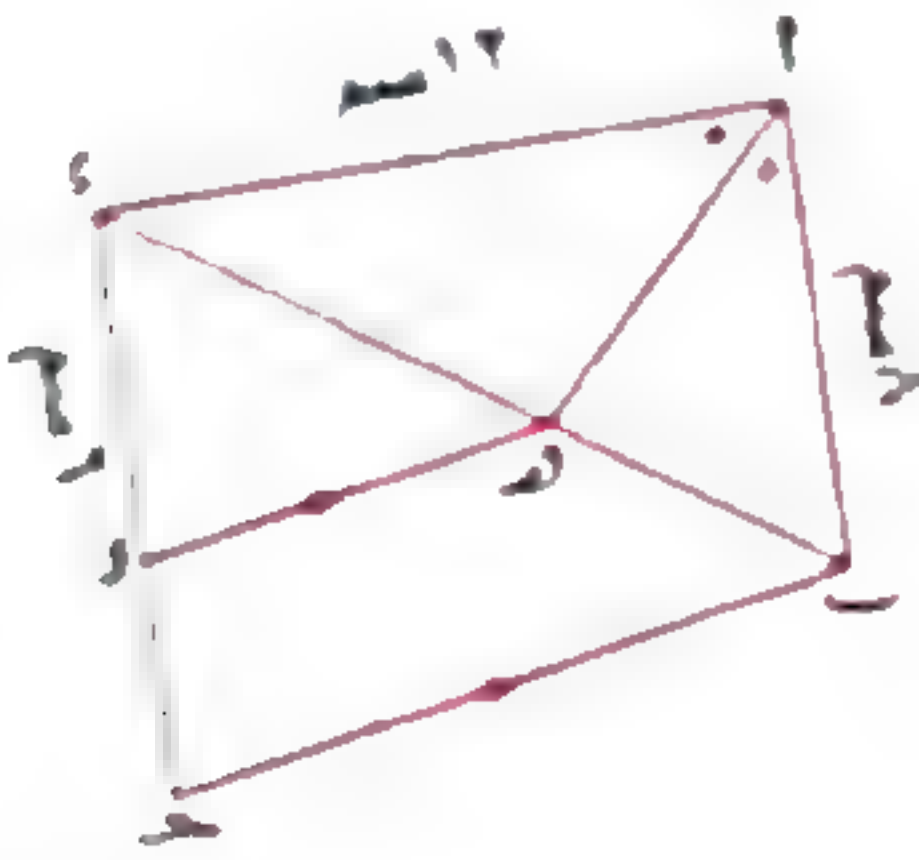
في الشكل المقابل :

أ ب ح د شكل رباعي فيه : أ ب = ٨ سم ، ع د = ١٢ سم

، أ د ينصف ب ح ويقطع ب ح في د ، د و // ب ح

ويقطع د ح في و ، فإذا كان د و = ٦ سم

أوجد : طول د ح



ملاحظات هامة

١ النصفان الداخلي والخارجي لأي زاوية من زوايا المثلث يكونان متعامدين

ففي الشكل المقابل : إذا كان : أ د ، أ د هما النصفان

للزاوية أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ على الترتيب فإن :

$$\therefore \frac{ب د}{د ح} = \frac{ع د}{د ح}$$

$$\frac{أ ب}{أ ح} = \frac{ب د}{د ح} ، \frac{أ ب}{أ ح} = \frac{ع د}{د ح}$$

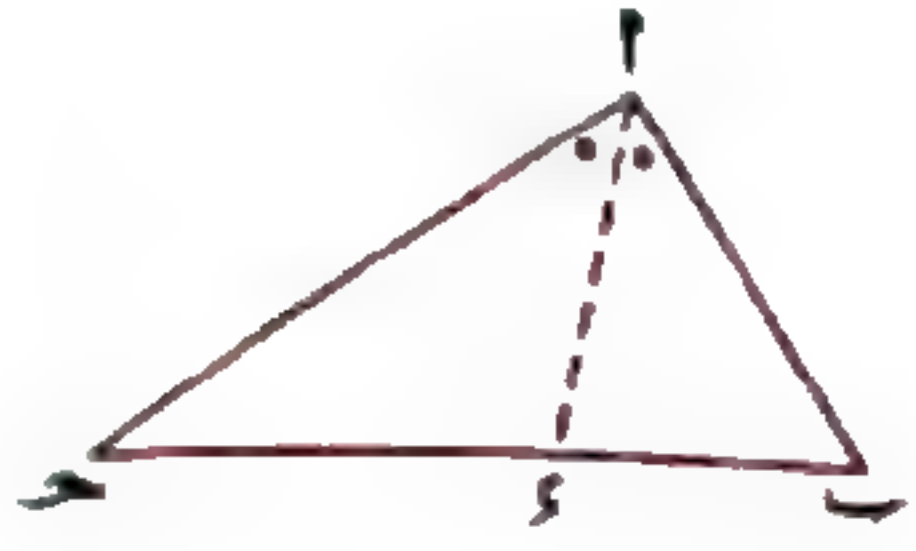
\therefore القاعدة ب ح تنقسم من الداخل في د

ومن الخارج في د بنفس النسبة (أ ب : أ ح)

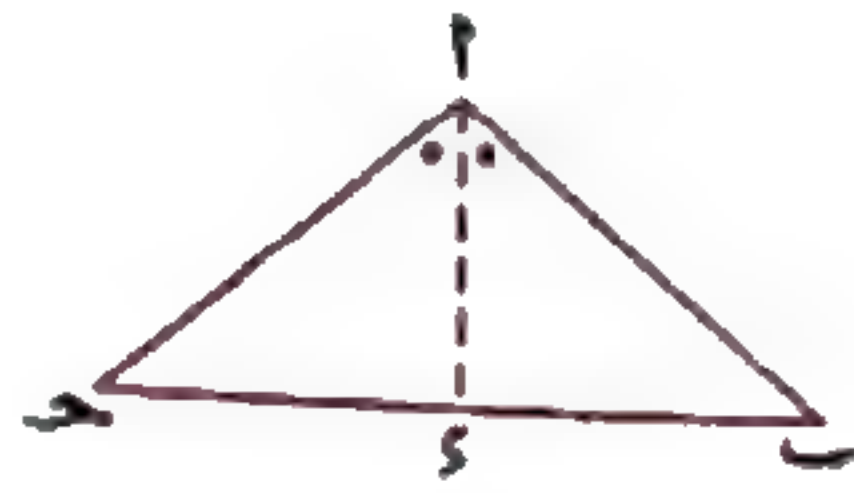
ولاحظ أن النصفين أ د ، أ د متعامدان أي أن \angle (أ د ب د) = 90°



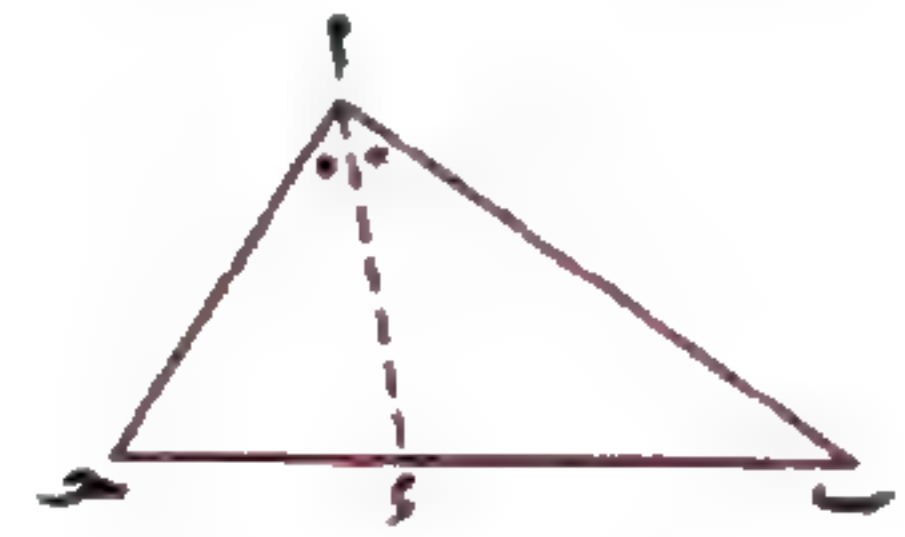
٢ إذا كان : \overrightarrow{AD} ينصف BC في D فإن D تأخذ أحد الأوضاع الآتية :



إذا كان : $AB > AC$
فإن : $BD > CD$
أي أن
 D أقرب إلى C منها إلى B

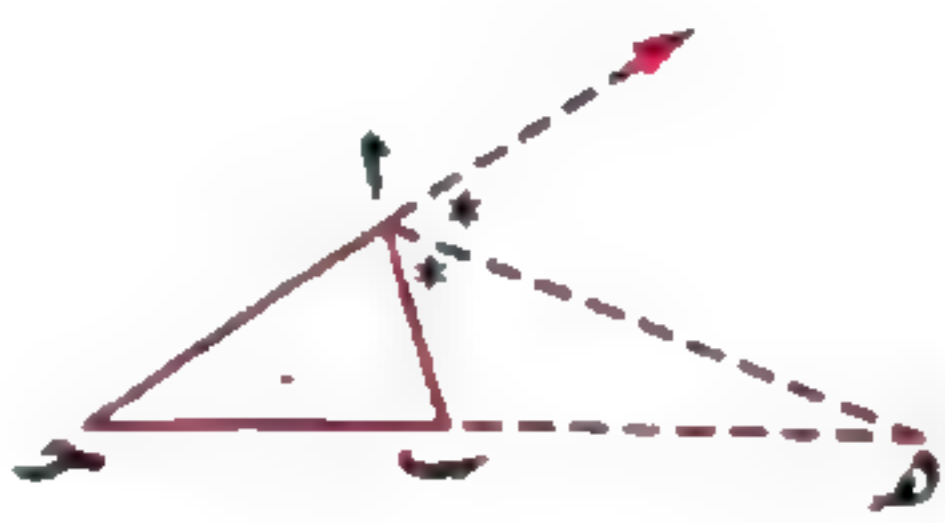


إذا كان : $AB = AC$
فإن : $BD = CD$
أي أن
 D على بعدين متساويين من B ، C



إذا كان : $AB < AC$
فإن : $BD < CD$
أي أن
 D أقرب إلى B منها إلى C

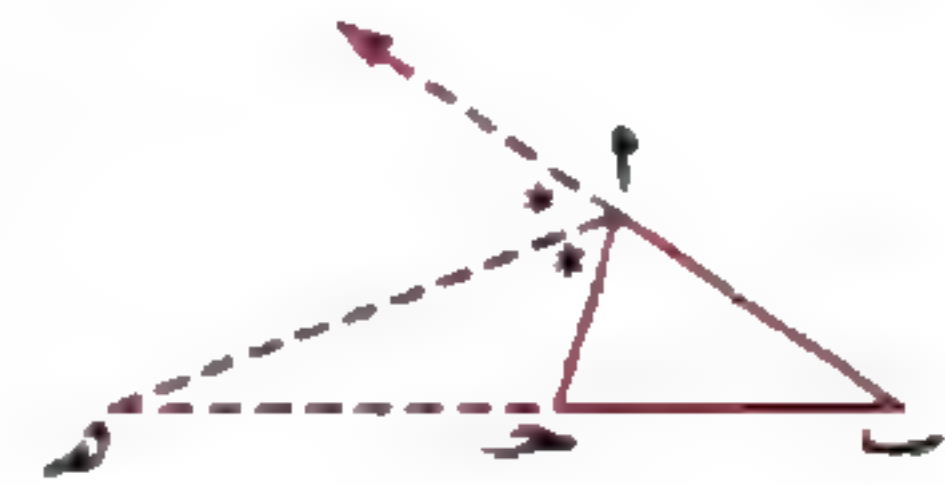
٣ إذا كان : \overrightarrow{AD} ينصف الزاوية الخارجة للمثلث ABC عند A حيث $D \notin BC$ فإن D تأخذ أحد الأوضاع الآتية :



إذا كان : $AB > AC$
فإن : $BD > CD$
أي أن
 $D \in \overrightarrow{CB}$



إذا كان : $AB = AC$
فإن : $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$
أي أن المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث
متساوى الساقين يوازي القاعدة



إذا كان : $AB < AC$
فإن : $BD < CD$
أي أن
 $D \in \overrightarrow{BC}$

مسألة ٥

ABC مثلث فيه : $AB = 8$ سم ، $AC = 6$ سم ، $BC = 7$ سم ، رُسم \overrightarrow{AD} ينصف BC ويقطع AC في E ،
رسم \overrightarrow{AD} ينصف BC الخارجة ويقطع AC في F أوجد : طول DE

الحل

في $\triangle ABC$:

$\therefore \overrightarrow{AD}$ ينصف BC ، \overrightarrow{AD} ينصف BC الخارجة

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

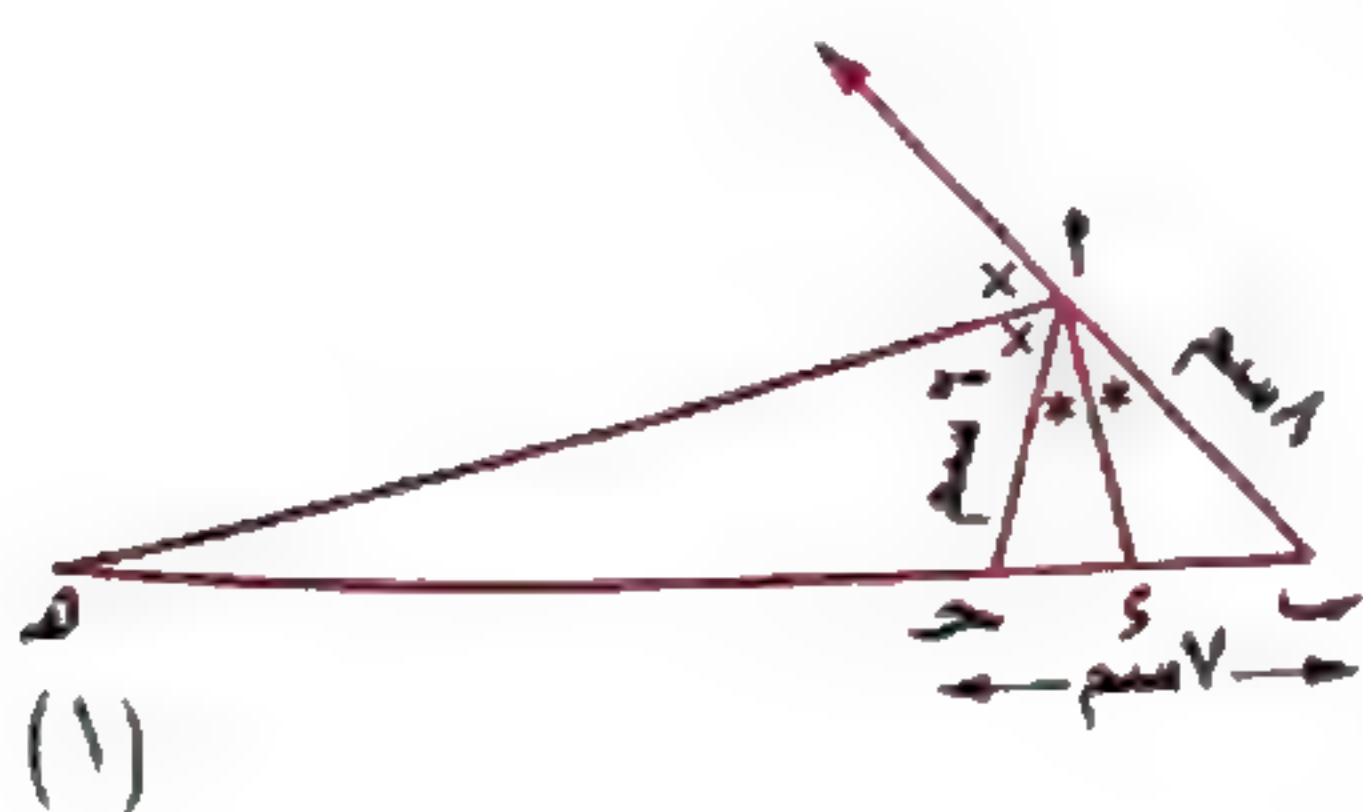
$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{BC}{AB+AC}$$

$$\therefore \frac{AE}{8} = \frac{AF}{6} = \frac{7}{14}$$

$$\therefore AE = 4 \text{ سم}$$

$$\therefore AF = 3 \text{ سم}$$

$$\therefore EF = 1 \text{ سم}$$



(١)

$$\text{ومن (١) : } \frac{4}{3} = \frac{سم}{سم} \therefore$$

$$\therefore \frac{سم - سم}{سم} = \frac{٣ - ٤}{٣} \text{ (من خواص التناسب)}$$

$$\therefore \frac{١}{٣} = \frac{سم}{سم}$$

$$\therefore \frac{١}{٣} = \frac{٧}{سم}$$

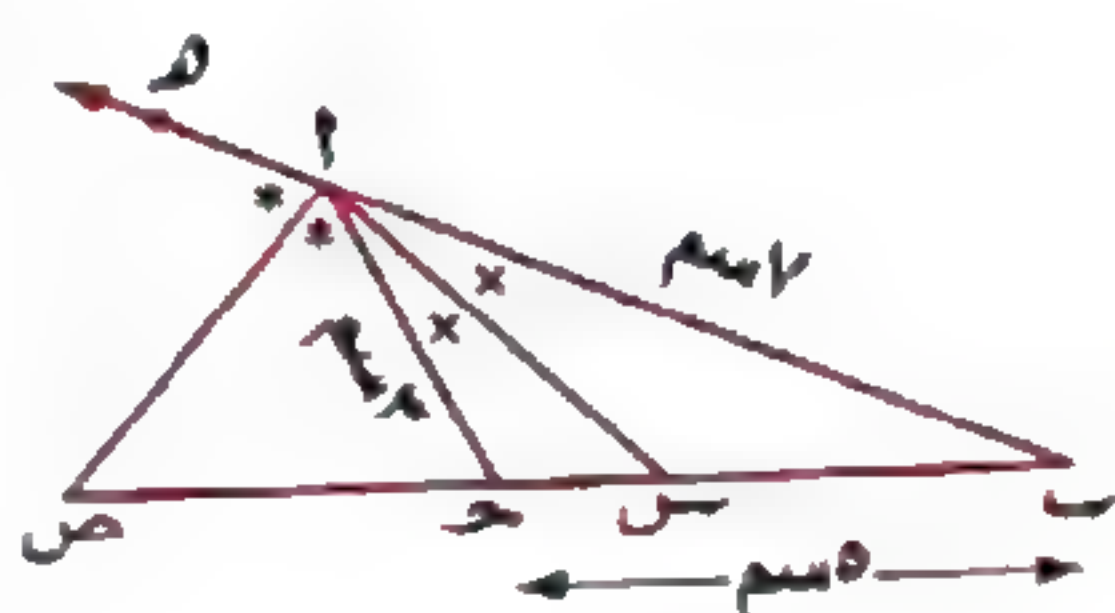
$$\therefore سم = ٢١ \text{ سم}$$

$$\therefore سم = سم + سم = ٢١ + ٣ = ٢٤ \text{ سم}$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



أحس ينصف د ب أ ح ، أ ح ينصف د ح أ ح

، أ ب = ٧ سم ، أ ح = ٣ سم ، ب ح = ٥ سم

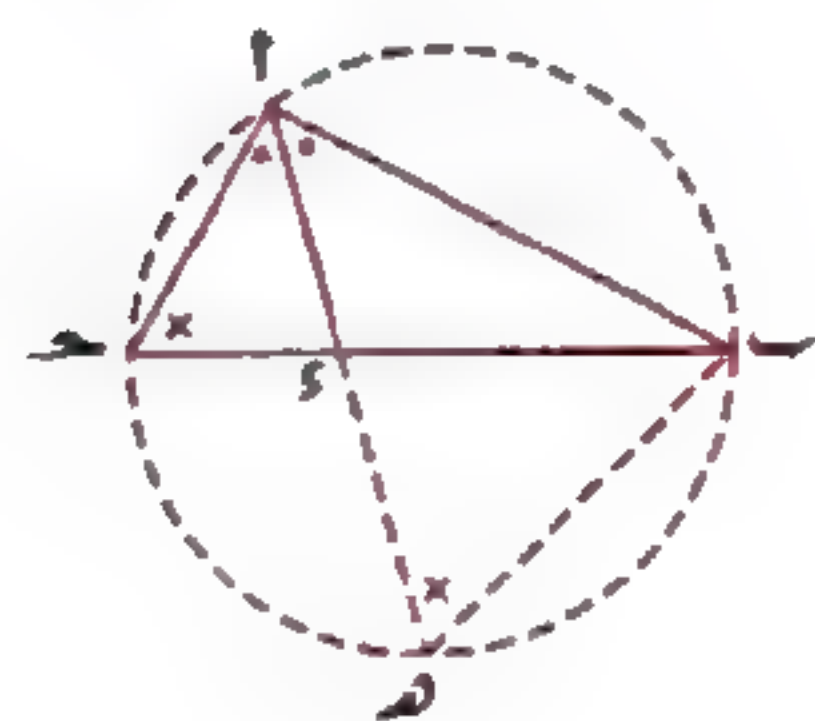
أوجد : طول ح ص

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث

التمرين مشهور

إذا كان : أ ح ينصف د أ في Δ أ ب ح من الداخل ويقطع ب ح في ع

$$\text{فإن : } \frac{أ ب \times ب ح - أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح} = \frac{أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح}$$



أ ب ح مثلث ، أ ح ينصف د ب أ ح من الداخل

$$\{ع\} = \overline{أ ب} \cap \overline{أ ح}$$

$$\text{إثبات أن : } \frac{أ ب \times ب ح - أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح} = \frac{أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح}$$

ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب ح وتقطع أ ح في ع ، ارسم ب ح

$$\therefore \frac{أ ب \times ب ح}{أ ب \times ب ح} = \frac{أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح} \text{ (معطى)}$$

$$\frac{أ ب \times ب ح}{أ ب \times ب ح} = \frac{أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح} \text{ (محيطيتان مشتركتان في أ ب)}$$

$$\therefore \Delta أ ب ح \sim \Delta أ ح ع \text{ ويتبع أن : } \frac{أ ب}{أ ح} = \frac{ب ح}{ع}$$

$$\therefore أ ب \times ب ح = أ ح \times ع$$

$$\therefore أ ب \times ب ح = (أ ح + ع) \times ع$$

$$\therefore (أ ح) \times ع = أ ب \times ب ح - أ ح \times ع$$

$$\therefore (أ ح) \times ع = أ ب \times ب ح - أ ح \times ع$$

$$\text{أي أن : } \frac{أ ب \times ب ح - أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح} = \frac{أ ح \times ع}{أ ب \times ب ح}$$

تذكر أنه

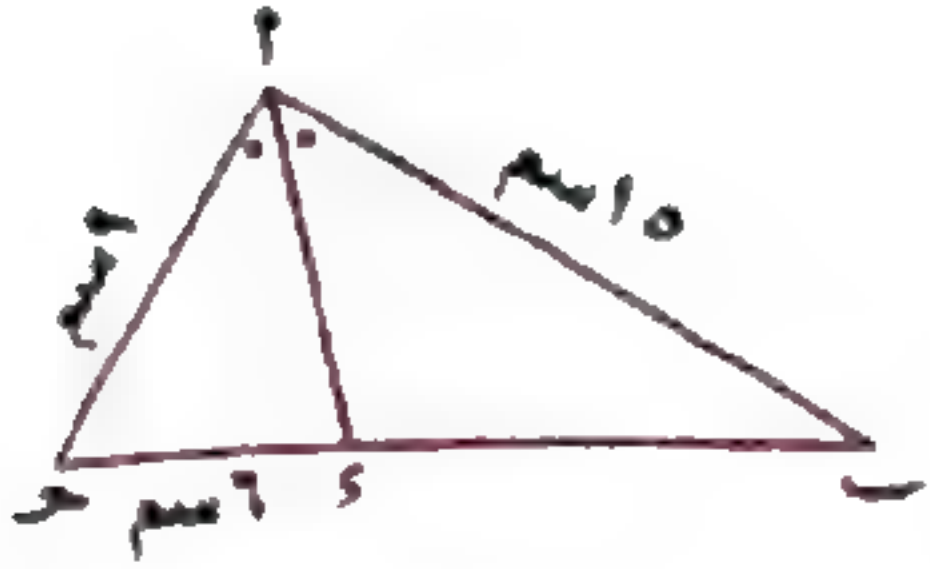
$$أ ب \times ب ح = أ ح \times ع$$

(وهو المطلوب)

مثال 6

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ١٥ سم ، أ ح = ٩ سم ، $\overrightarrow{أ د}$ ينصف د ب أ ح ويقطع ب ح في د ، فإذا كان : د ح = ٦ سم أوجد : طول أ د

الحل

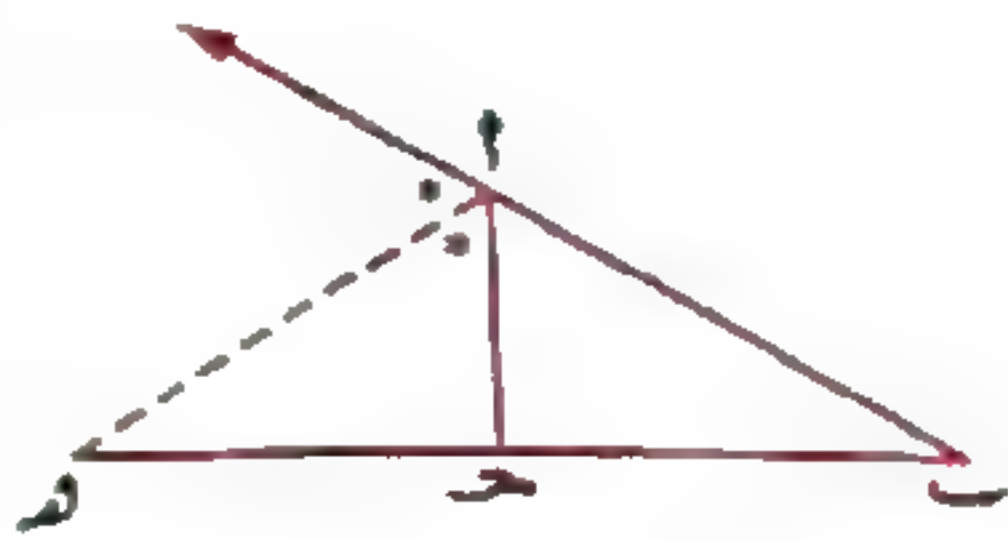


(وهو المطلوب)

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{أ د} \text{ ينصف د ب أ ح} & \therefore \frac{أ ب}{أ ح} = \frac{د ب}{د ح} \\ \therefore \frac{15}{9} = \frac{د ب}{6} & \therefore د ب = \frac{6 \times 15}{9} = 10 \text{ سم} \\ \therefore أ د = \sqrt{أ ب \times أ ح - د ب \times د ح} & = \sqrt{15 \times 9 - 10 \times 6} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ سم} \end{aligned}$$

ملاحظة

في الشكل المقابل :



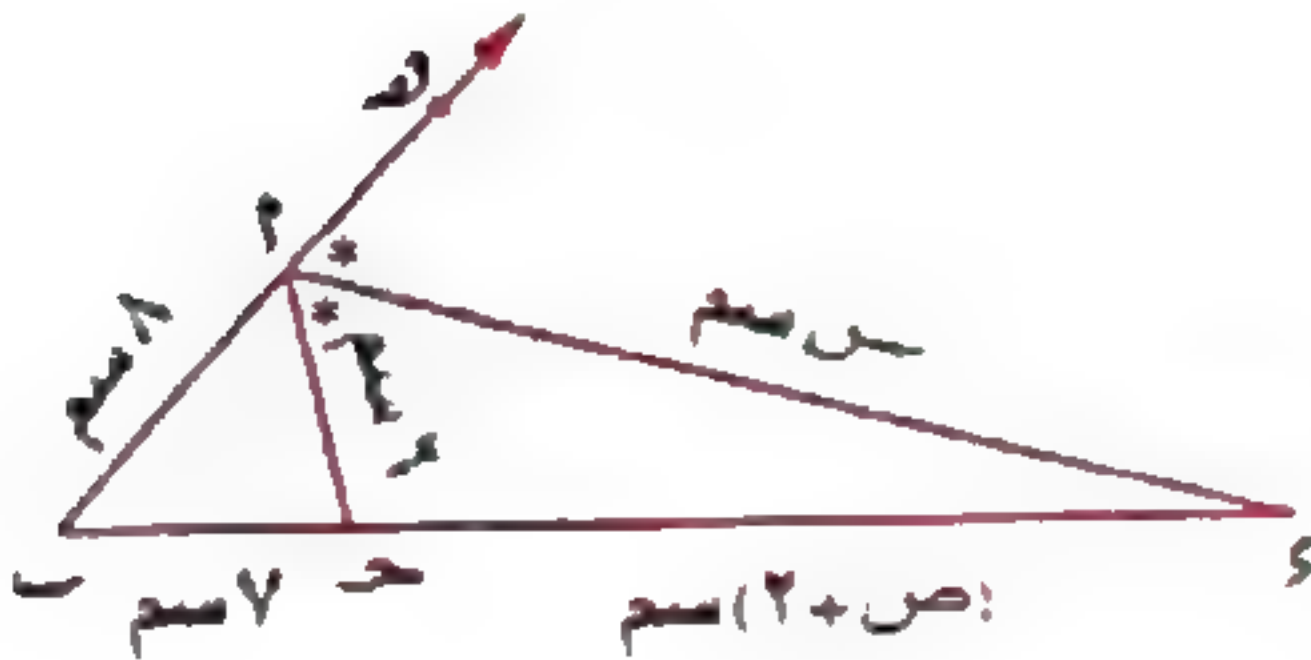
إذا كان : $\overrightarrow{أ د}$ ينصف د ب أ ح من الخارج ويقطع ب ح في د

$$\text{فإن : } أ د = \sqrt{أ ب \times أ ح - د ب \times د ح}$$

مثال 7

في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٧ سم ، أ ح = ٦ سم ، $\overrightarrow{أ د}$ ينصف د أ الخارجة أوجد : قيمة كل من س ، ص



الحل

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{أ د} \text{ ينصف د أ الخارجة} & \therefore \frac{أ ب}{أ ح} = \frac{د ب}{د ح} \\ \therefore \frac{8}{6} = \frac{د ب}{د ح} & \therefore د ب = \frac{4}{3} د ح \\ \therefore \frac{8}{6} = \frac{9 + ص}{2 + ص} & \therefore 8(2 + ص) = 6(9 + ص) \\ 16 + 8ص = 54 + 6ص & \therefore 2ص = 38 \\ \therefore ص = 19 & \therefore د ح = 21 \text{ سم ، د ب = } 28 \text{ سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore أ د = \sqrt{أ ب \times أ ح - د ب \times د ح} & = \sqrt{8 \times 6 - 21 \times 28} = \sqrt{48 - 588} = \sqrt{-540} \\ \therefore أ د = 10\sqrt{6} & \therefore س = 10\sqrt{6} \end{aligned}$$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٢٧ سم ، أ ح = ١٥ سم ، رسم $\overrightarrow{أ د}$ ينصف د أ ويقطع ب ح في د ، فإذا كان : ب د = ١٨ سم فأوجد : طول أ د

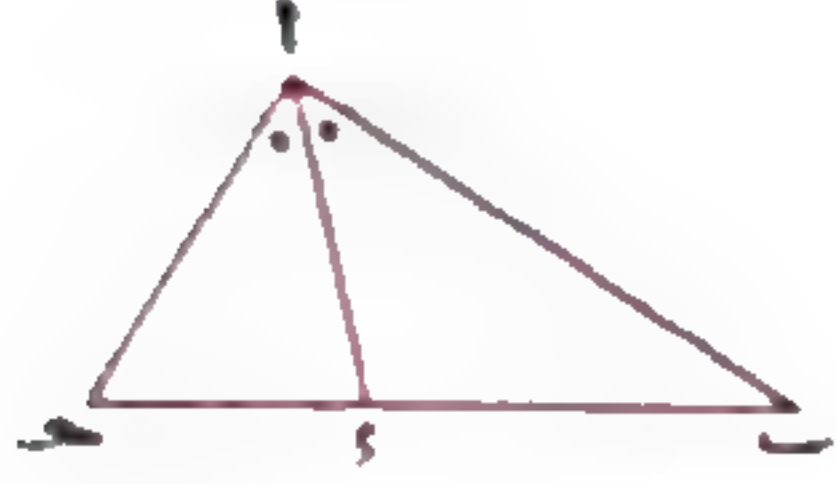


على منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة

من أسئلة الكتاب المدرسي



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) في الشكل المقابل :

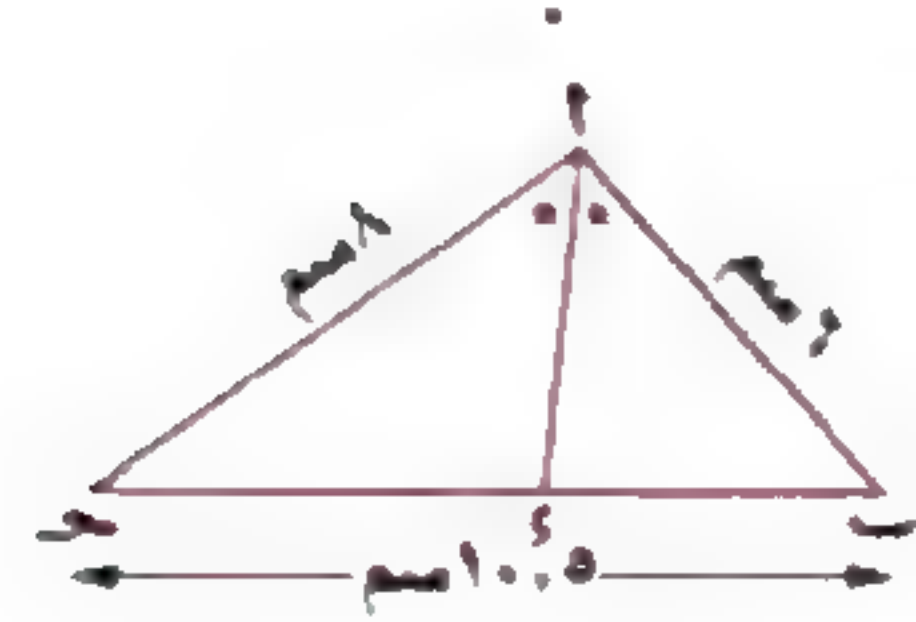
إذا كان : \overline{AD} ينصف \overline{BC} فإن : $AB \times AC = \dots\dots\dots$

(د) $AB \times AC$

(ج) $AD \times BC$

(ب) AD^2

(أ) $AD \times AC$



(٢) في الشكل المقابل :

$BC = \dots\dots\dots$ سم

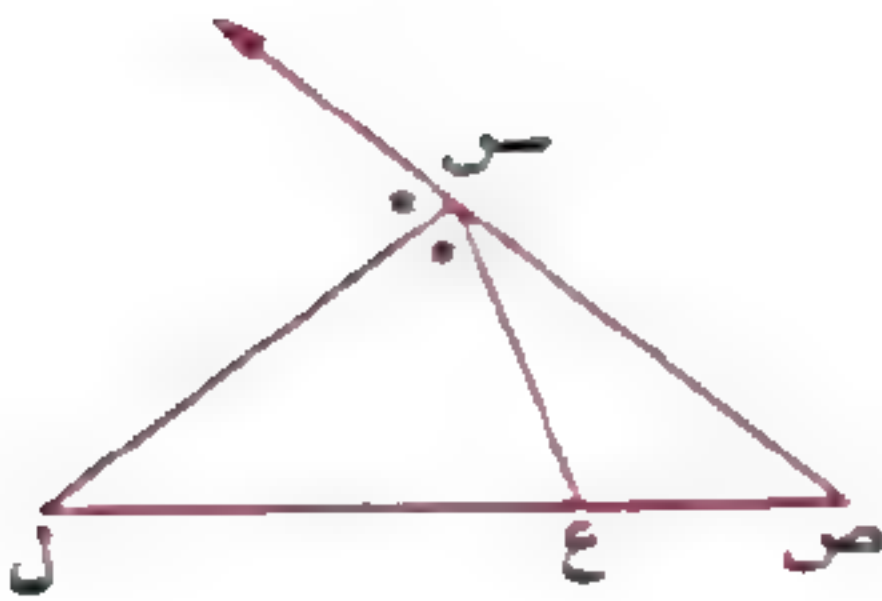
(أ) ٤

(ب) $\frac{2}{3}$

(ج) ٤, ٥

(د) ٤٥

(٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : \overline{DL} ينصف \overline{DF} الخارجة فإن : $\frac{AL}{CL} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{AL}{CL}$

(ب) $\frac{AL}{CL}$

(د) $\frac{AL}{CL}$

(ج) $\frac{AL}{CL}$

(٤) في الشكل المقابل :



$BC = \dots\dots\dots$ سم

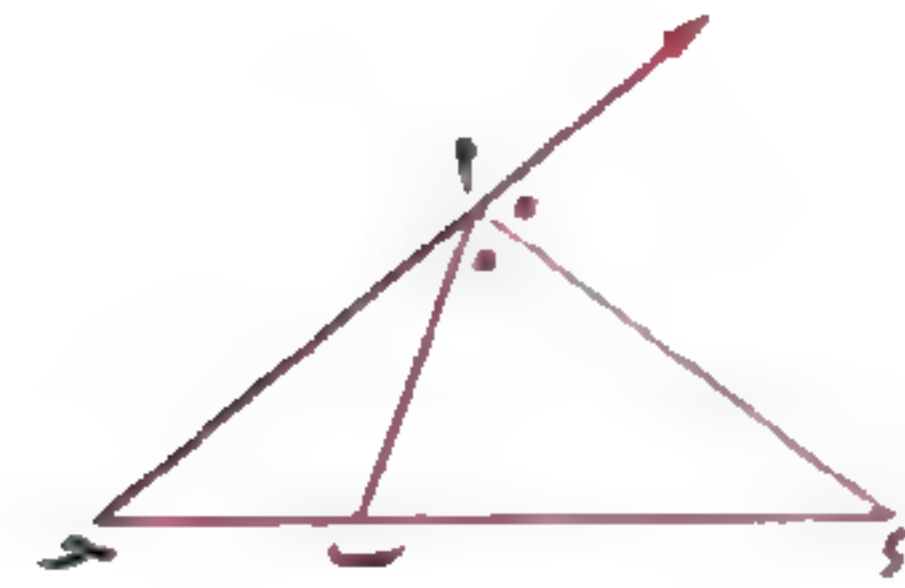
(أ) ٢

(ب) ٦

(ج) ٤

(د) ٨

(٥) في الشكل المقابل :



إذا كان $AB : AC = 2 : 3$

فإن $BD : DC = \dots\dots\dots$

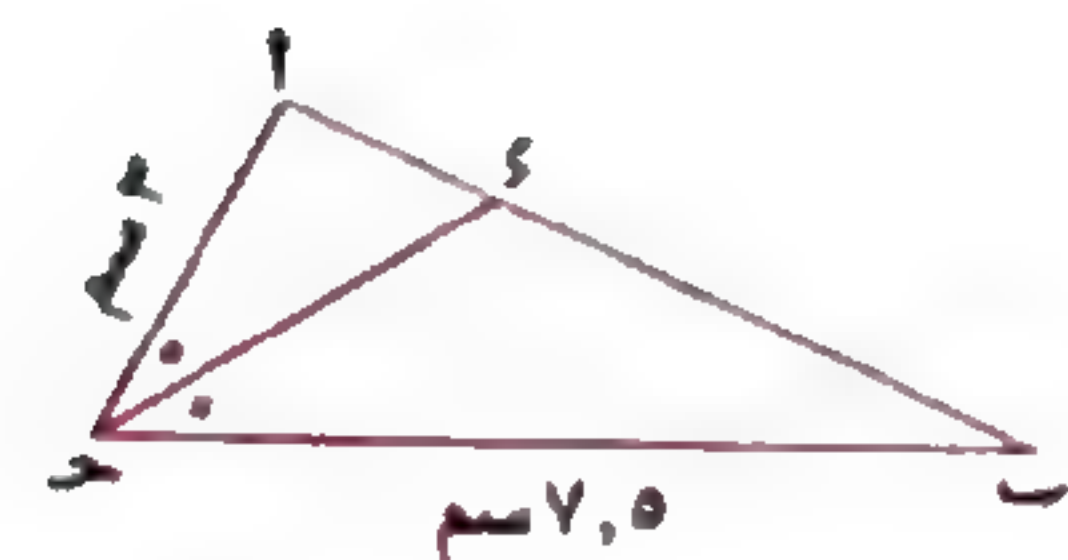
(أ) ١ : ٢

(ب) $\frac{2}{3}$

(ج) $\frac{2}{3}$

(د) $\frac{1}{3}$

(٦) في الشكل المقابل :



إذا كان : \overline{AD} ينصف \overline{BC} ، $AD = 3$ سم

$BC = 7,5$ سم

فإن $AD : BC = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{2}{5}$

(ب) $\frac{2}{3}$

(ج) ٥ : ٢

(د) ٢ : ٥

(٧) في الشكل المقابل :

$\triangle ABC$ فيه AD ، AD المنصفان الداخلي والخارجي

للزاوية عند الرأس A على الترتيب، و $\angle D = 36^\circ$

فإن : و $\angle D = \dots\dots\dots^\circ$

(١) ٣٦

(ب) ٤٠

(ج) ٥٤

(د) ١٠٨

(٨) في الشكل المقابل :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

(١) $\frac{4}{3}$

(ج) $\frac{2}{3}$

(ب) $\frac{8}{5}$

(د) $\frac{2}{4}$

(٩) في الشكل المقابل :

$$AD = \dots\dots\dots \text{سم}$$

(١) $5\frac{5}{7}$

(ج) ٥

(ب) $6\frac{2}{4}$

(د) $\frac{4}{3}$

(١٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : $AD = 3$ و $DB = 2$

فإن $AB : AC = \dots\dots\dots$

(١) ١ : ٣

(ب) ٢ : ١

(ج) ٣ : ٤

(د) ١ : ٢

(١١) في الشكل المقابل :

$$AD = \dots\dots\dots \text{سم}$$

(١) ٣

(ب) ٤

(ج) ٦

(د) ٨

(١٢) في الشكل المقابل :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

(١) $\frac{1}{2}$

(ب) ٢

(ج) $\frac{1}{3}$

(د) ٢

(١٣) في الشكل المقابل :

إذا كان $AD : DB = 3 : 5$ و $AC = 7$

فإن $AB : AC = \dots\dots\dots$

(١) $\frac{5}{3}$

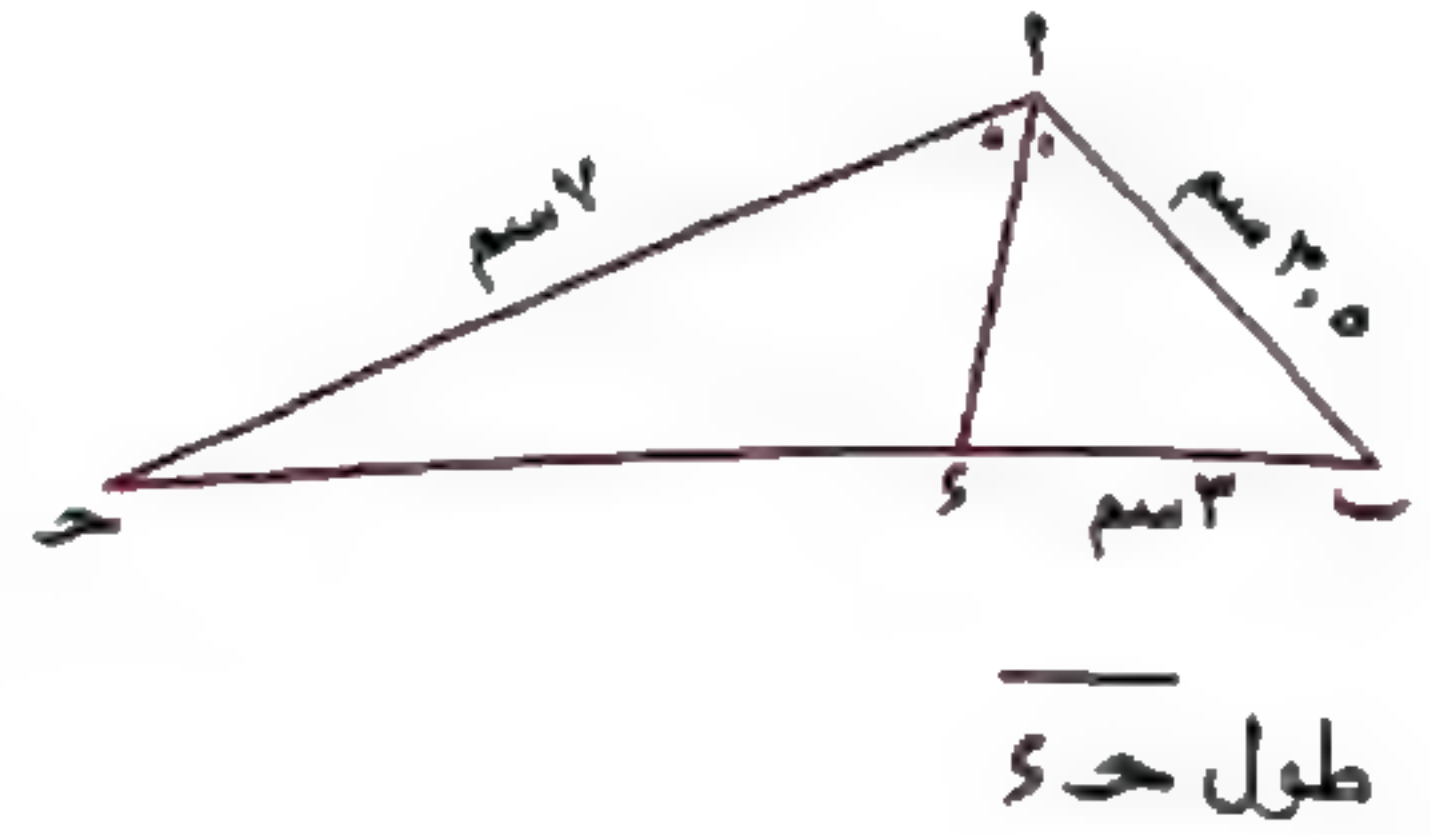
(ب) $\frac{5}{7}$

(ج) $\frac{2}{5}$

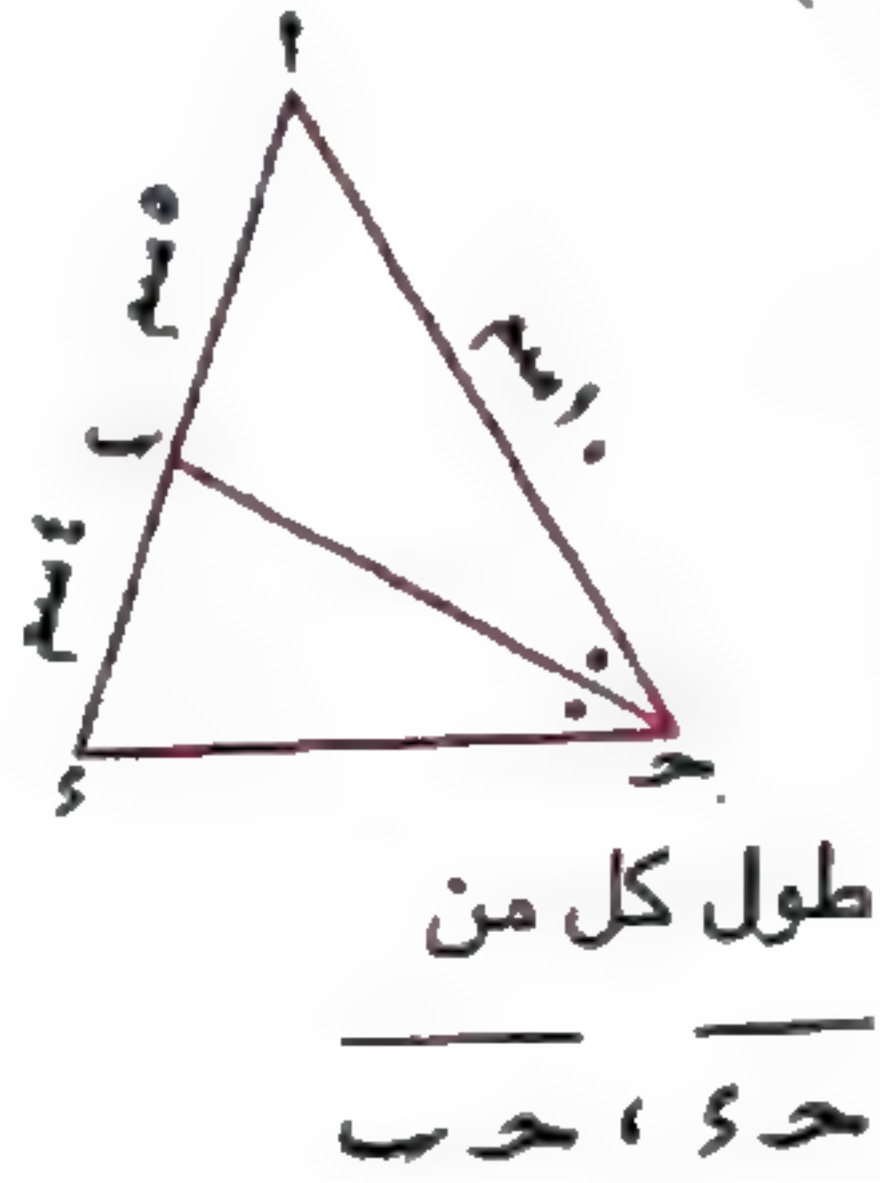
(د) $\frac{3}{7}$

أوجد المطلوب أسفل كل شكل من الأشكال التالية :

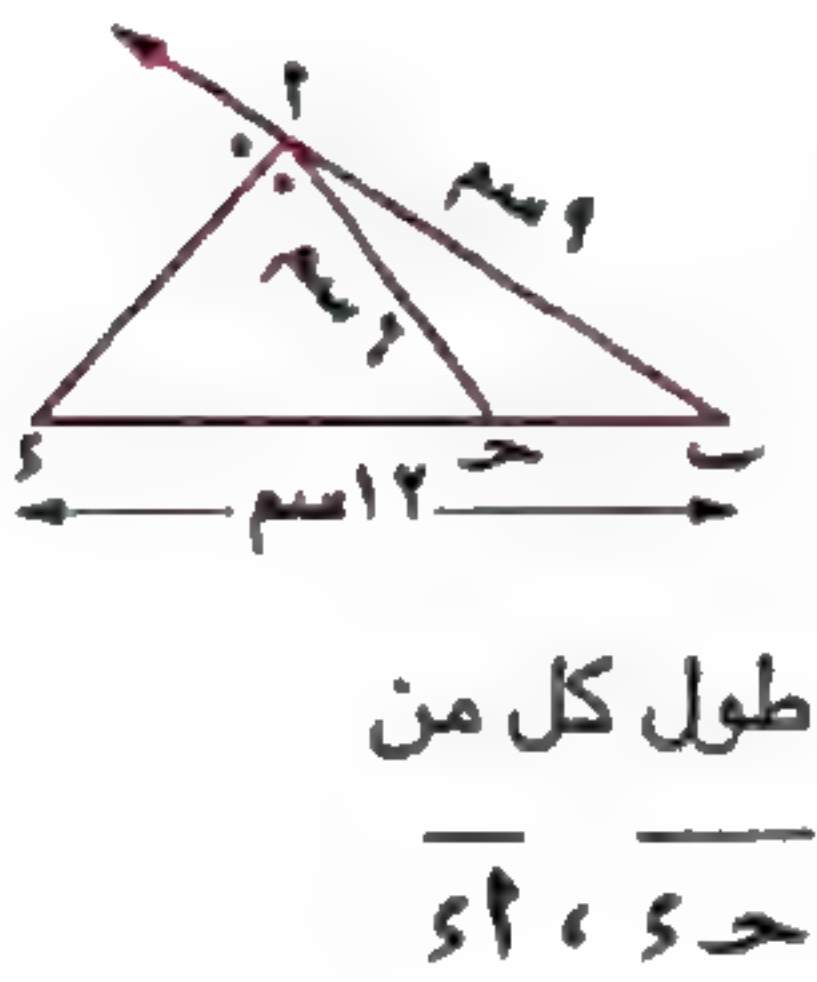
(١)



(٢)

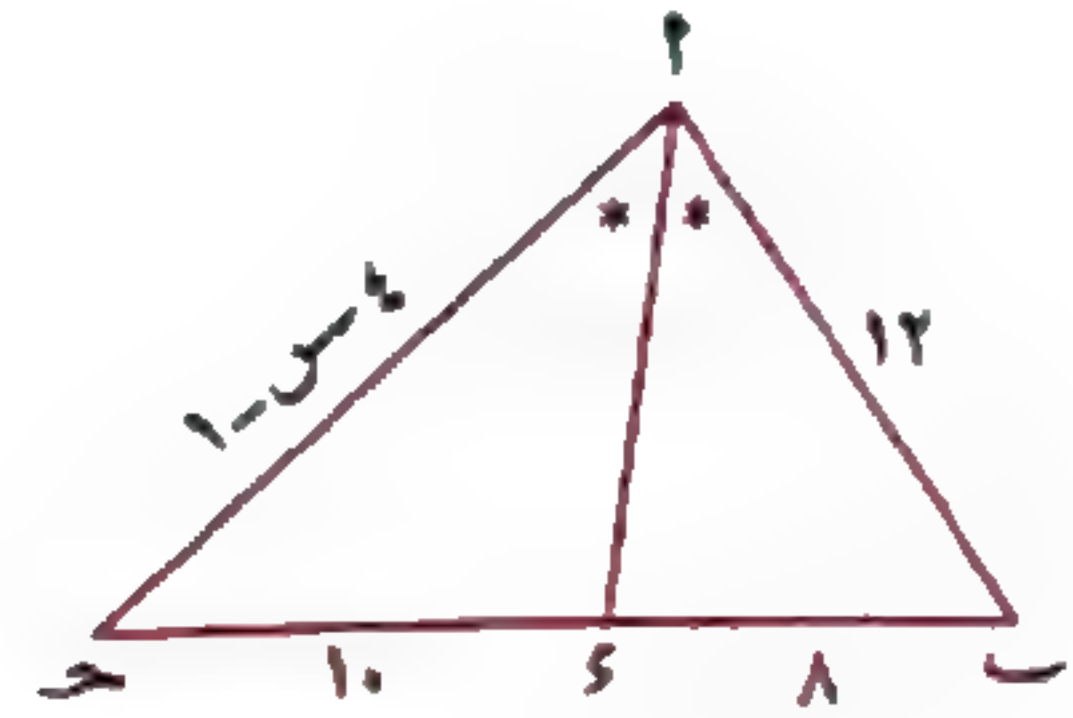


(٣)



في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة x (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

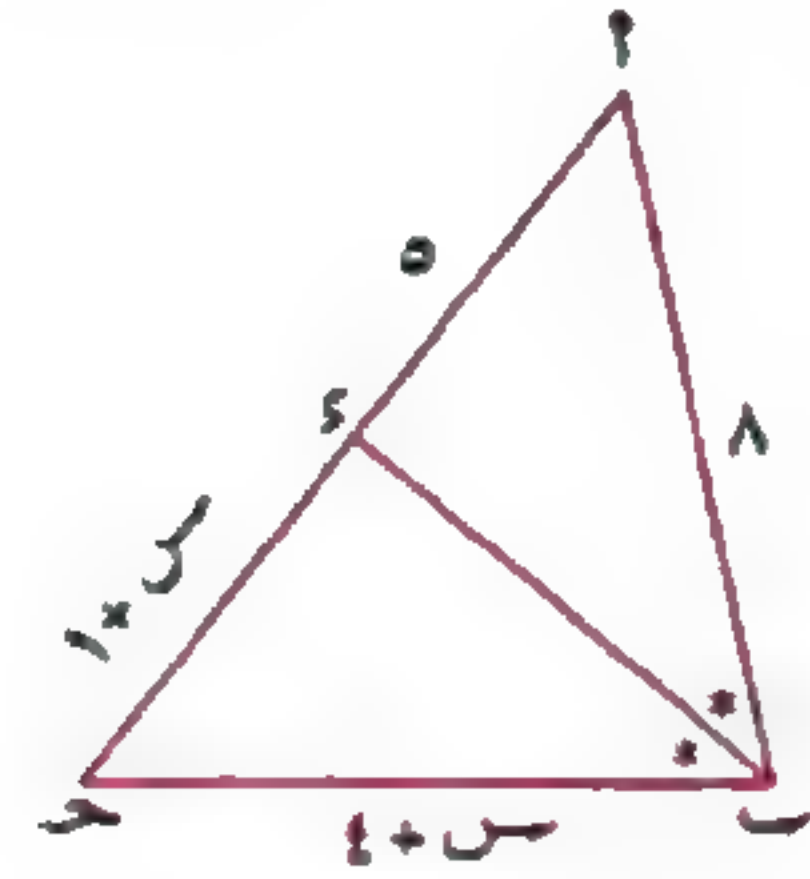
(١)



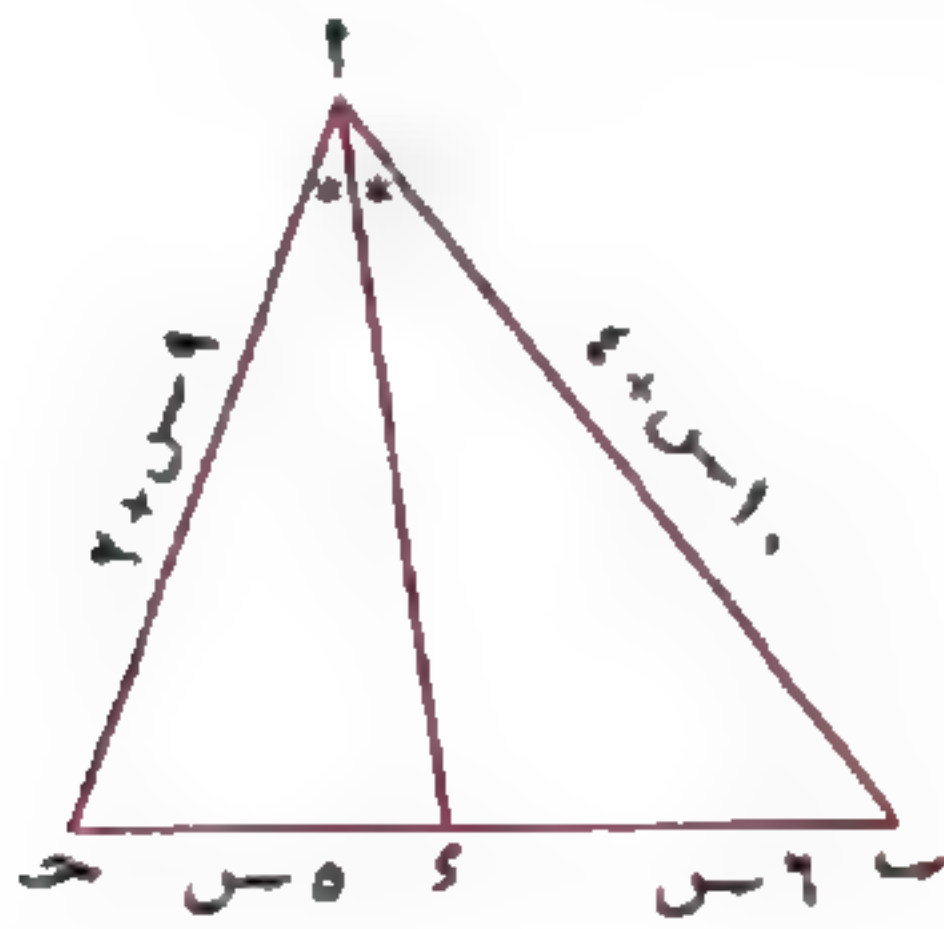
(٢)



(٣)

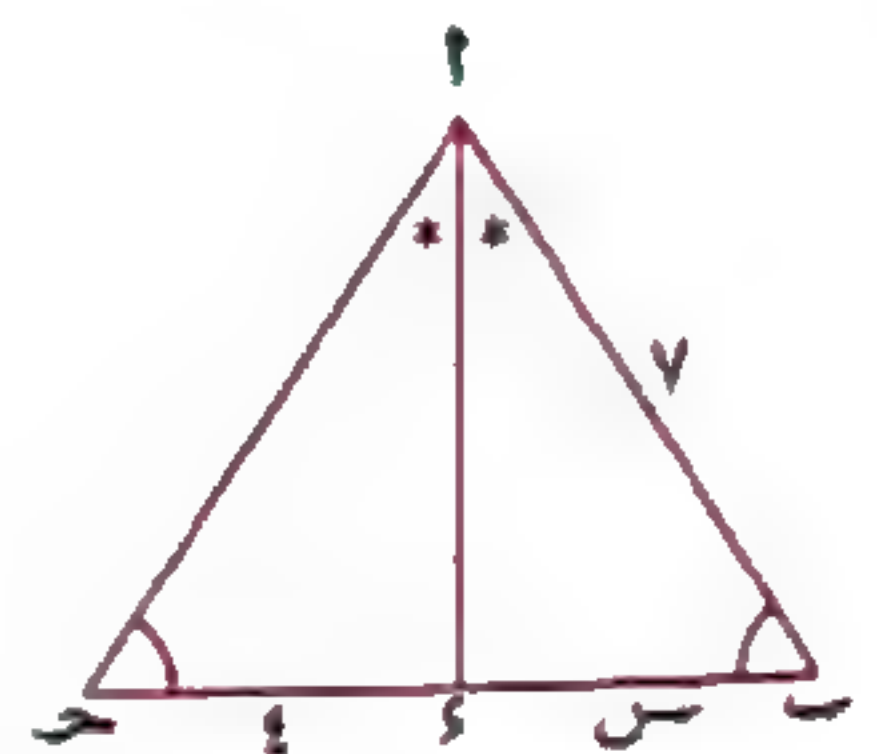


(٤)

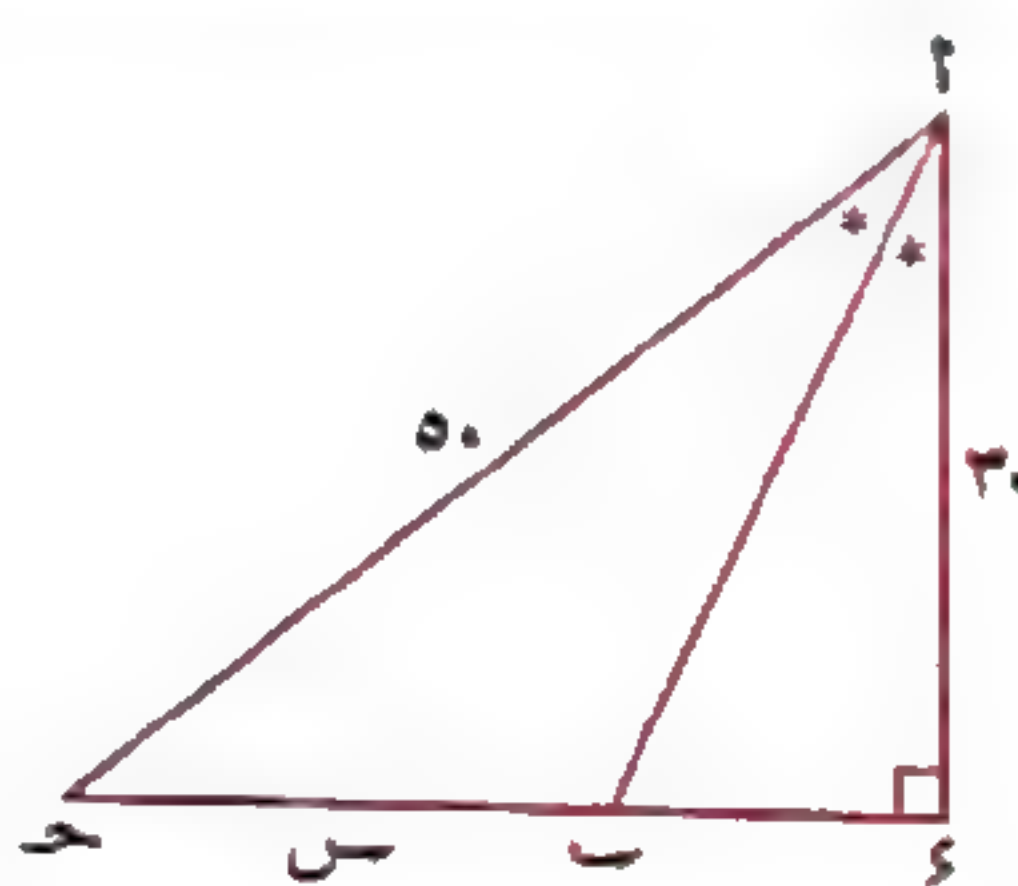


في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة x (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) ثم أوجد محيط $\triangle ABC$:

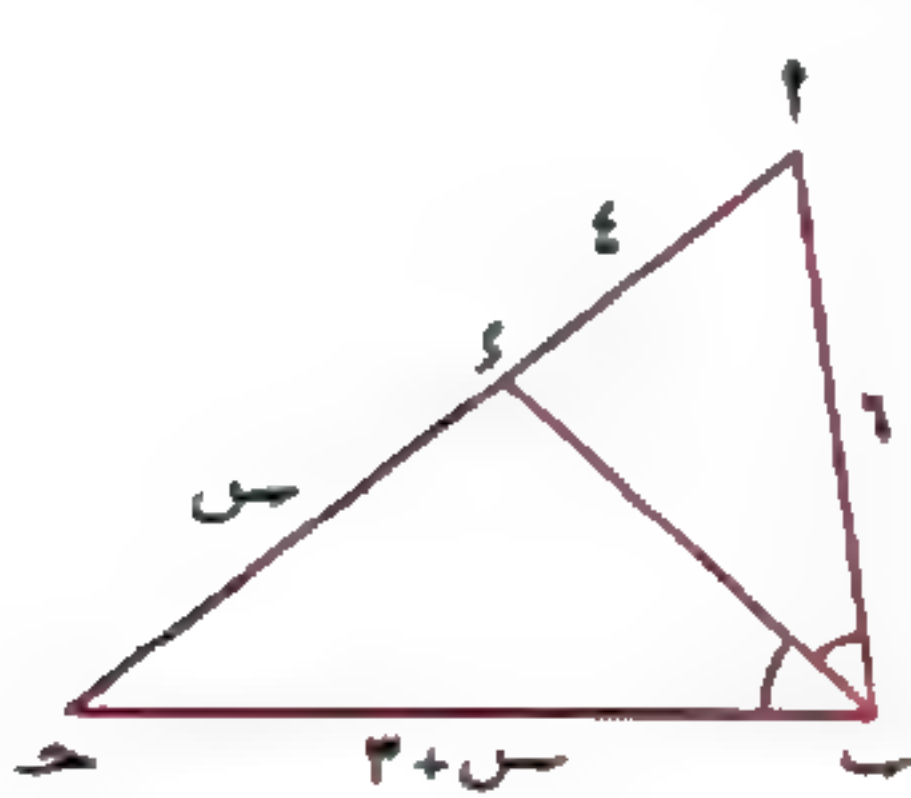
(١)



(٢)

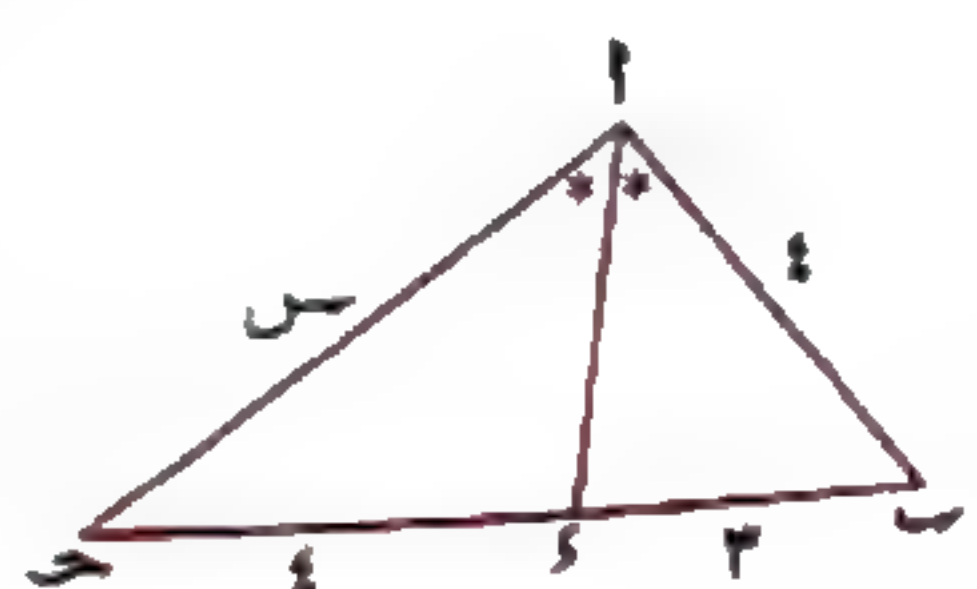


(٣)

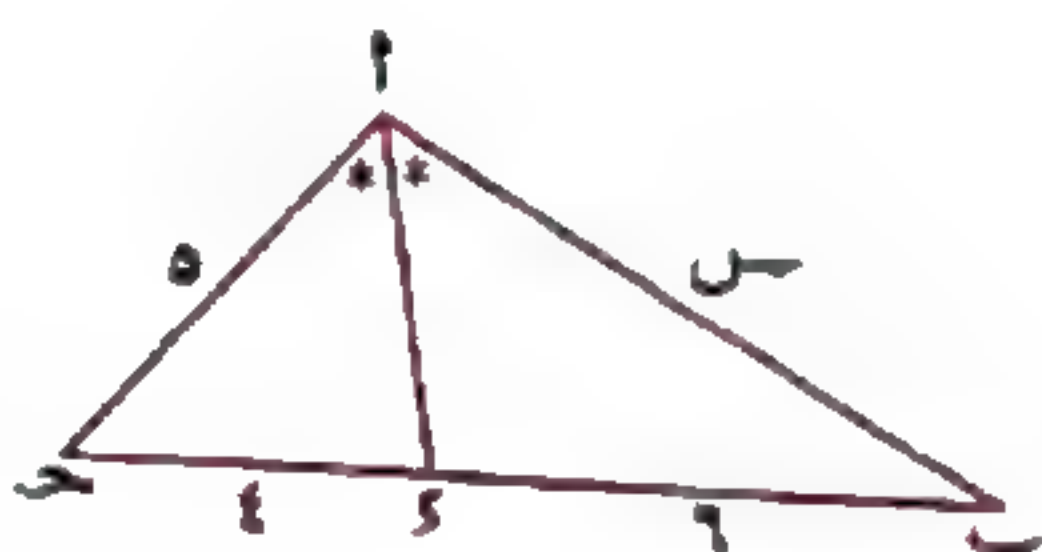


في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة x وطول AD :

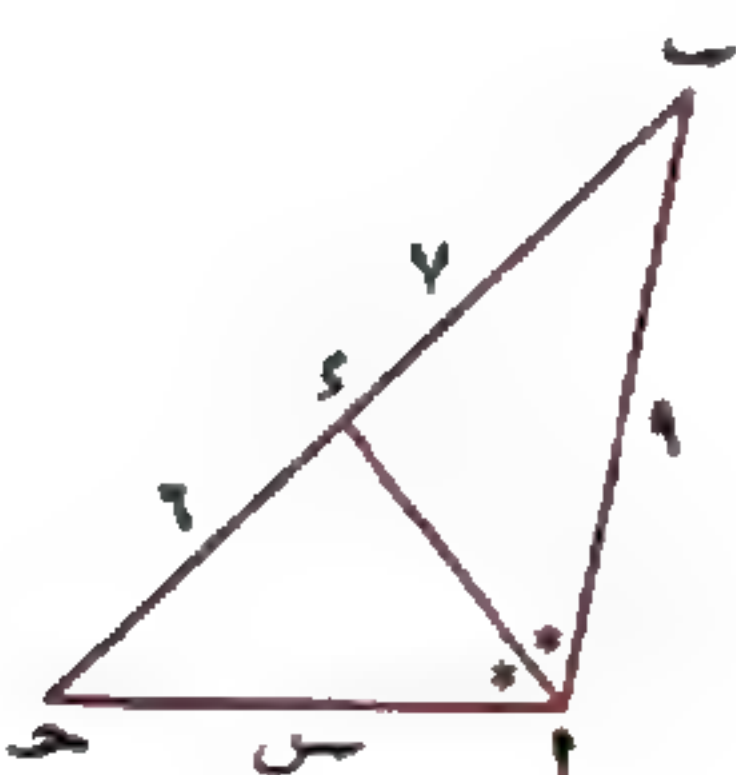
(١)



(٢)

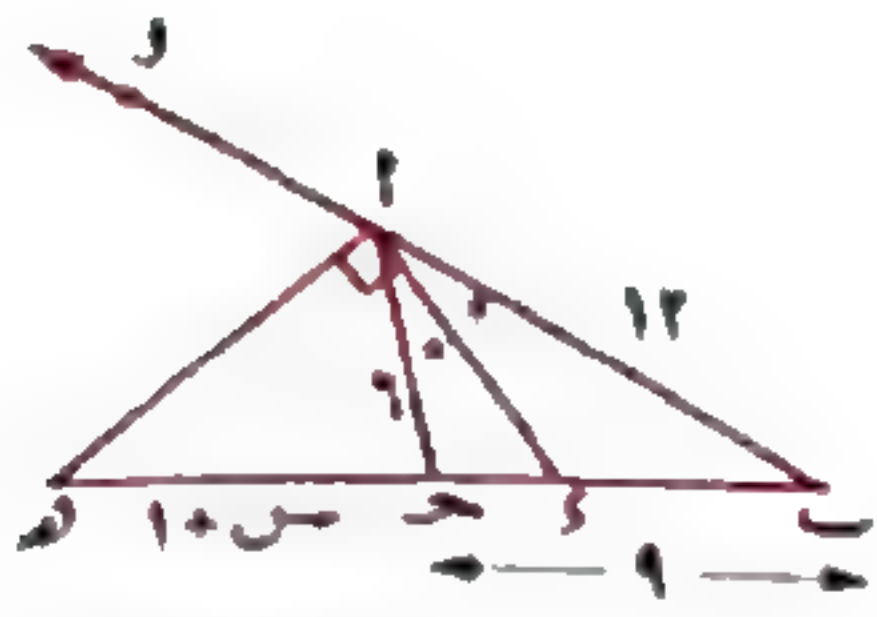


(٣)

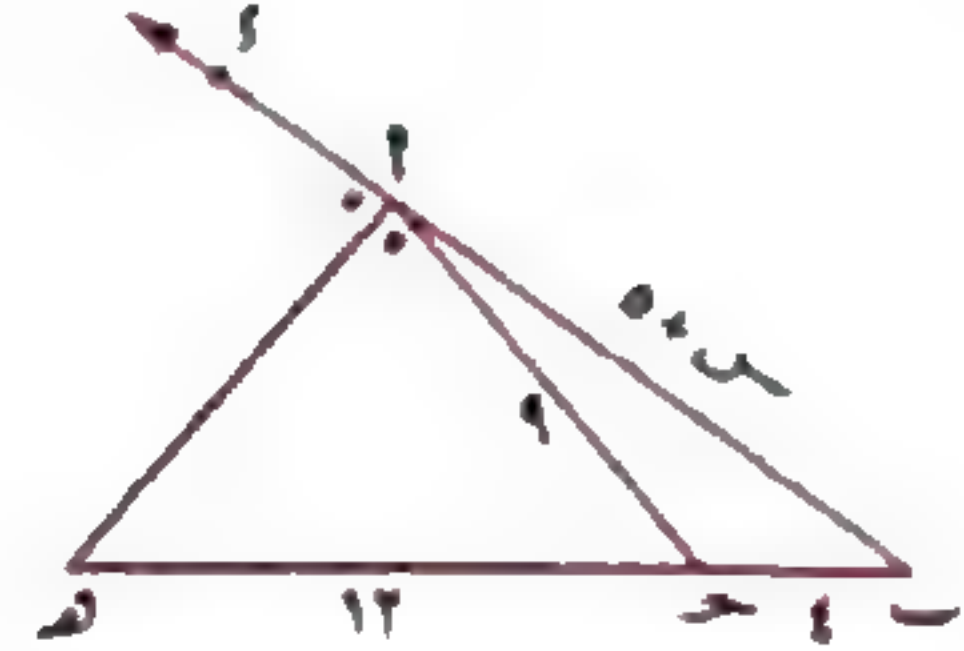


٦ في كل من الشكلين التاليين (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة x وطول AD :

(٢)



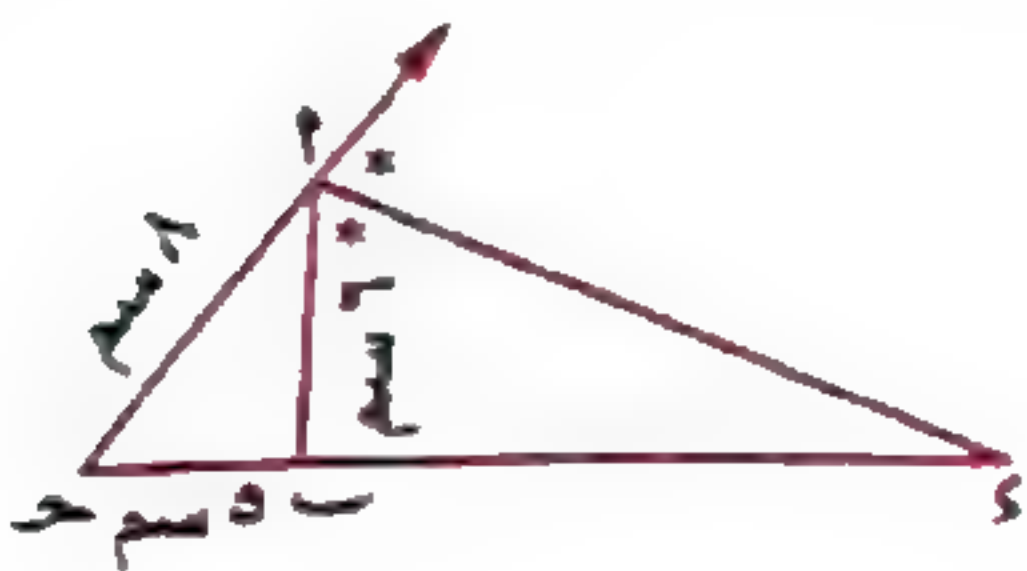
(١)



٧ AB مثلث فيه : $AB = 4$ سم ، $BC = 6$ سم ، رسم DE ينصف AB ويقطع AC في E ، فإذا كان : $AE = 2$ ، $EC = 4$ سم فأوجد : طول AD ، 6 سم.

٨ AB مثلث فيه : $AB = 8$ سم ، $AC = 6$ سم ، $BC = 7$ سم ، DE ينصف AB ويقطع AC في E ، أوجد : طول كل من DE ، EC ، 2 سم ، 4 سم.

٩ في الشكل المقابل :



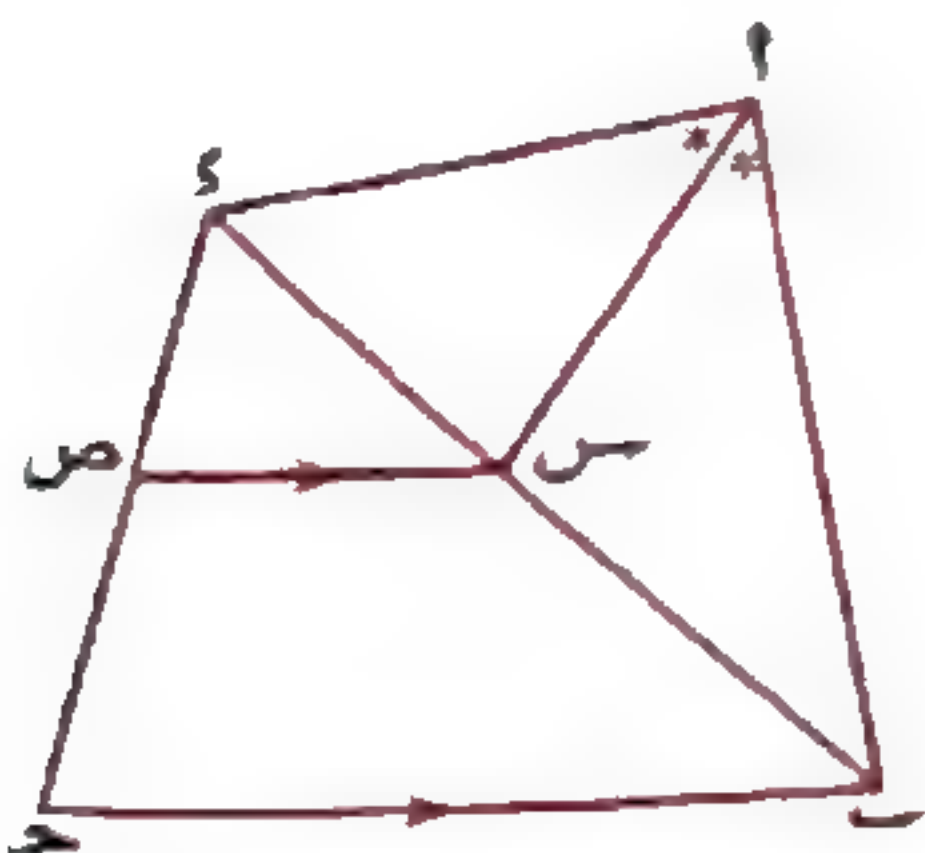
المثلث ABC فيه : DE ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند A ، ويقطع BC في E ، فإذا كان : $AB = 6$ سم ،

$AC = 8$ سم ، $BC = 5$ سم أوجد : طول كل من DE ، AE ، 15 سم ، 6 ، 7 سم.

١٠ AB مثلث فيه : $AB = 2$ سم ، $BC = 4$ سم ، $AC = 6$ سم ، نصفت الزاوية الخارجة عند A بالمنصف DE الذي قطع BC في E ، أوجد : طول كل من DE ، AE ، 8 سم ، 14 سم.

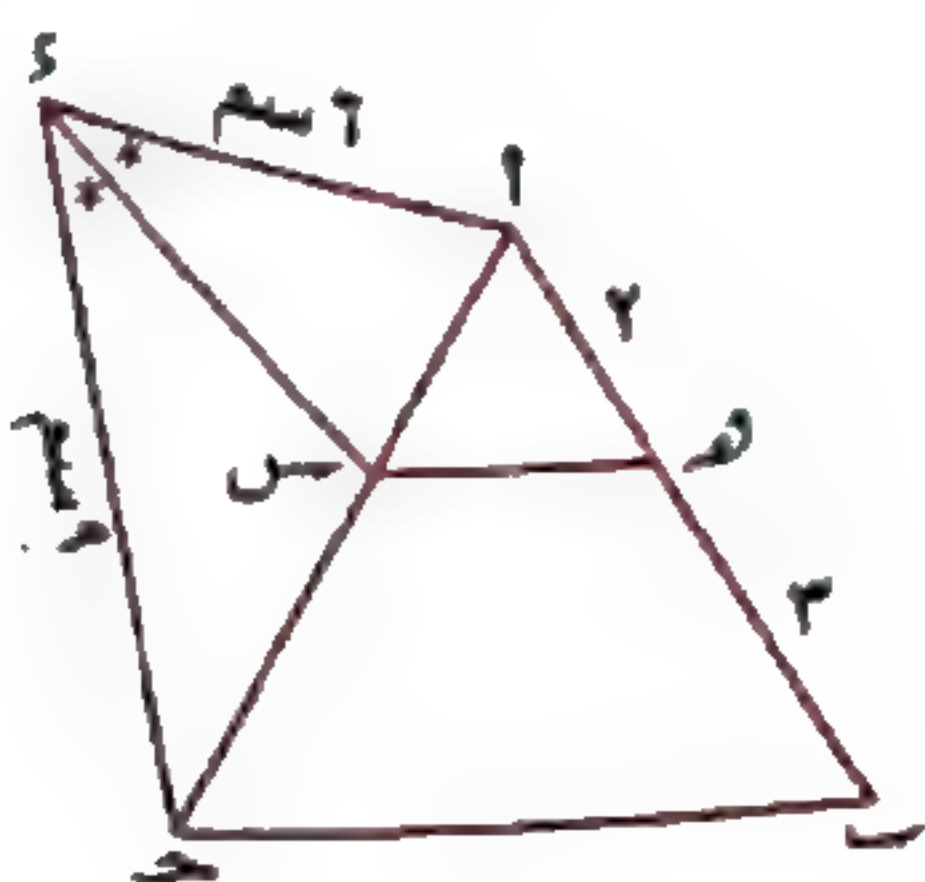
١١ AB مثلث محيطه 27 سم ، رسم DE ينصف AB ويقطع AC في E ، إذا كان $AE = 4$ سم ، $EC = 5$ سم أوجد : طول كل من AB ، BC ، DE ، 8 سم ، 10 سم ، 2 ، 15 سم.

١٢ في الشكل المقابل :



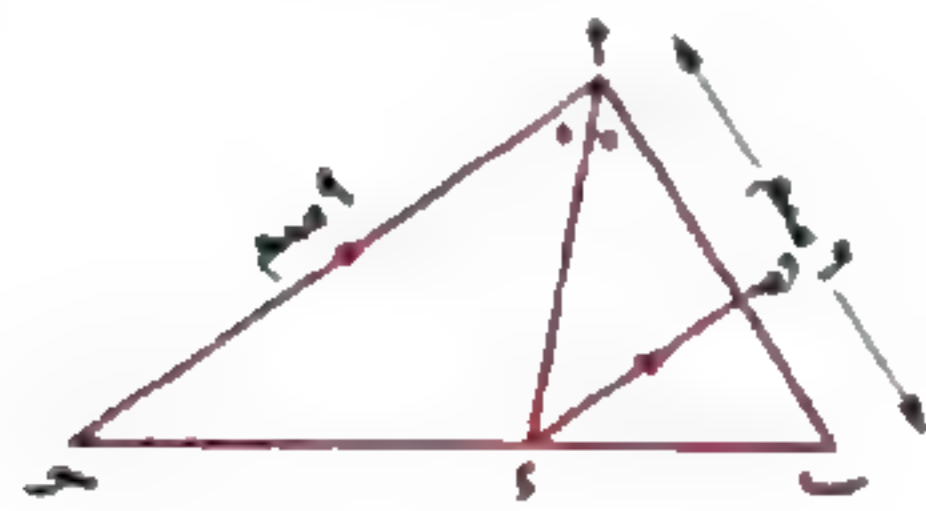
AB CD شكل رباعي ، رسم DE ينصف AD ، ويقطع BC في E ، ثم رسم DE // BC ، قاطعاً CD في F أثبت أن : $\frac{DE}{AB} = \frac{CF}{CD}$

١٣ في الشكل المقابل :



AB CD شكل رباعي فيه : DE ينصف AD ، $AE = 2$ ، $EC = 6$ سم ، $BC = 9$ سم ، أثبت أن : DE // BC

الدرس الثالث



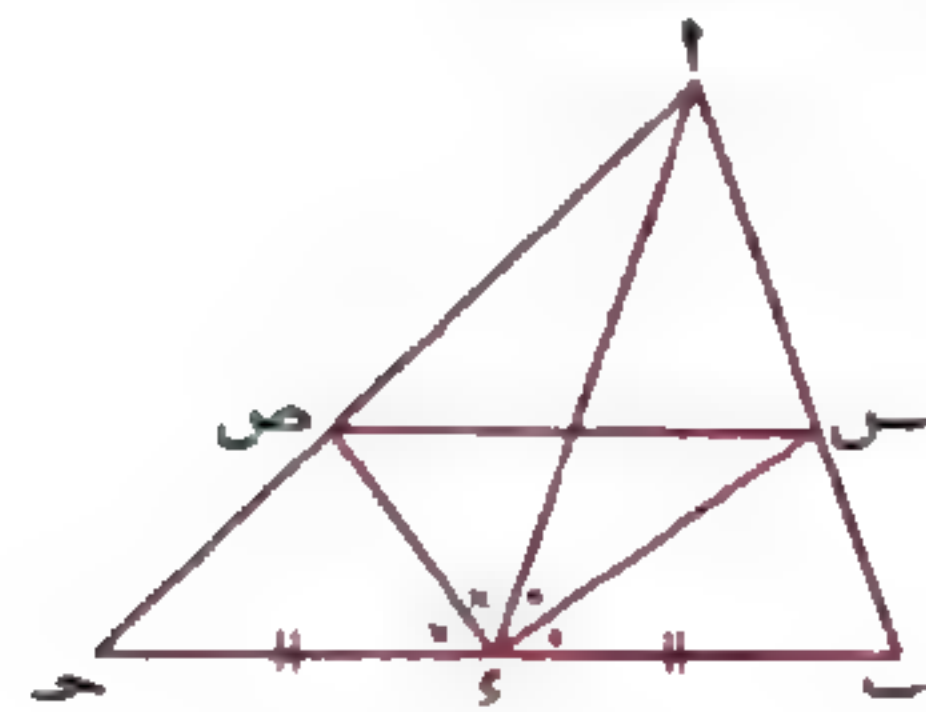
«سم ٢.٤ ، سم ٢.٦»

١٤ في الشكل المقابل :

أد ينصف د ب أ ح ، د ه // ا ح

أثبت أن : $\frac{ب ا}{ا ح} = \frac{د ه}{ه ا}$ وإذا كان : ا ح = ٩ سم ، ا ب = ٦ سم

أوجد : طول كل من ا ه ، ب ه

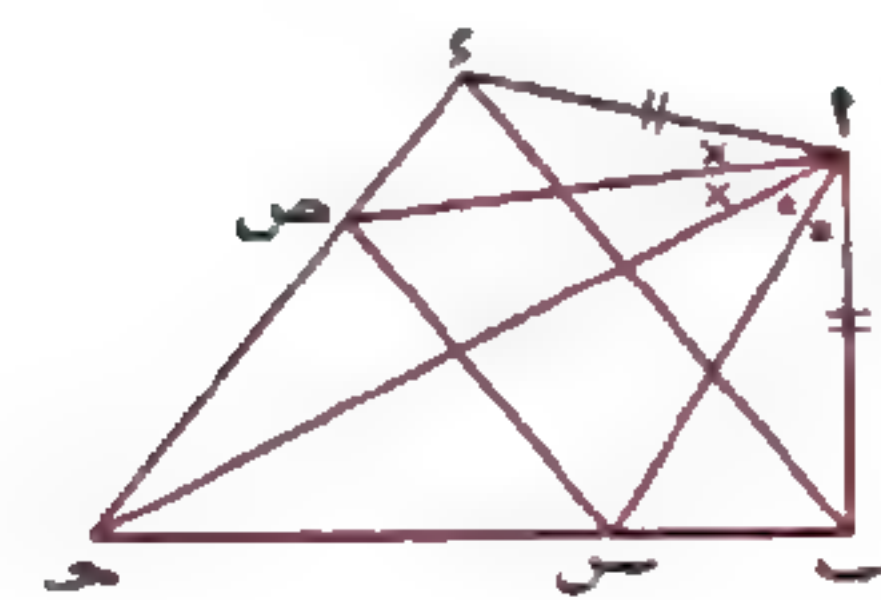


١٥ في الشكل المقابل :

أد متوسط في ا ب ح ، د ه ينصف د ا ب

، د ه ينصف د ا ح

أثبت أن : د ه // ب ح



١٦ في الشكل المقابل :

ا ب ح شكل رباعي فيه : ا ب = ا د

، ا ه ينصف د ب ا ح ويقطع ب ح في ه

، ا ه ينصف د ا ح ويقطع د ه في ص أثبت أن : د ه // ب ح

١٧ ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، رسم أ د ينصف د ا ح ويقطع ب ح في د ، إذا كان طول

ب د = ٢٤ سم ، ب ا : ا ح = ٣ : ٥ فأوجد : محيط ا ب ح «سم ١٩٢»

١٨ ا ب ح مثلث فيه : ا ب = ٨ سم ، ا ح = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم ، رسم أ د ينصف د ا ح

ويقطع ب ح في د ، ورسم ا ه ينصف د ا ح الخارجية ويقطع ب ح في ه

أوجد : طول كل من د ه ، ا ه ، ا د «سم ٨ ، ٦ ، ١٠»

١٩ ا ب ح مثلث فيه : ا ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم ، ا ح = ٦ سم ، رسم أ د ينصف د ا ح

ويقطع ب ح في د ، ورسم ا ه ينصف د ا ح الخارجية ويقطع ب ح في ه

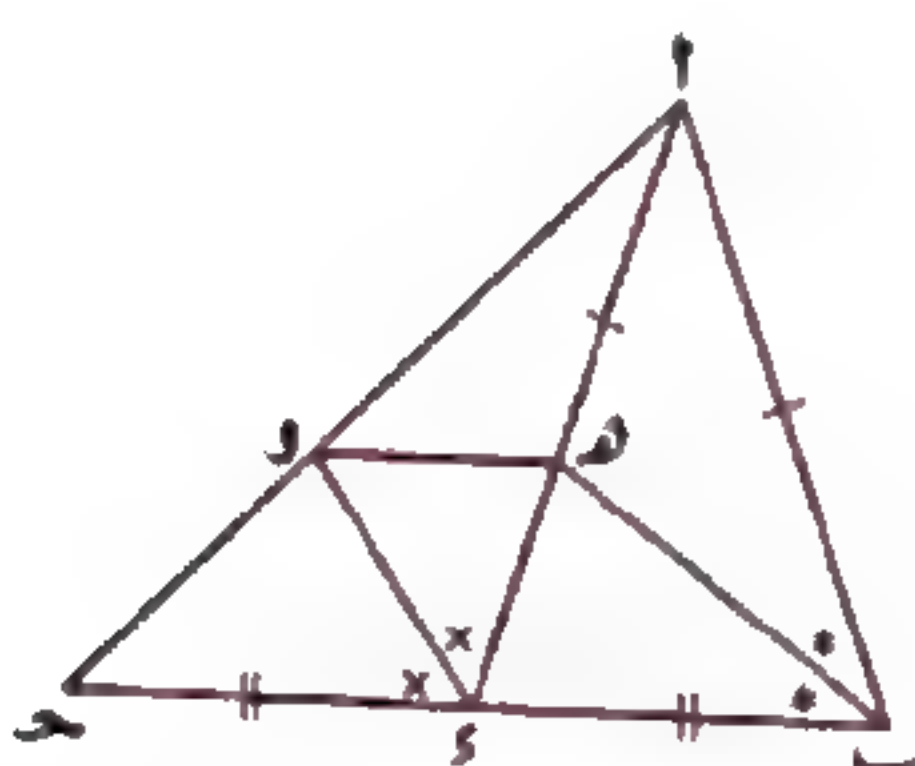
(١) أثبت أن : ا ب متوسط في المثلث ا ح ه

(٢) أوجد النسبة بين مساحة المثلث ا د ه ومساحة المثلث ا ح ه

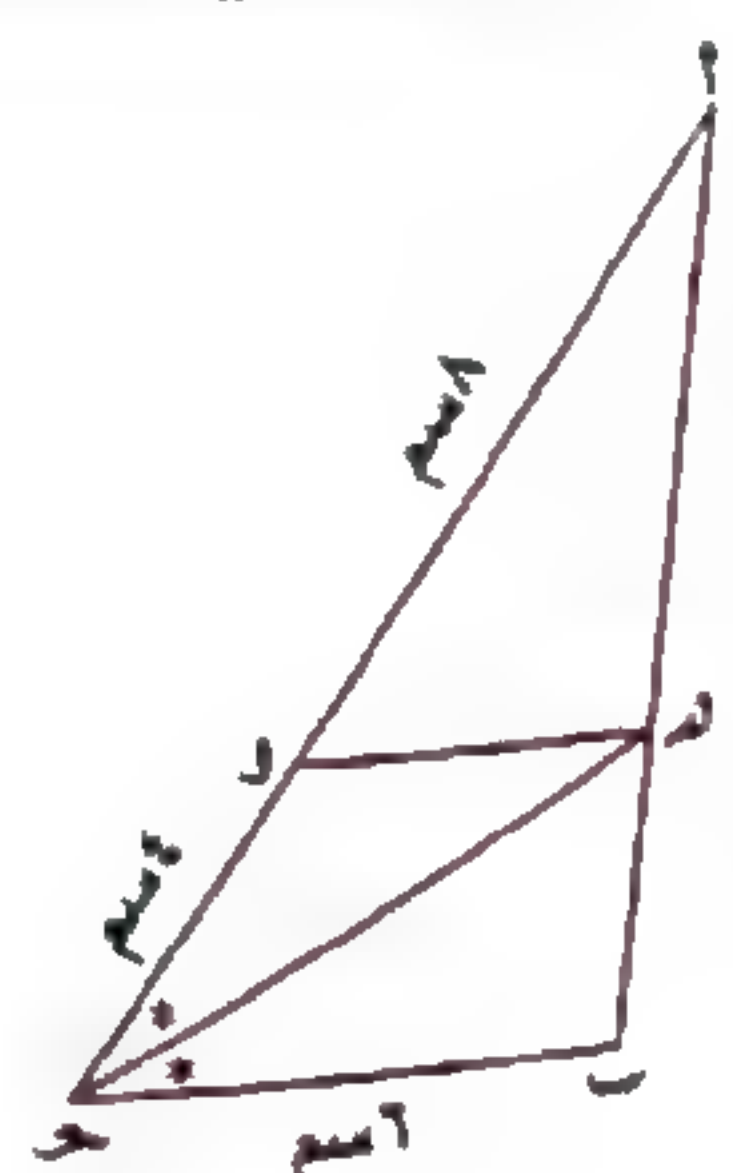
« $\frac{٢}{٣}$ »

٢٠ في كل من الشكلين التاليين أثبت أن : د ه // ب ح

(٢)



(١)



(٥) في الشكل المقابل :

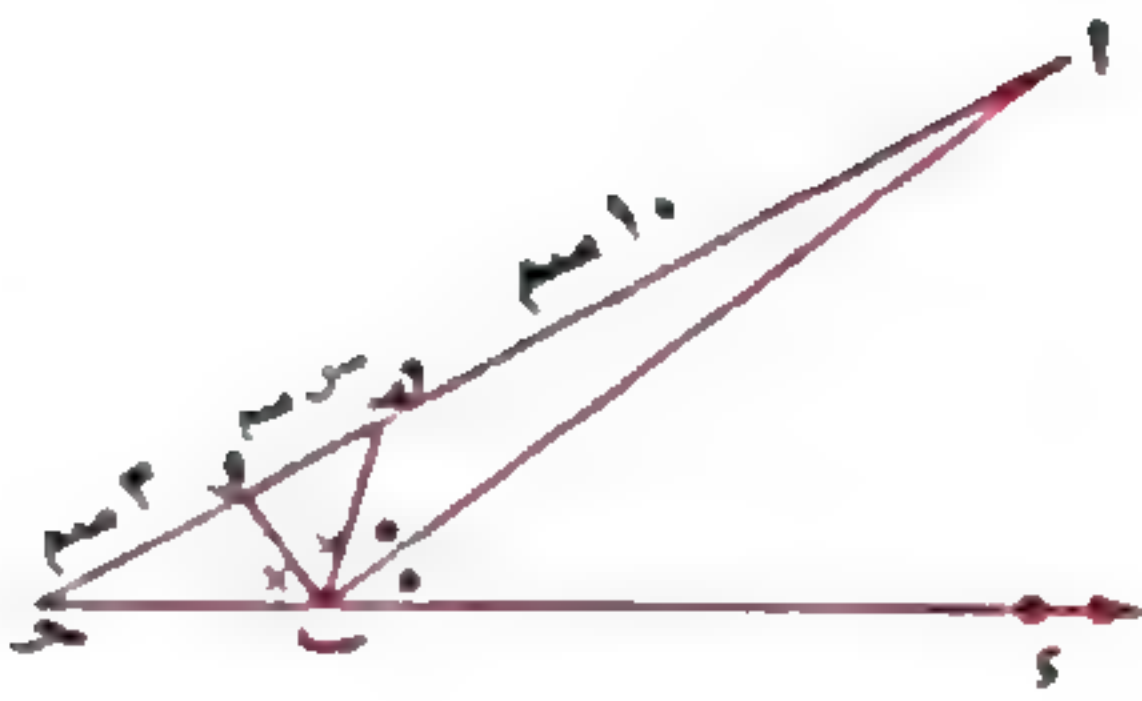
س = سم

(١) ١

(ج) ٣

(ب) ٢

(د) ٤



(٦) في الشكل المقابل :

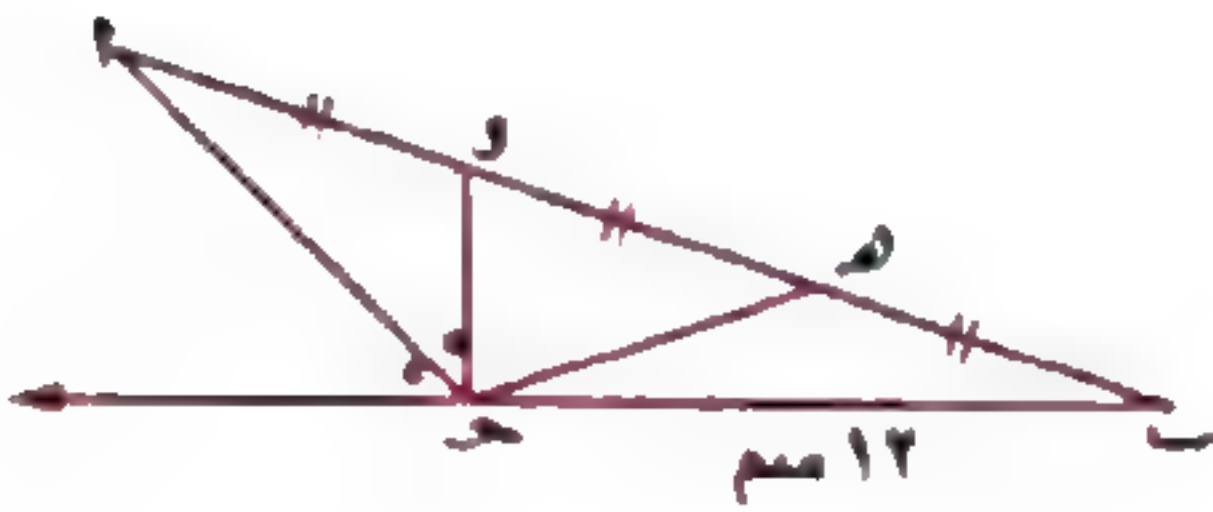
حو = سم

(١) ٣

(ج) ٥

(ب) ٤

(د) ٦



(٧) في الشكل المقابل :

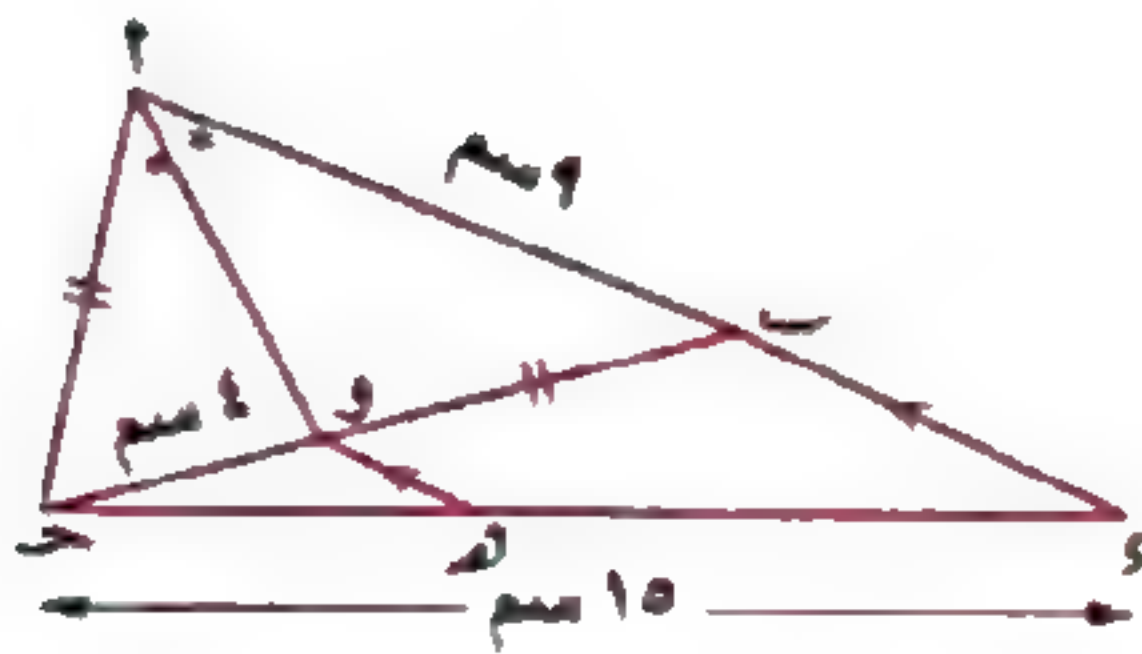
هـ = سم

(١) ٦

(ج) ٩

(ب) ٨

(د) ١٢



(٨) في الشكل المقابل :

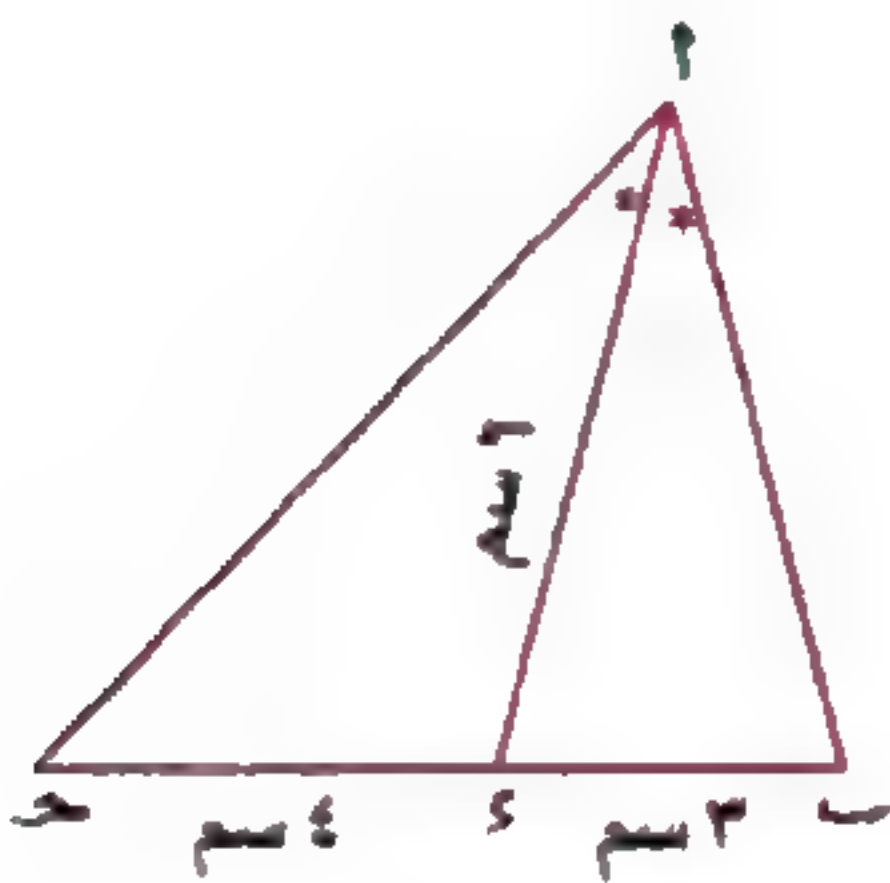
أ = سم

(١) ١٢

(ج) ٩

(ب) ١٠

(د) ٨



(٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{أد}$ ينصف $د$ من الداخل ، $\overrightarrow{أه}$ ينصف $د$ من الخارج

، $أد = ٣$ سم ، $أه = ٤$ سم

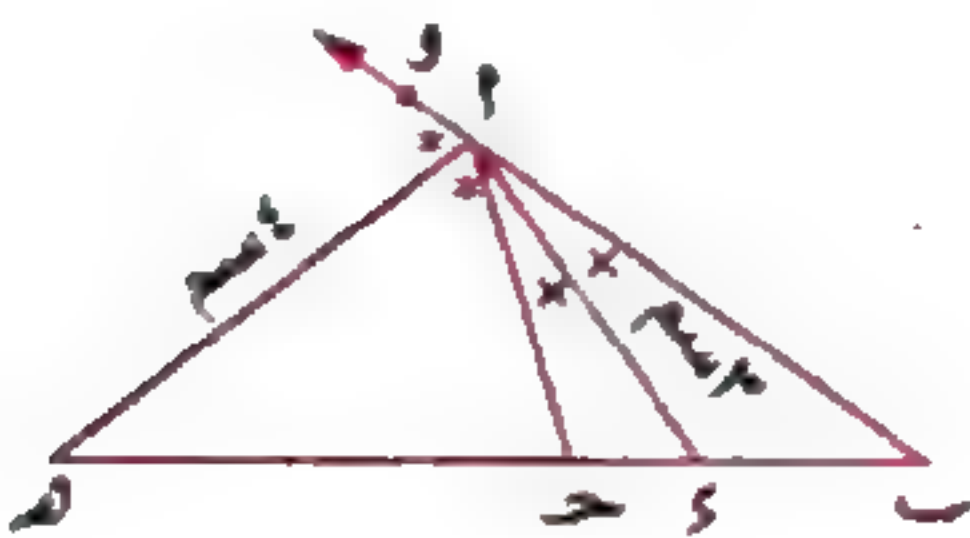
فإن : $د =$ سم

(١) ٣

(ب) ٤

(ج) ٥

(د) ٦



في الشكل المقابل :

س ص // ب ح ، $أس = ٢$ سم

، $سب = ٤$ سم ، $ص ح = ٣$ سم أوجد : طول $أص$

، إذا كان : $\overrightarrow{أه}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند $أ$ ويقطع $ب ح$ في $هـ$

حيث $ح هـ = ١٨$ سم أوجد : طول $ب ح$

« ١,٥ سم ، ٦ سم »



أ ب ح د شكل رباعي فيه : $أب = ب د$ ، $د ح = ح أ$ ، $\overrightarrow{أه}$ ينصف $د ب$ و $\overrightarrow{أد}$ ينصف $ب ح$ في $هـ$ ، $\overrightarrow{د هـ}$ ينصف $د ب$ و $\overrightarrow{هـ و}$ // $د ح$ ، أثبت أن : $هـ و$ // $د ح$

٢٨ في الشكل المقابل :

$\overline{د ه} // \overline{ب ح}$ ، $\overline{أ س}$ ينصف $د ه$

أثبت أن : (١) $\frac{د س}{ه س} = \frac{س ح}{ه ح}$

(٢) $\frac{أ ب}{أ ح} = \frac{\text{مساحة } \triangle د ه س}{\text{مساحة } \triangle أ ه س}$



٢٩ $\overline{أ ب ح}$ متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، رسم $\overline{أ س}$ ينصف $د ه$ ويقطع $ب ه$ في س

، $د ص$ ينصف $د ه$ ويقطع $أ ح$ في ص ، أثبت أن : $\overline{س ص} // \overline{د ه}$

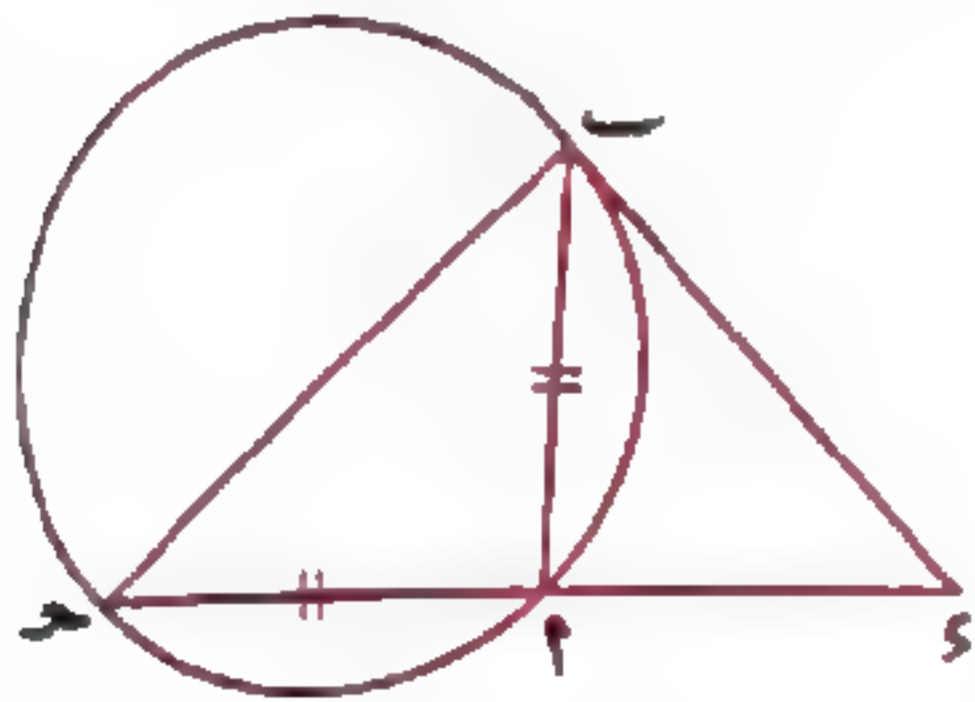
٣٠ $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة ، $د \in \overline{أ ب}$ الأكبر بحيث $\frac{د س}{ب س} = \frac{٢}{٣}$ ، $ه$ منتصف $أ ب$ الأصغر ، رسمت $د ه$ فقطعت $\overline{أ ب}$

في ح أوجد : النسبة بين $م (د ه س)$ ، $م (أ ه س)$

$\frac{٢}{٣}$

٣١ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م ، ح تنتمي إلى الدائرة ، رسم مماس للدائرة عند ح فقطع $\overline{أ ب}$ في ه

وقطع المماس لها عند أ في د أثبت أن : $\frac{أ م}{ه م} = \frac{م ح}{د ه}$



٣٢ في الشكل المقابل :

$أ ب = أ ح$ ، $ب ه$ مماسة للدائرة عند ب

أثبت أن : $أ ب \times أ ح = أ د \times أ ه$

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

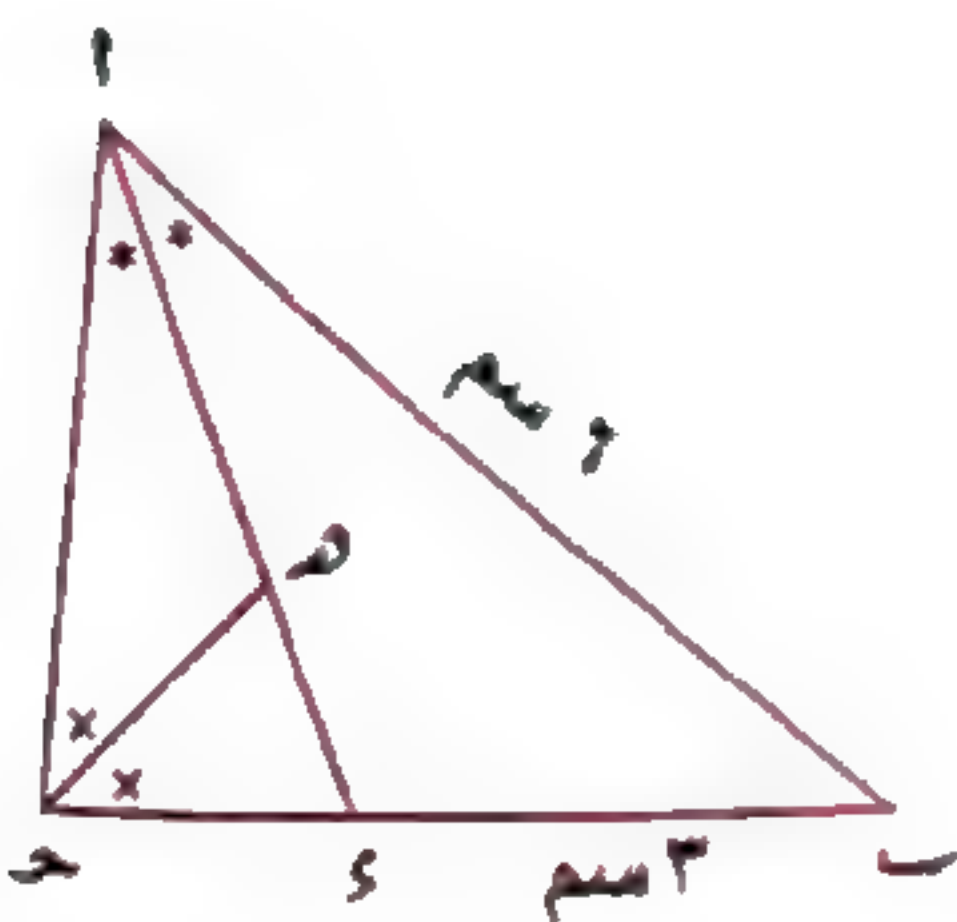
$\frac{أ ه}{د ه} = \dots\dots\dots$

(١) $\frac{١}{٢}$

(ب) ٢

(ج) ٣

(د) $\frac{٢}{٣}$



(٢) في الشكل المقابل :

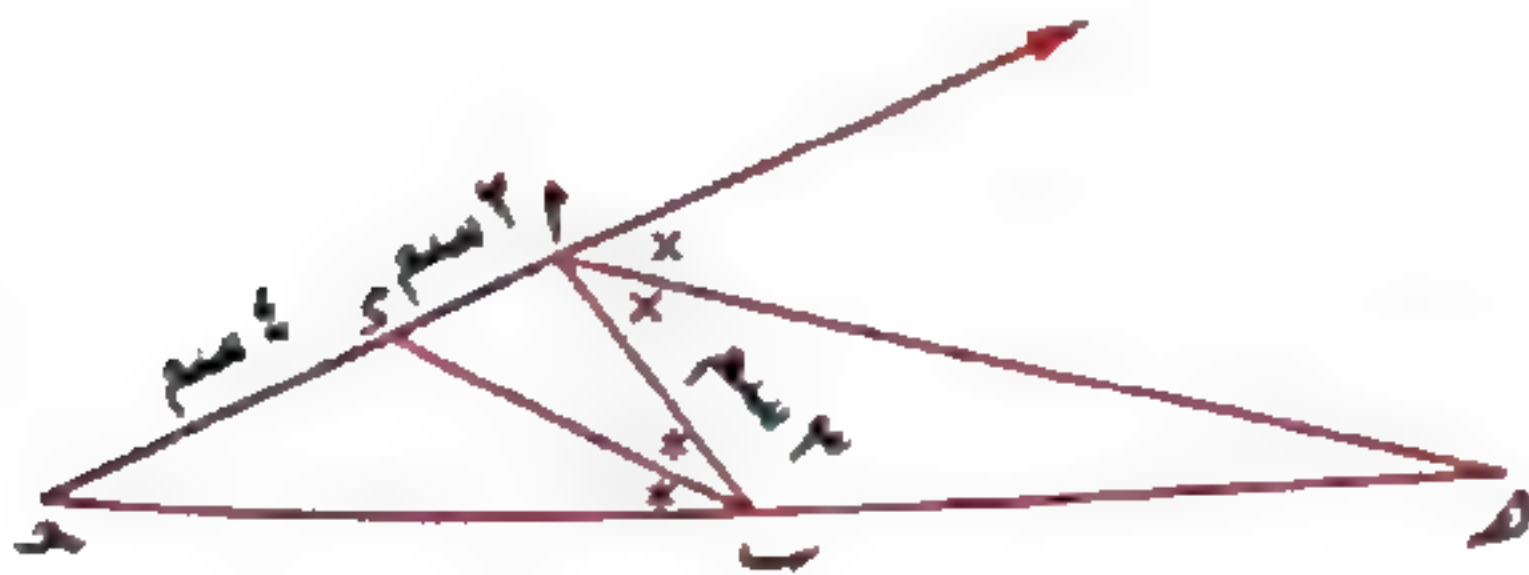
$ب ه = \dots\dots\dots سم$

(١) ٦

(ب) ٨

(ج) ٩

(د) ١٠



(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : $أ ه ٢ = ه د ٤$ ، $أ ه ٢ = ه د ٢$ ، $ب ه = أ ه ١٧ سم$

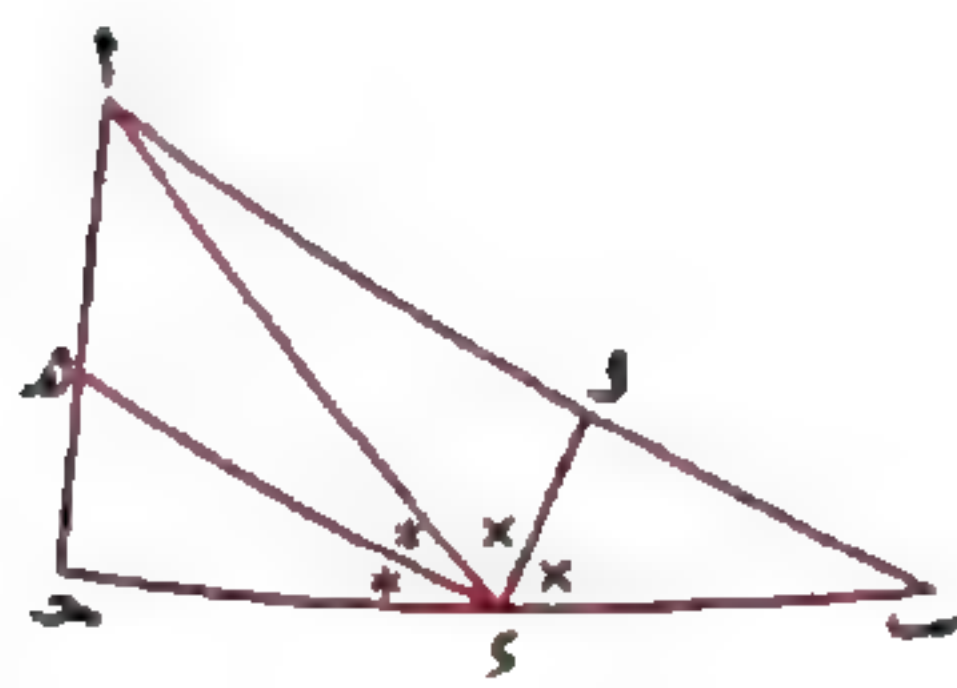
فإن : $د ح = \dots\dots\dots سم$

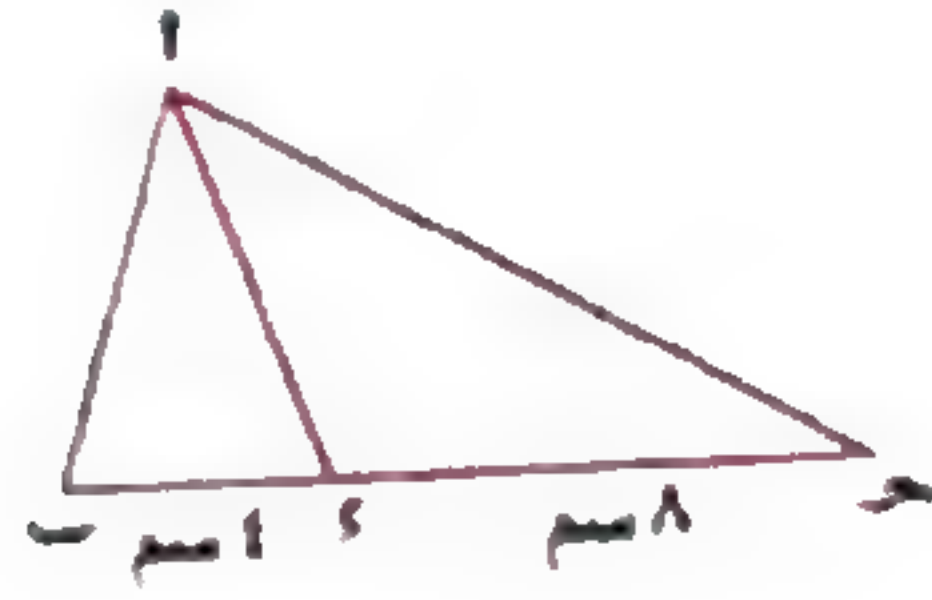
(١) ٧

(ب) ٨

(ج) ٩

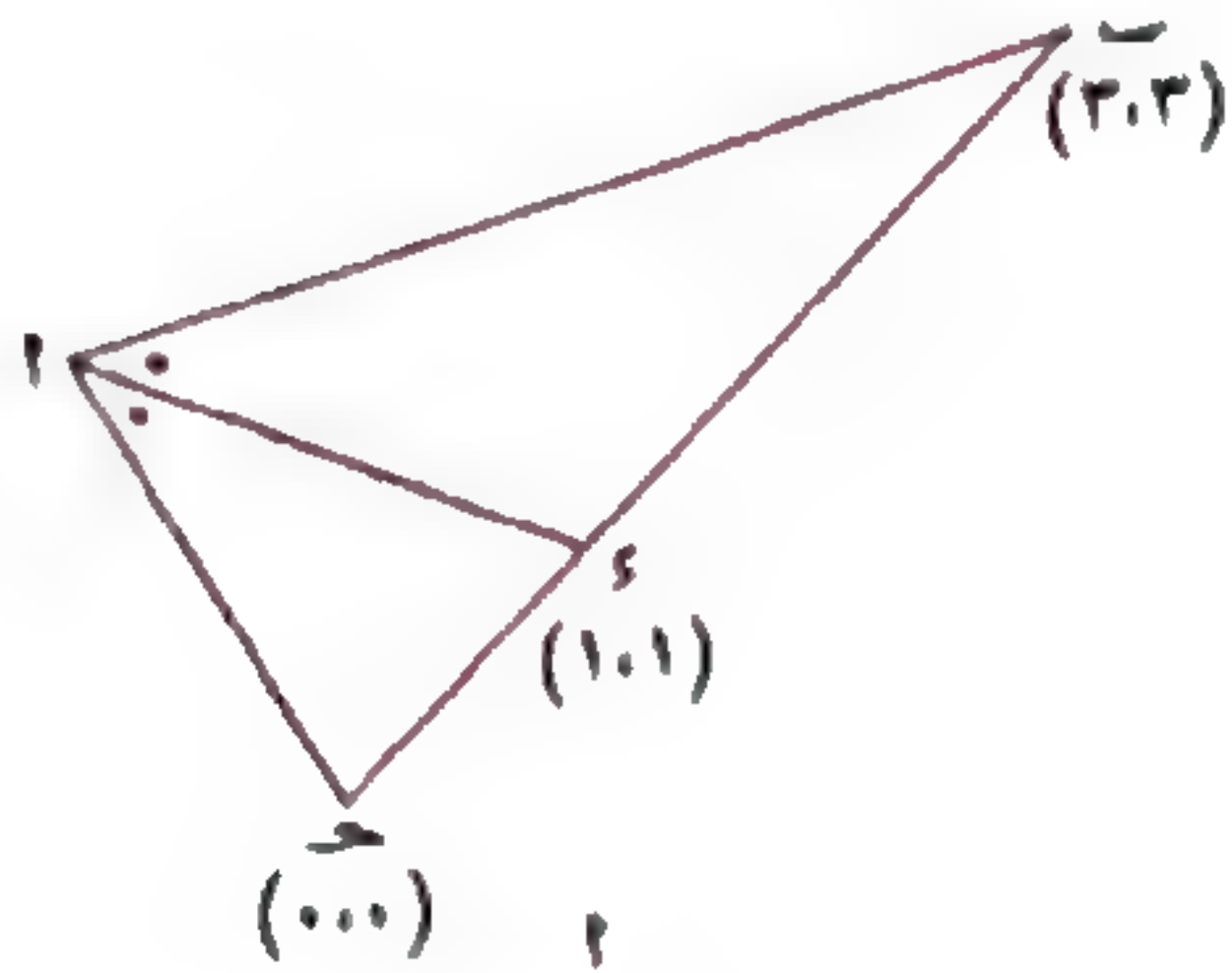
(د) ١٠





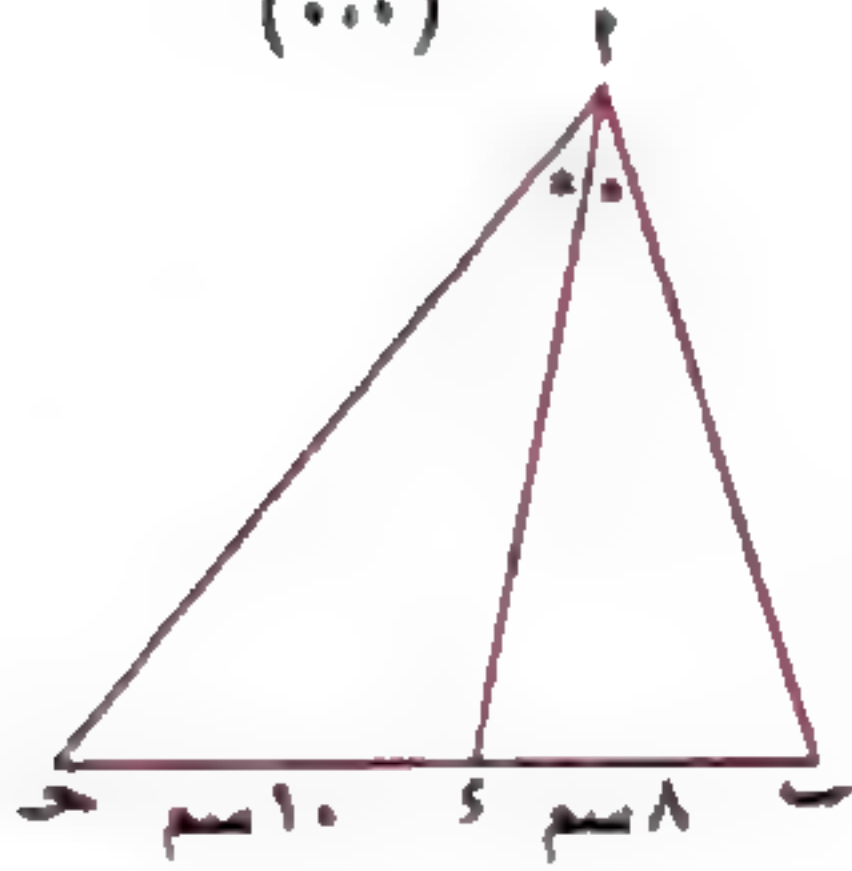
٩ (د)

(٤) في الشكل المقابل :
إذا كان : $٢ = (د٤) = (د١ح) = ٢$
فإن : $١ = \dots$ سم
(ب) ٦
(ج) ٨
(د) ٩



(ب) $\frac{1}{3}$
(د) $\frac{2}{3}$

(٥) في الشكل المقابل :
 $\dots = \frac{١}{٢}$
(ب) $\frac{1}{3}$
(د) $\frac{1}{4}$



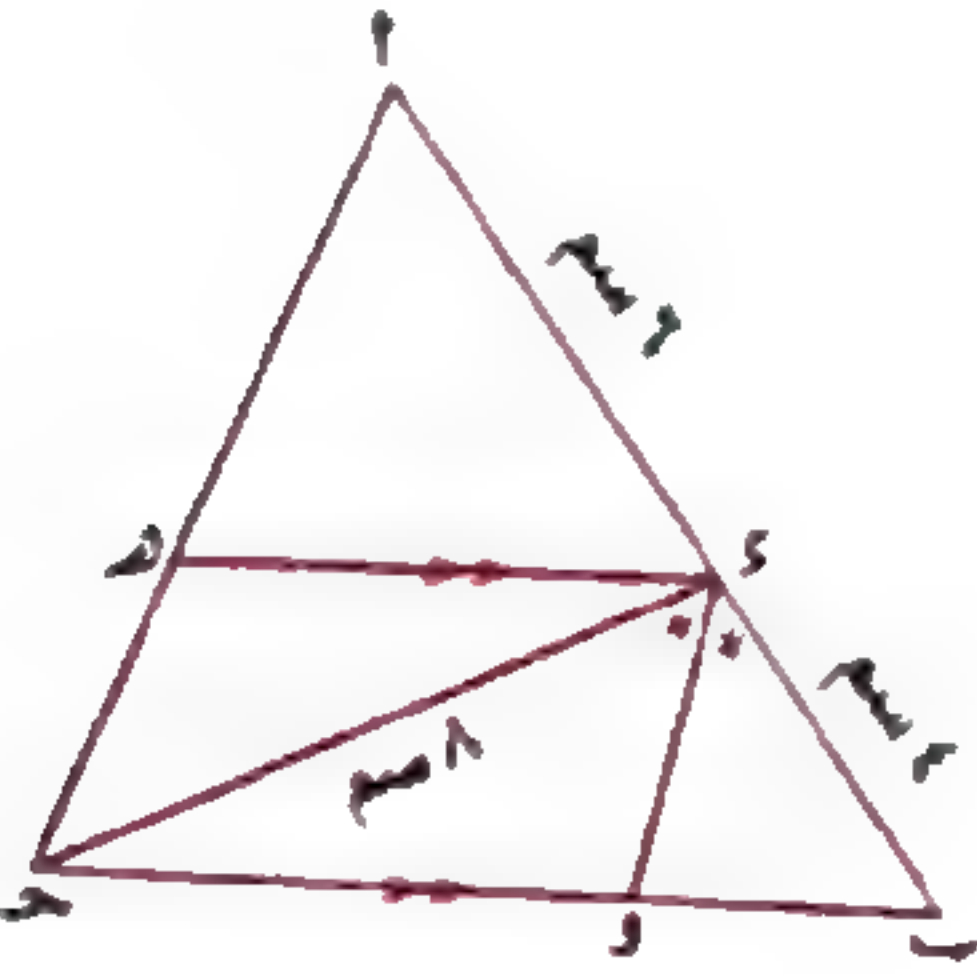
(ب) محيط $\Delta ١٠ = ٥٤$ سم
(د) جميع ما سبق.

(٦) في الشكل المقابل :
إذا كان : ١ ينصف $د١ح$
أي الشروط الآتية يكفي لإيجاد طول ١ ؟
(ب) $١ - ١ = ٥$ سم
(د) $٤ = \sqrt{١٥}$ سم



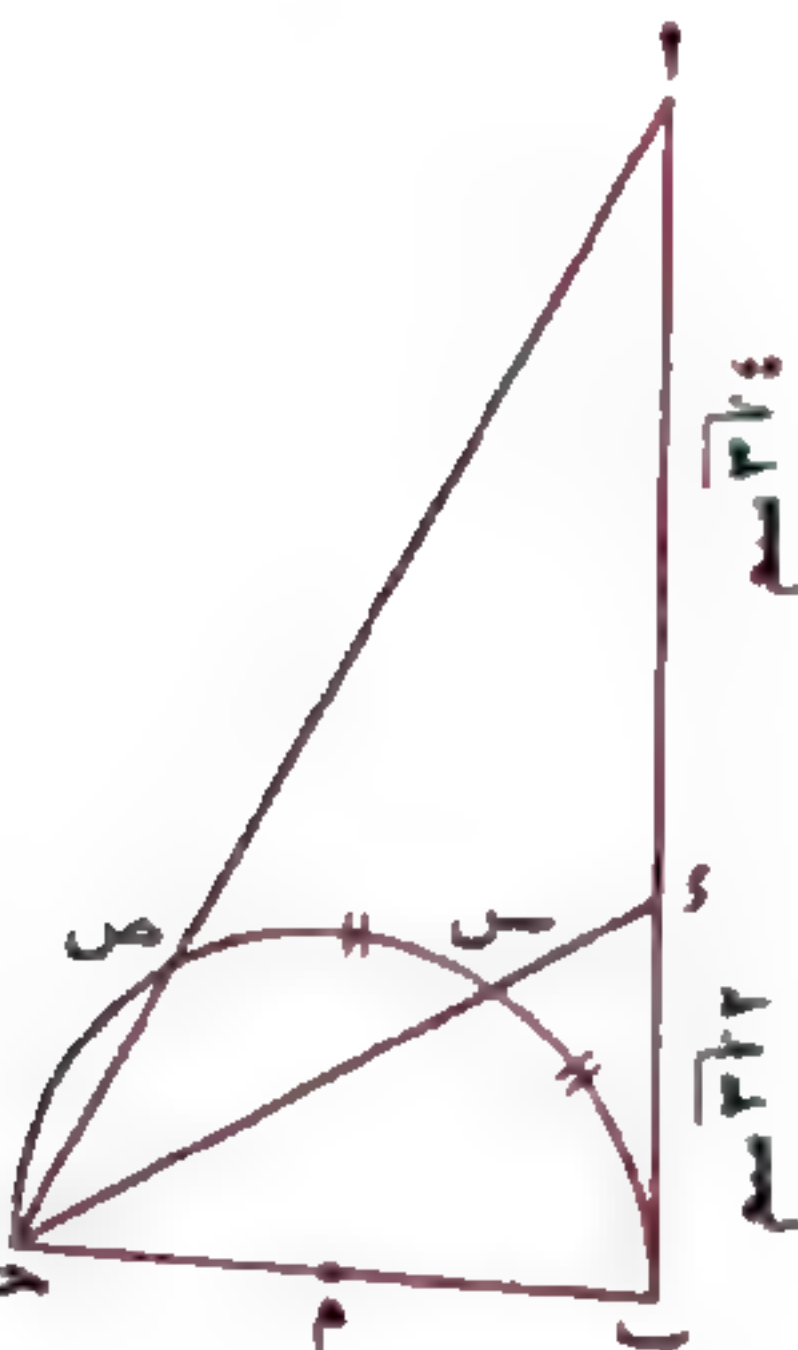
(ب) ٦
(د) ١٠

(٧) في الشكل المقابل :
إذا كانت : $\frac{٣}{٥} = \frac{\text{مساحة } (\Delta ١٠)}{\text{مساحة } (\Delta ١ح)}$
فإن : $١ = \dots$ سم



(ب) ١٦
(د) ٢٤

(٨) في الشكل المقابل :
إذا كانت : مساحة $(\Delta ١٠) = ١٠$ سم^٢
فإن : مساحة $(\Delta ١ح) = \dots$ سم^٢
(ب) ١٢
(د) ١٨

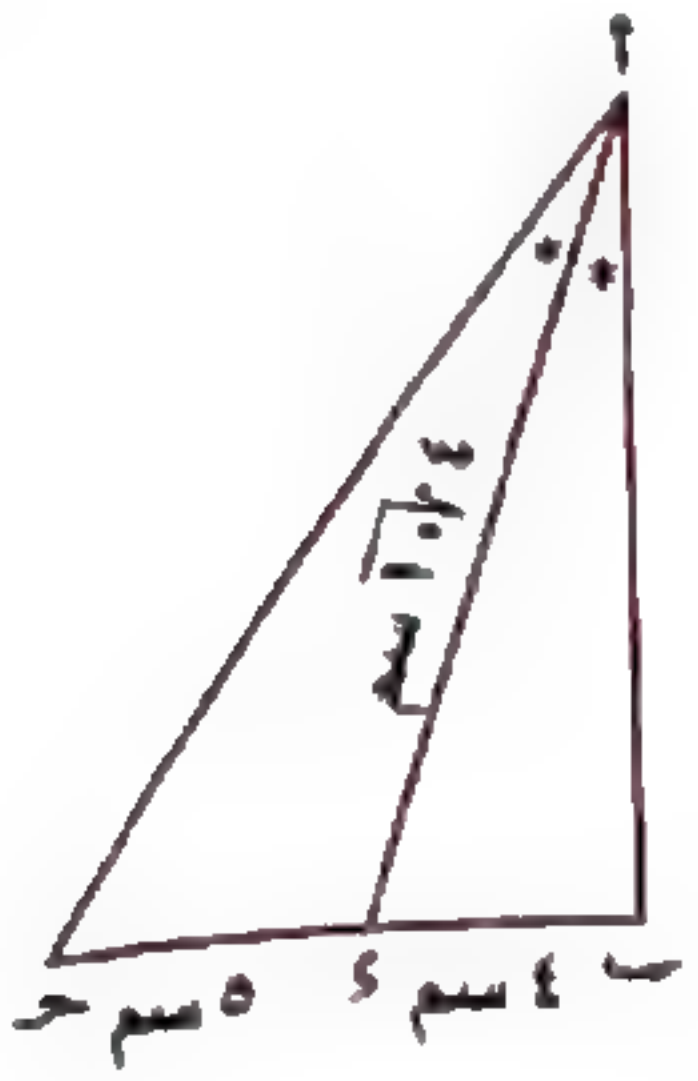


(ب) ٦
(د) ١٢

(٩) في الشكل المقابل :
 ١ مماس للدائرة م عند ١
 $١ = (١ح) = (١ص)$
 $١ = ٢ = \sqrt{٢٤}$ سم ، $١ = ٤ = \sqrt{٣٦}$ سم
فإن : $١ = \dots$ سم
(ب) $\sqrt{٢٤}$
(د) ٩

(١٠) في الشكل المقابل :

محيط $\Delta ABC = ٢٠$ سم

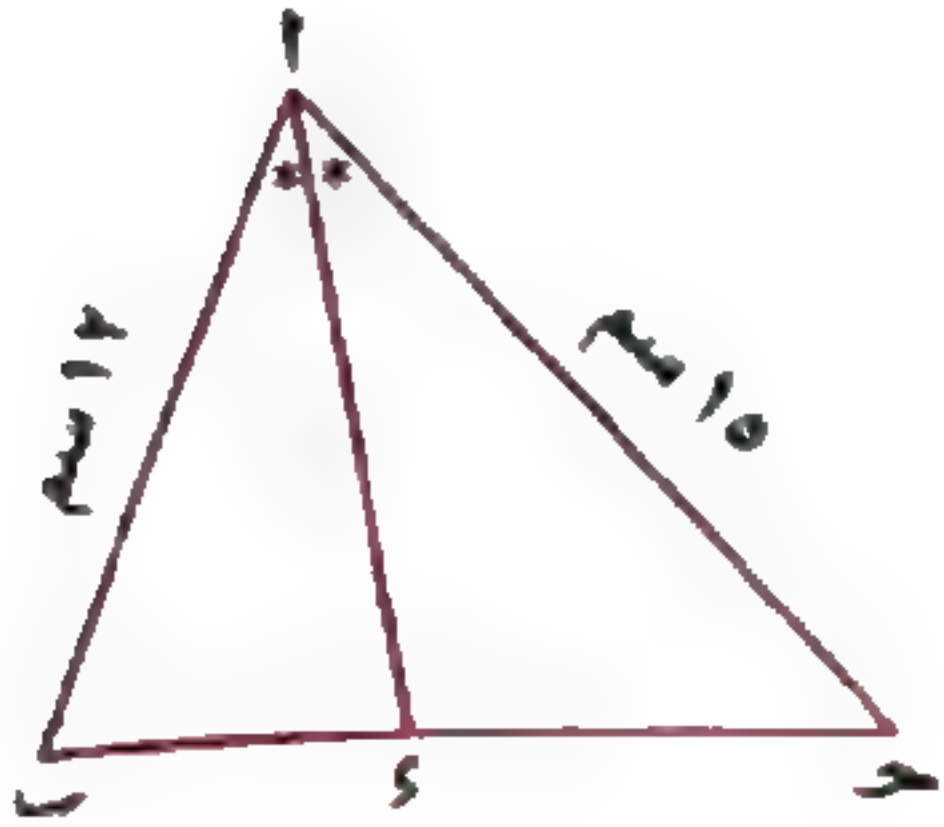


- (١) ٣٦ (ب) ٣٢
(ج) ٢٨ (د) ٢٤

(١١) في الشكل المقابل :

إذا كانت : مساحة $\Delta ABC = ٧٢$ سم^٢

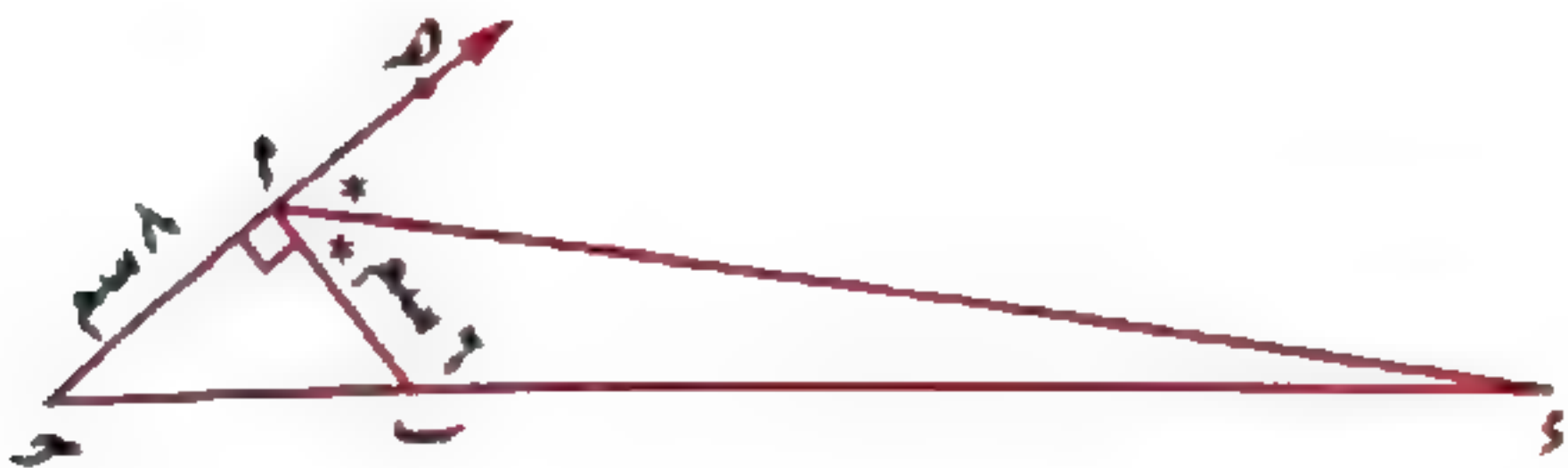
فإن : مساحة $\Delta ADE =$ سم^٢



- (١) ٢٤ (ب) ٢٨
(ج) ٣٢ (د) ٤٠

(١٢) في الشكل المقابل :

مساحة $\Delta ABC =$ سم^٢

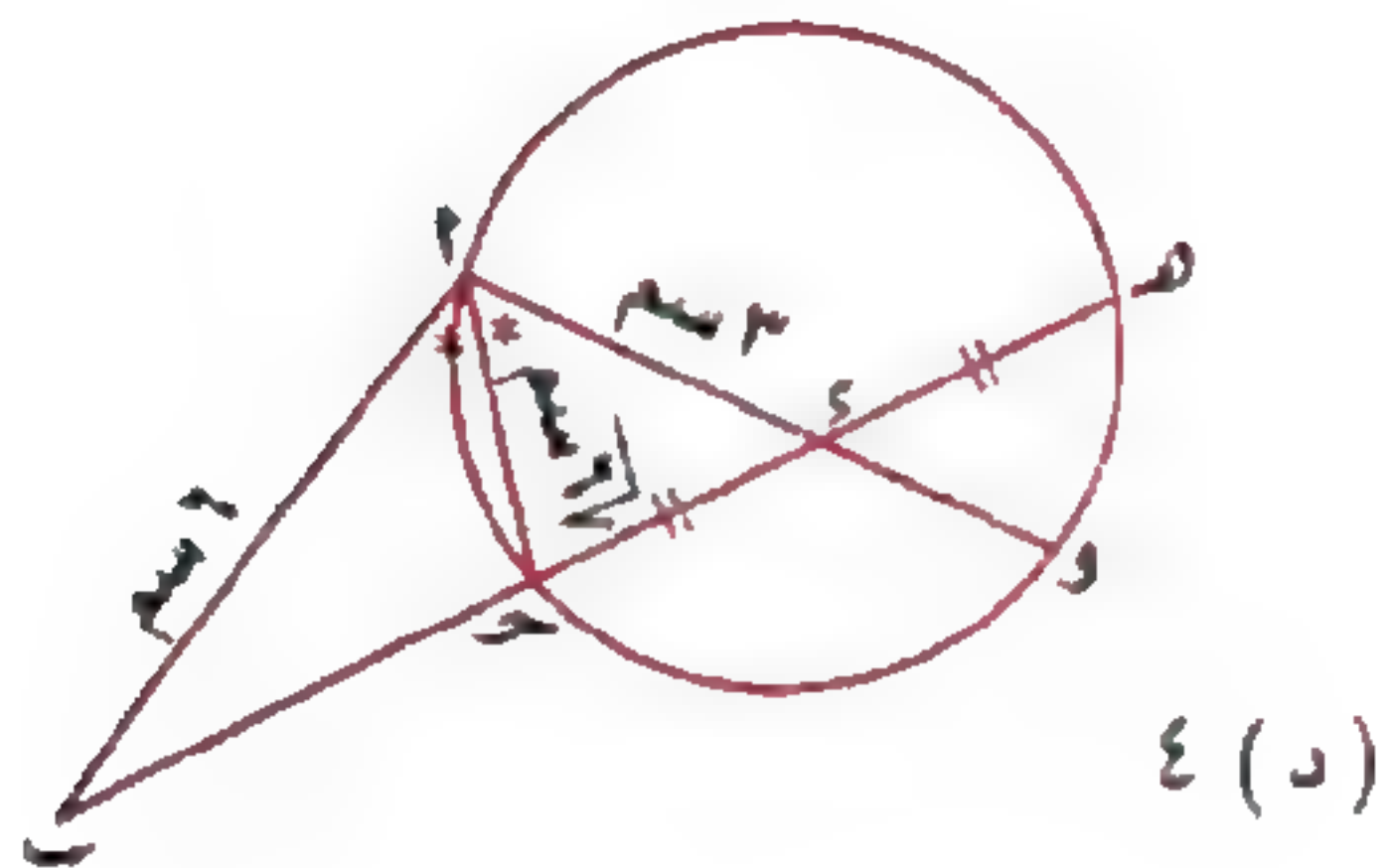


- (١) ٣٦ (ب) ٤٨
(ج) ٥٤ (د) ٧٢

(١٣) في الشكل المقابل :

\overline{AC} ينصف \overline{DB} ، \overline{DE} منتصف \overline{BC} ، $AD = ٦$ سم

، $AE = ٢$ سم ، $AB = ٦$ سم فإن : $DE =$ سم



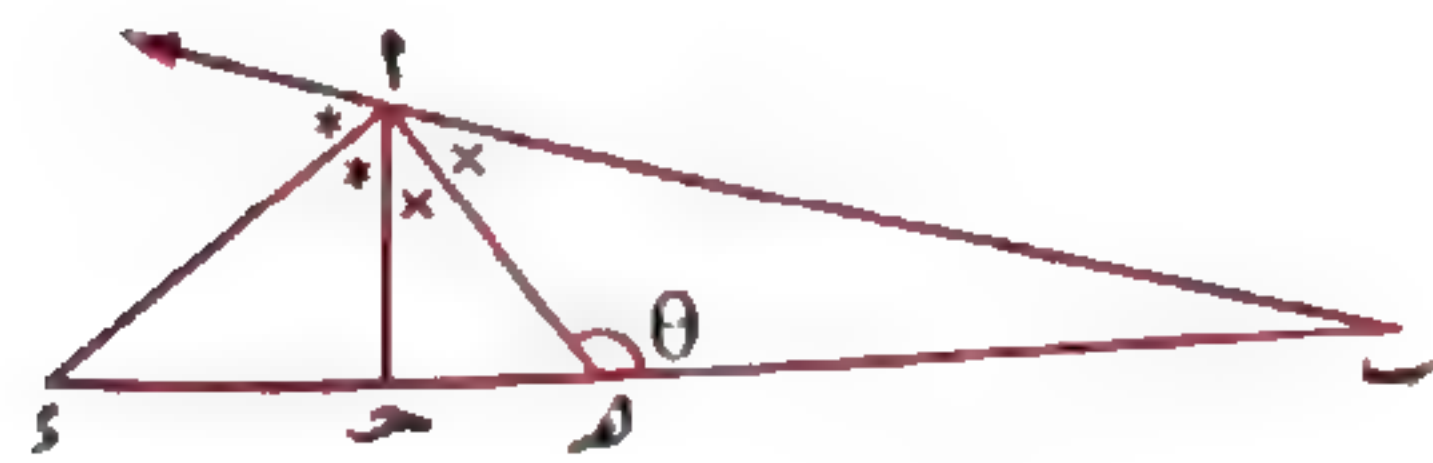
(د) ٤

- (١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٣,٥ (د) ٤

(١٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : $AE = ٨$ سم ، $AD = ٦$ سم

فإن : $\theta =$

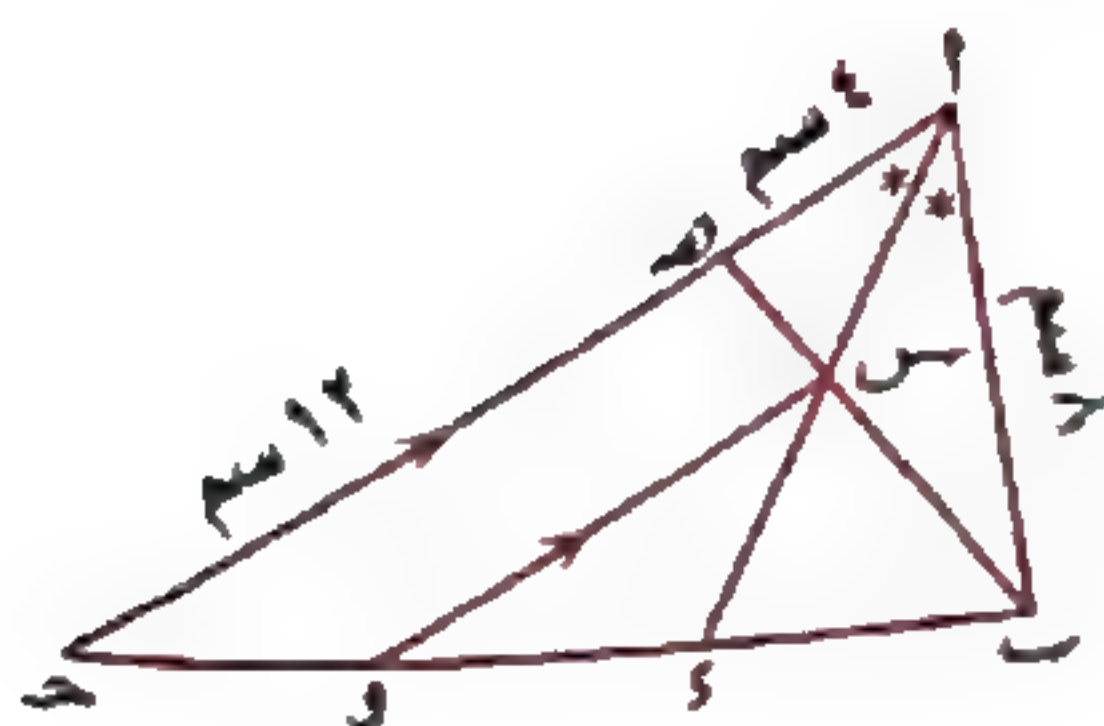


(د) $\frac{٤}{٣}$

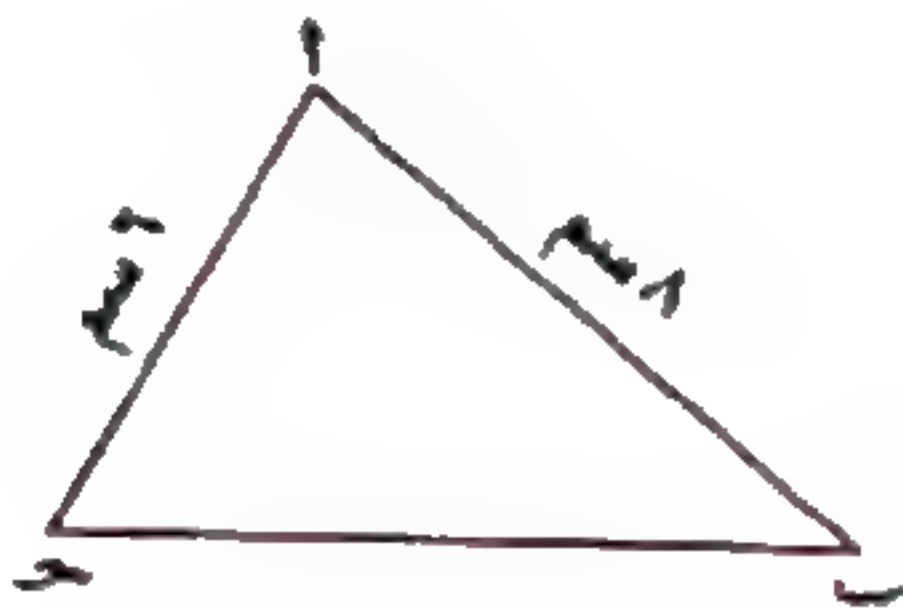
- (١) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٤}$ (ج) $\frac{٢}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٥) في الشكل المقابل :

$\frac{DE}{BC} =$



- (١) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$



(١٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $٢ = (١ د) = (٢ د)$

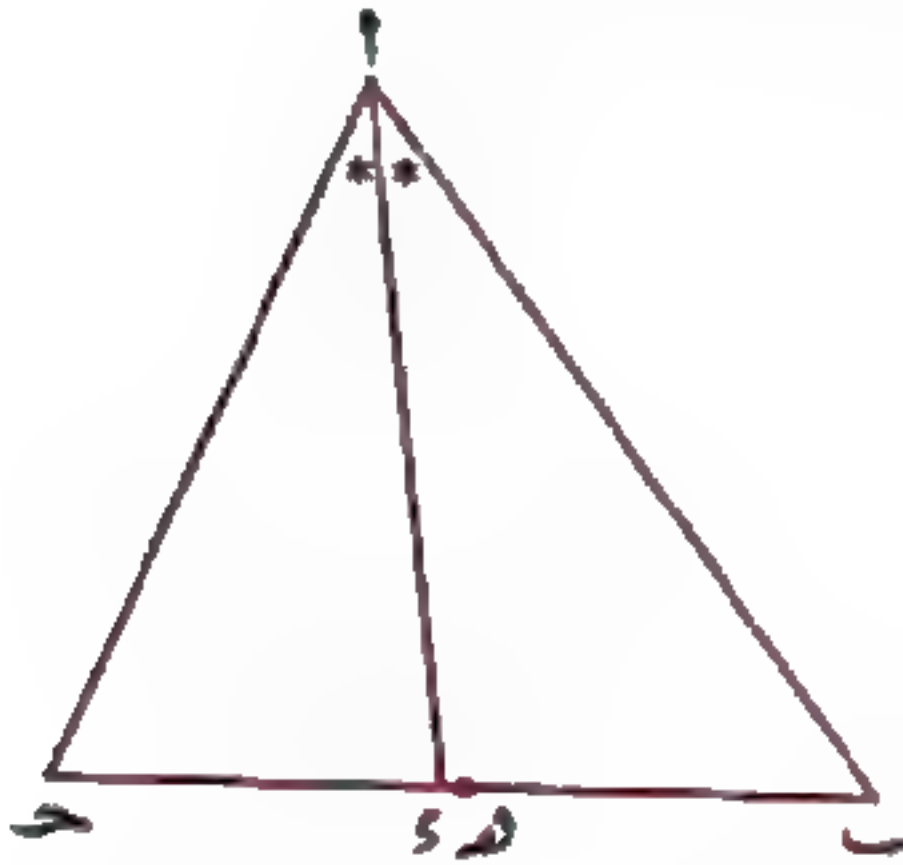
فإن : $ب ح = \dots \dots \dots$ سم

(د) ١٠

(ج) ١٢

(ب) ٢١/٢

(١) ١٠/٢

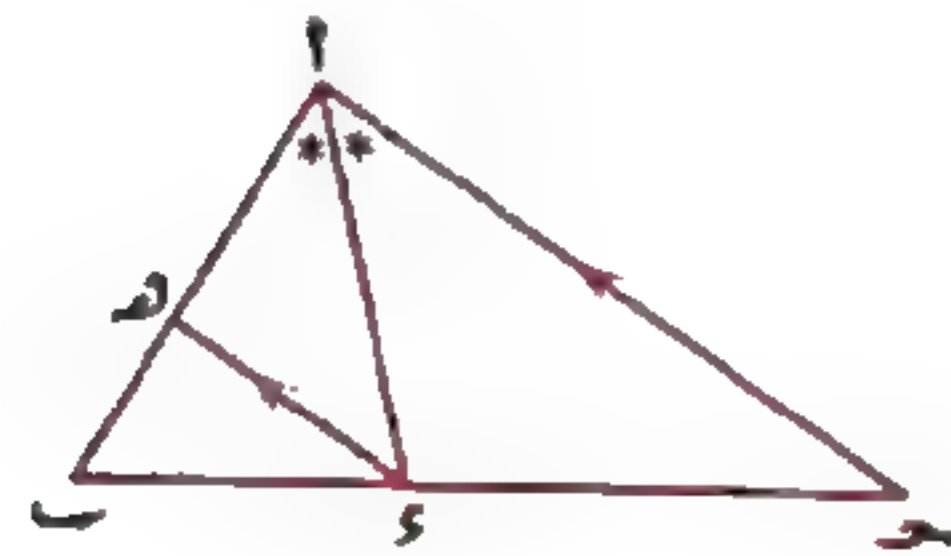


٣٤ في الشكل المقابل :

$١ ب ح$ مثلث فيه : $١ ب < ١ ح$ ، $هـ$ منتصف $ب ح$

، $١ د$ ينصف $د$ من الداخل

أثبت أن : $\frac{١ د - ١ ب}{١ ح + ١ ب} = \frac{هـ}{هـ}$

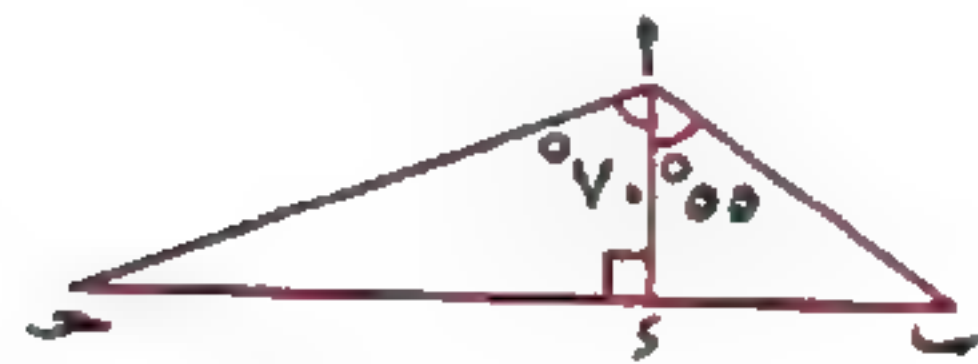


٣٥ في الشكل المقابل :

$١ ب ح$ مثلث ، $١ د$ ينصف $د ب$ من الداخل

، $هـ د // ١ ح$ ويقطع $١ ب$ في $هـ$

أثبت أن : $هـ د = \frac{١ ب \times ١ ح}{١ ح + ١ ب}$



٣٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : $١ ح \times ١ ب = ٣٦$ سم^٢

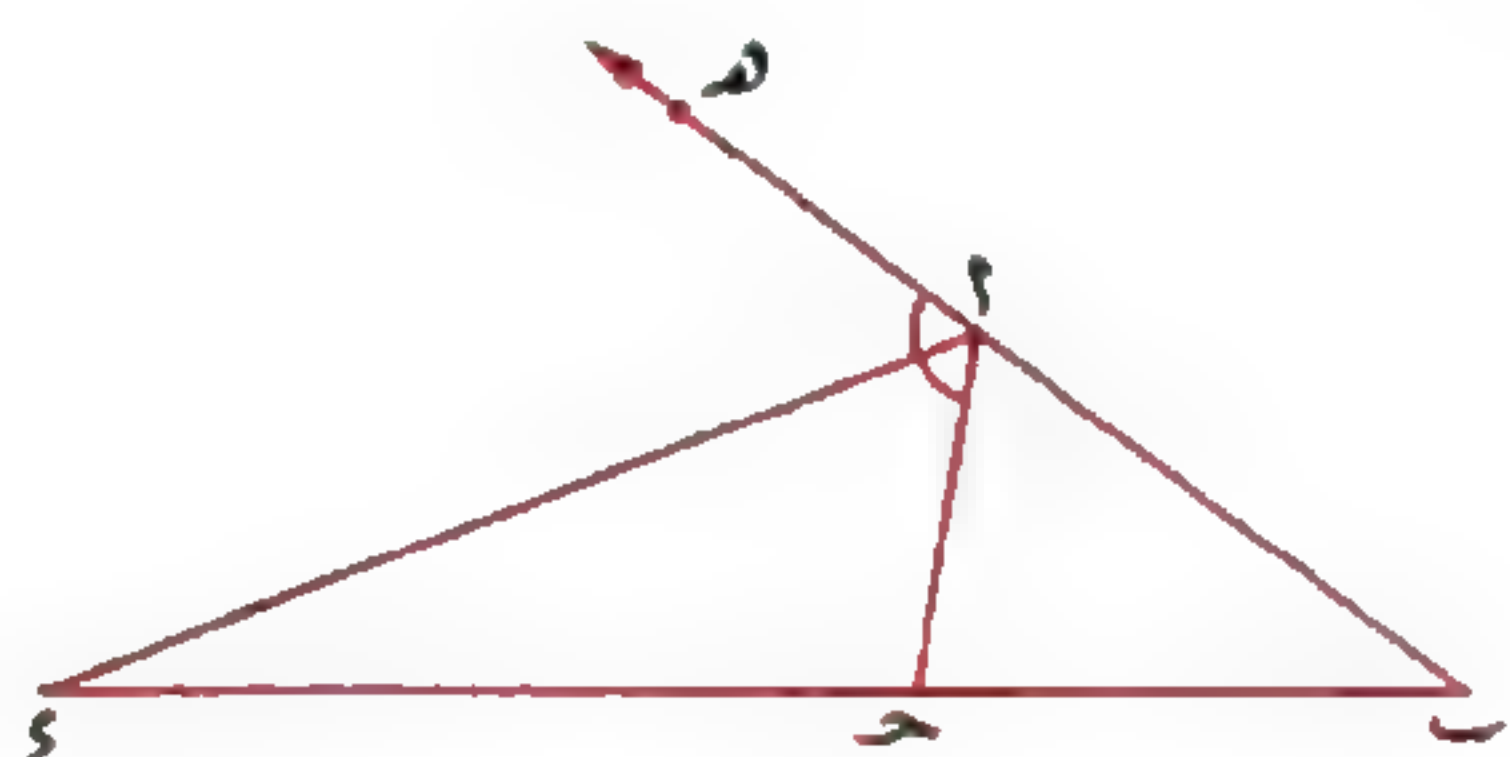
أوجد : مساحة $(\Delta ١ ب ح)$

« ١٨ سم^٢ »

تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة «عكس نظرية (٣)»

الدرس 4

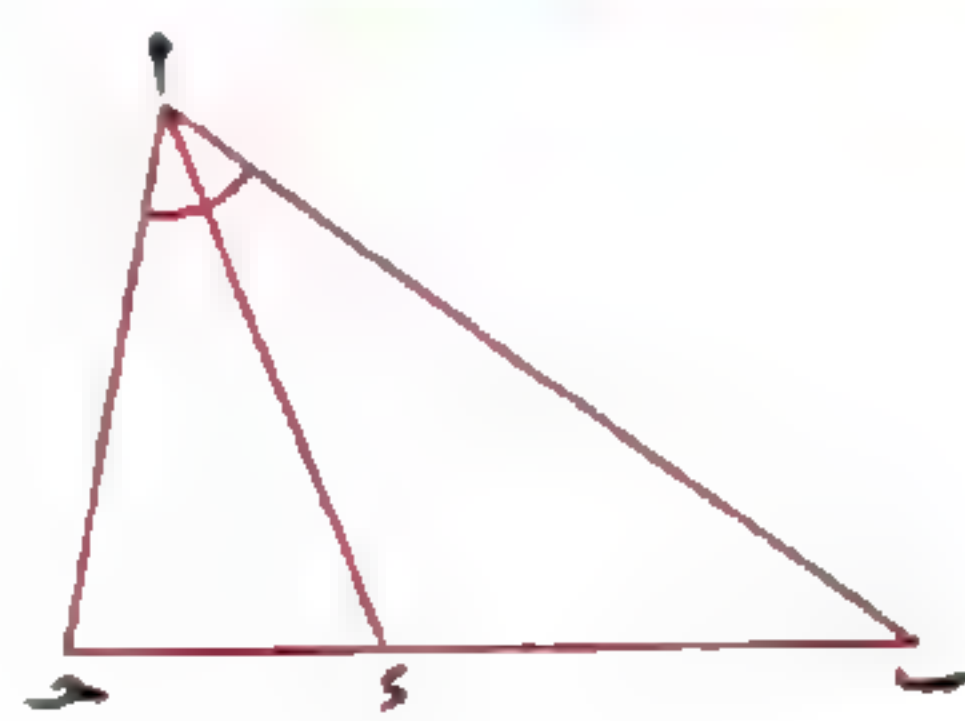
عكس نظرية (٣)



إذا كانت: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{DE} \neq \overrightarrow{BC}$

$$\text{بحيث: } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

فإن: \overrightarrow{DE} ينصف ΔABC الخارجة عن ΔABC



إذا كانت: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$

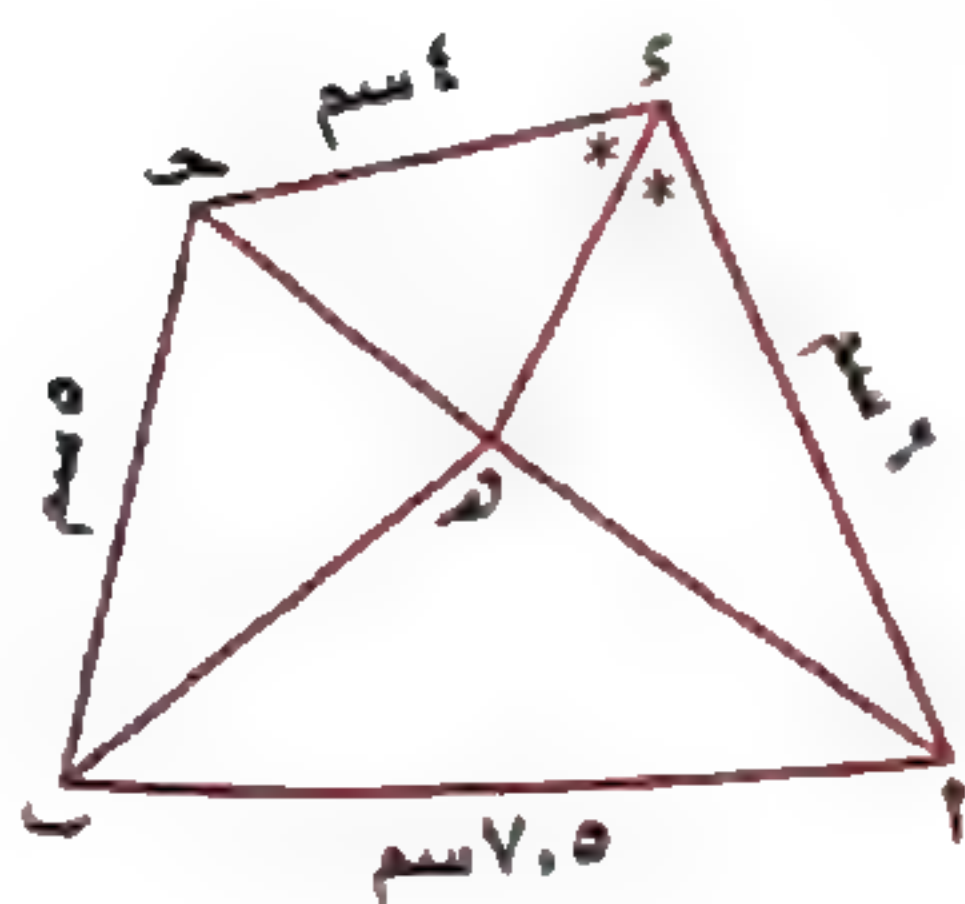
$$\text{بحيث: } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

فإن: \overrightarrow{DE} ينصف ΔABC

مثال ١

في الشكل المقابل:

ΔABC شكل رباعي فيه: $AB = 7,5$ سم، $BC = 5$ سم،
 $CD = 4$ سم، $AD = 6$ سم، \overrightarrow{DE} ينصف ΔABC ويقطع \overrightarrow{AC} في E
 أثبت أن: \overrightarrow{DE} ينصف ΔABC



الحل

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{6}{7.5} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

في ΔABC : $\therefore \overrightarrow{DE}$ ينصف ΔABC

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{6}{7.5} = \frac{4}{5}$$

\therefore في ΔABC : \overrightarrow{DE} ينصف ΔABC

(وهو المطلوب)

مأال ٢

أب ح مثلث متساوى الساقين فيه : $أب = أ ح$ ، $د$ \in $أ ب$ بحيث $أ د = ح د$ ،
نصف د $أ ب$ ح بمنصف قطع $أ ح$ فى $هـ$ ، رسم $هـ و$ // $أ ب$ ويقطع $أ د$ فى $و$ ،
أثبت أن : $أ و$ ينصف د $أ ح د$

الحل

فى $\Delta أ ب ح$:

\therefore $أ و$ ينصف د $أ ب ح$

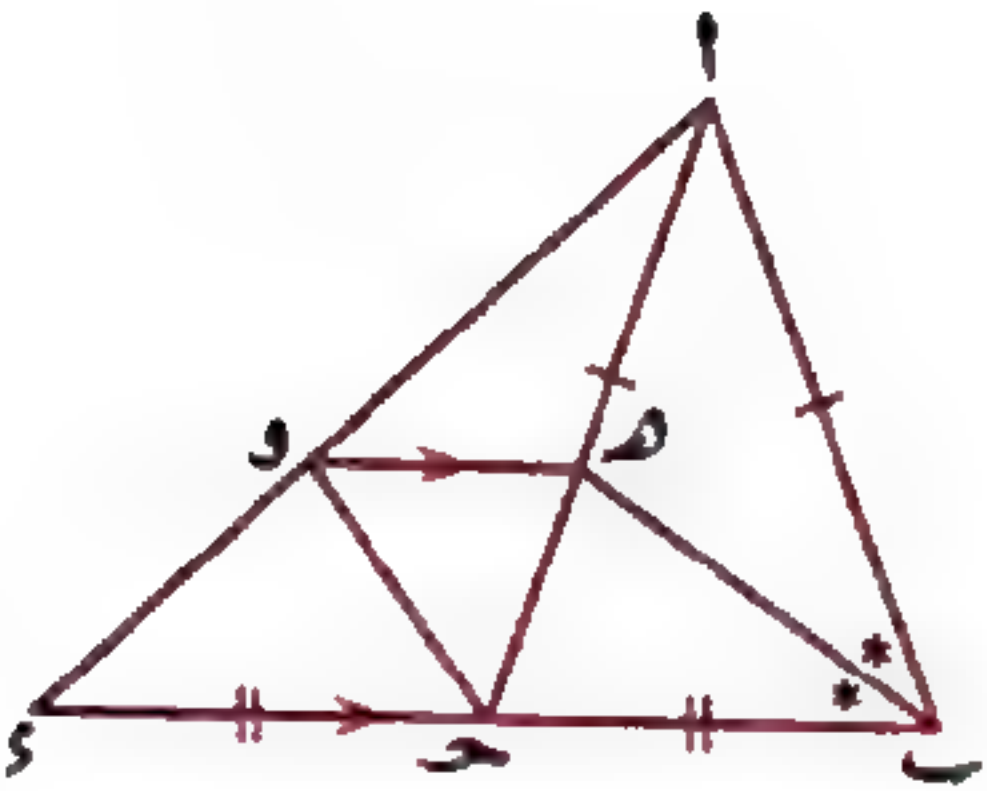
لكن : $أ ب = أ ح$ ، $أ د = ح د$ (معطى)

$$\therefore \frac{أ ح}{أ د} = \frac{أ ب}{ح د}$$

فى $\Delta أ ح د$: \therefore $هـ و$ // $أ د$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{أ و}{أ د} = \frac{أ ح}{أ د}$

\therefore فى $\Delta أ ح د$: $أ و$ ينصف د $أ ح د$



(١)

(٢)

(وهو المطلوب)

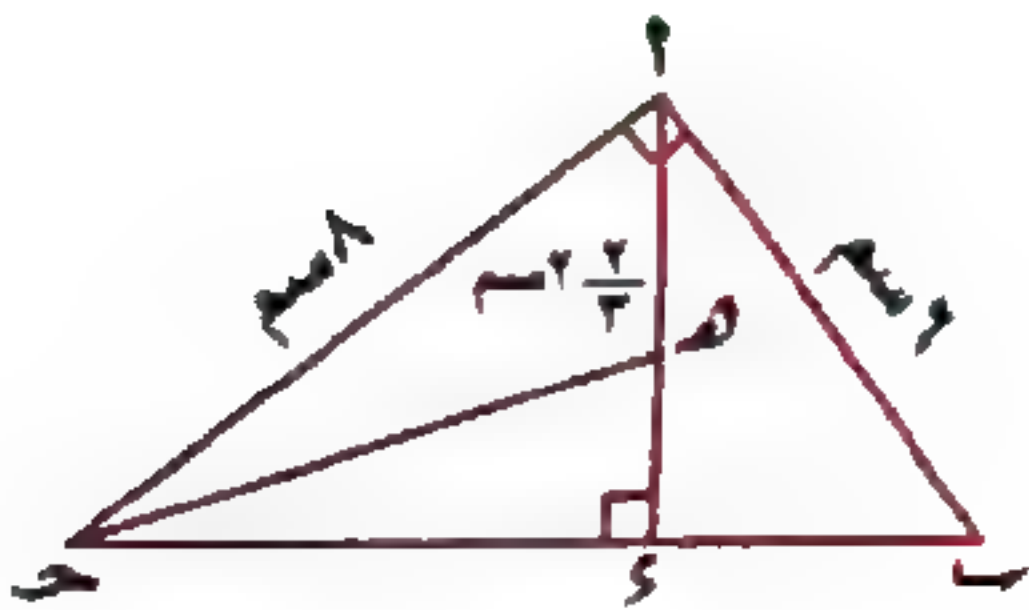
مأال ٣

فى الشكل المقابل :

المثلث $أ ب ح$ قائم الزاوية فى $أ$ ، $أ د \perp أ ب ح$

$أ ب = ٦$ سم ، $أ ح = ٨$ سم ، $أ د = ٢\frac{٢}{٣}$ سم

أثبت أن : $أ و$ ينصف د $أ ح د$



الحل

\therefore $\Delta أ ب ح$ قائم الزاوية فى $أ$

\therefore $أ ب ح = ١٠$ سم

$$\therefore \frac{أ ح}{أ ب} = \frac{أ د}{أ ح}$$

$\therefore \Delta أ ب ح \sim \Delta أ د ب$

\therefore $أ د = ٤,٨$ سم

$$\therefore \frac{أ ح}{أ د} = \frac{أ ب}{أ ح} \Rightarrow \frac{٨}{٤,٨} = \frac{٦}{أ د}$$

$$\therefore \frac{أ د}{أ د} = \frac{أ د}{أ د}$$

$$\therefore (أ ب ح)^2 = (أ د)^2 + (أ ح)^2 = (٤,٨)^2 + (٦)^2 = ١٠٠$$

$$\therefore \Delta أ ب ح \sim \Delta أ د ب$$

$$\therefore \frac{أ د}{أ ب} = \frac{أ ح}{أ د} \Rightarrow \frac{٨}{١٠} = \frac{أ د}{٨}$$

$$\therefore \frac{أ د}{أ د} = \frac{أ ب}{أ د} \Rightarrow \frac{٨}{١٠} = \frac{أ ب}{٨}$$

$$\therefore \frac{أ د}{١٠} = \frac{٢\frac{٢}{٣}}{٨} \Rightarrow \frac{أ د}{١٠} = \frac{٢٠}{٢٤}$$

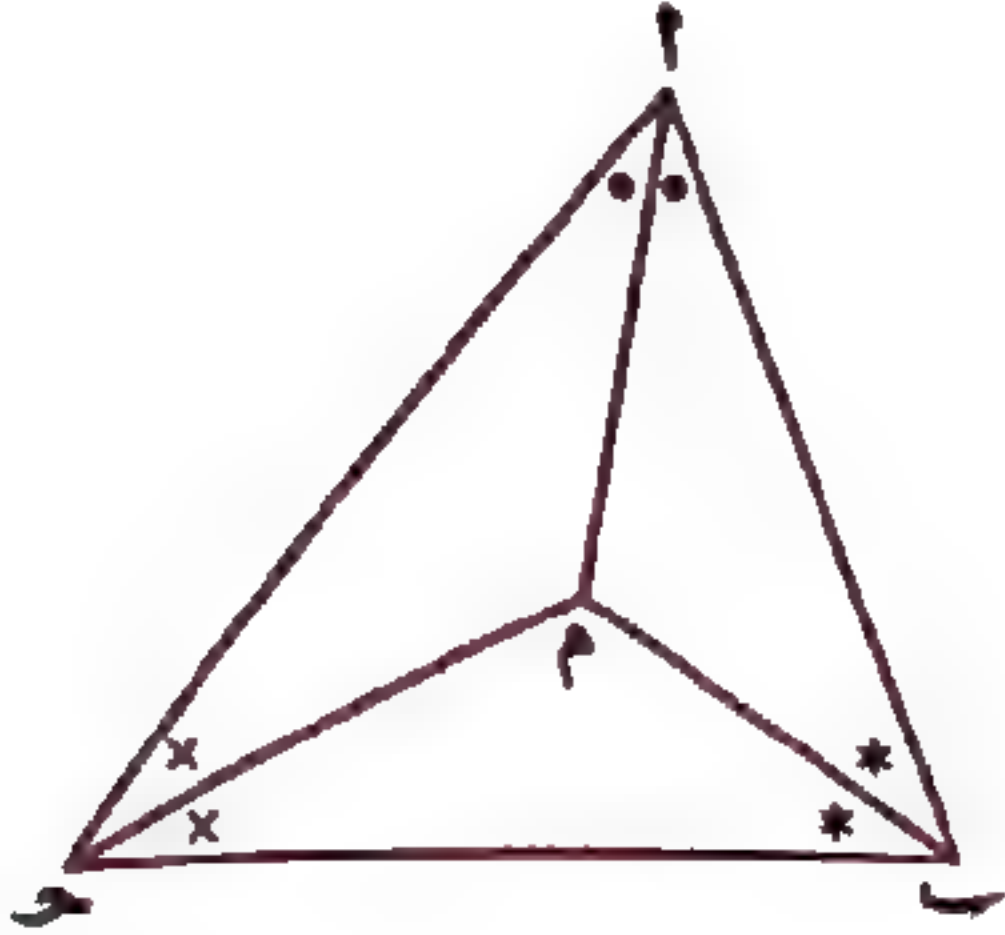
$$\therefore \frac{أ د}{١٠} = \frac{٢٠}{٢٤} \Rightarrow \frac{أ د}{١٠} = \frac{٥}{٦}$$

\therefore $أ و$ ينصف د $أ ح د$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب ح د شكل رباعي فيه : أ ب = ٢٠ سم ، أ د = ٦ سم ، د ح = ٩ سم ، ح ب = ١٣ سم ،
 بحيث أ د = ٨ سم ، رسم د ح // ب ح ويقطع أ ح في م
 أثبت أن : د م ينصف د أ ح



حقيقة

منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

ففي الشكل المقابل :

أ م ، ب م ، ج م منصفات زوايا $\triangle ABC$ تتقاطع في نقطة م

مثال ٤

في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٤ سم ، ب ح = ٨ سم

، ب م ينصف د أ ح ، أ م ينصف د ب ح

أوجد : طول أ د

الحل

\therefore أ م ينصف د ب ح ، ب م ينصف د أ ح

\therefore م هي نقطة تلاقي منصفات زوايا $\triangle ABC$

\therefore في $\triangle ABC$: $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MA} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$

$\therefore 6 = 2 \times 3$

$\therefore 6 - 6 = 0$

\therefore ب م ينصف د أ ح

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{6}{6 - 6}$

$\therefore 6 = 2 \times 3$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

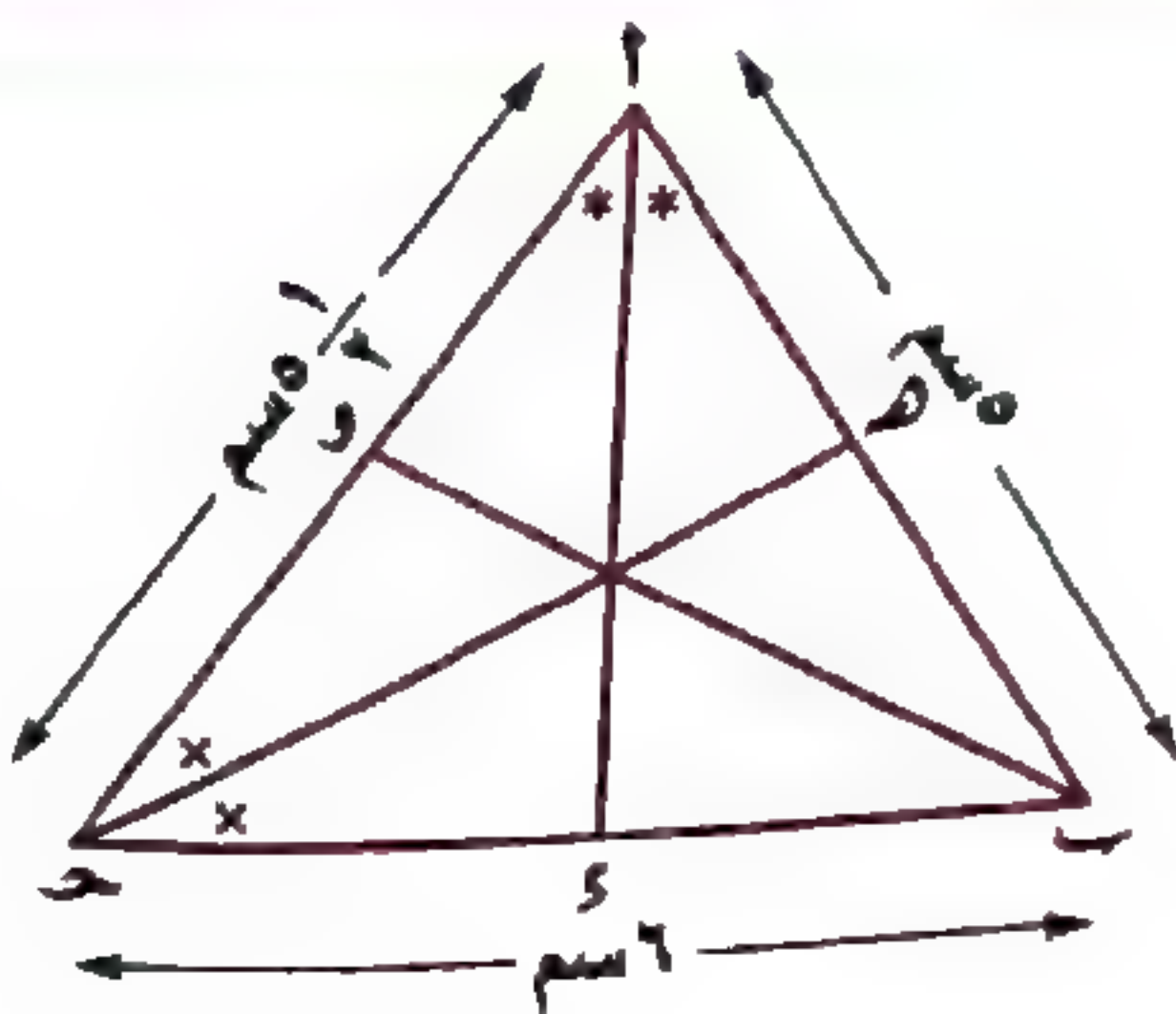
في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ ح = $\frac{1}{2}$ سم

، ب ح = ٦ سم ، أ د ينصف د ب ح

، ح د ينصف د أ ب

أوجد : طول أ د



على عكس نظرية ٣

من أسئلة الكتاب المدرسي

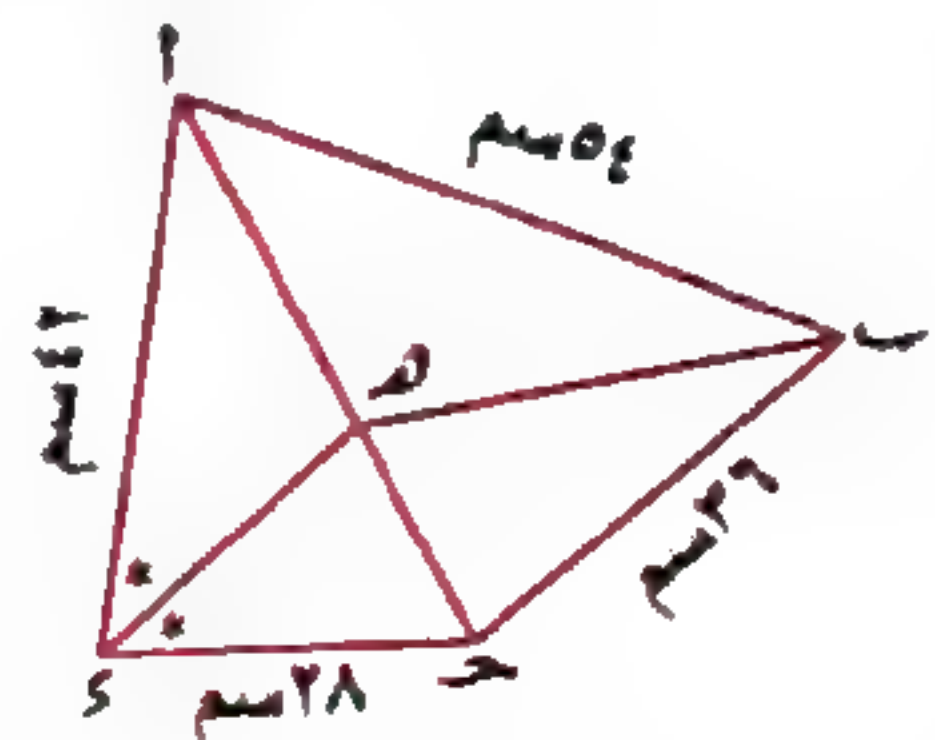
١) ΔABC مثلث فيه : $AB = 6$ سم ، $AC = 9$ سم ، $BC = 10$ سم ، $D \in BC$ حيث $BD = 4$ سم ، AD ينصف BC أثبت أن : AD ينصف BC

٢) ΔABC مثلث أطوال أضلاعه AB ، BC ، CA هي على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٣ من السنتيمترات ، $D \in BC$ بحيث $BD = 6$ سم ، أثبت أن : AD ينصف الزاوية الخارجة للمثلث ΔABC عند A

٣) في كل من الشكلين الآتيين أثبت أن : AD ينصف BC



(٢)



(١)

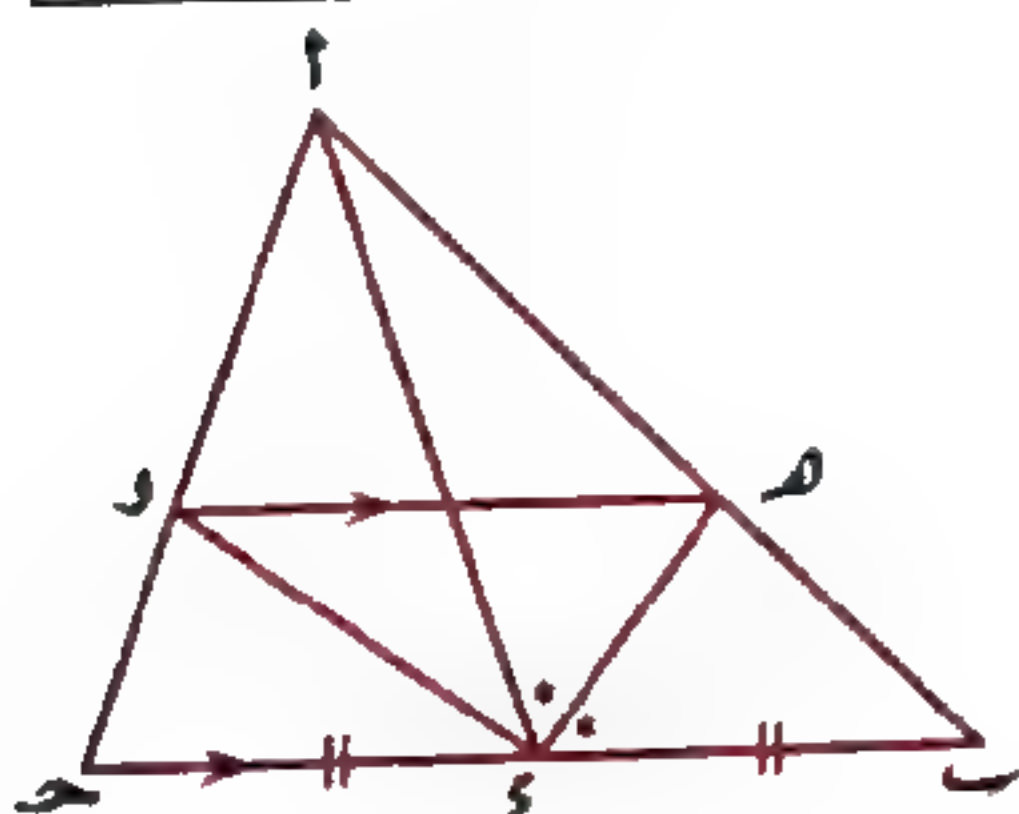
٤) ΔABC شكل رباعي فيه : $AB = 6$ سم ، $AC = 9$ سم ، $BC = 6$ سم ، $AD = 4$ سم ، AD ينصف BC ويقطع AC في E

(١) أوجد : قيمة النسبة $\frac{AE}{EC}$

(٢) أثبت أن : AD ينصف BC

« $\frac{2}{3}$ »

٥) ΔABC شكل رباعي فيه : $AB = 18$ سم ، $BC = 12$ سم ، $D \in AC$ بحيث $AD = 3$ سم ، رسم $DE \parallel BC$ فقطع AB في E واثبت أن : AD ينصف BC



(٢) $DE \perp AD$

٦) في الشكل المقابل :

DE منتصف BC ، DE ينصف AD ، $DE \parallel BC$ ، أثبت أن :

(١) DE ينصف AD

٧) ΔABC مثلث ، S منتصف BC ، $AS = 6$ سم ، $AS = 9$ سم ،

نصفت AS بمنتصف قطع AB في E ، أخذت نقطة H على AC

بحيث : $AE = 6$ سم علمًا بأن : $AC = 10$ سم

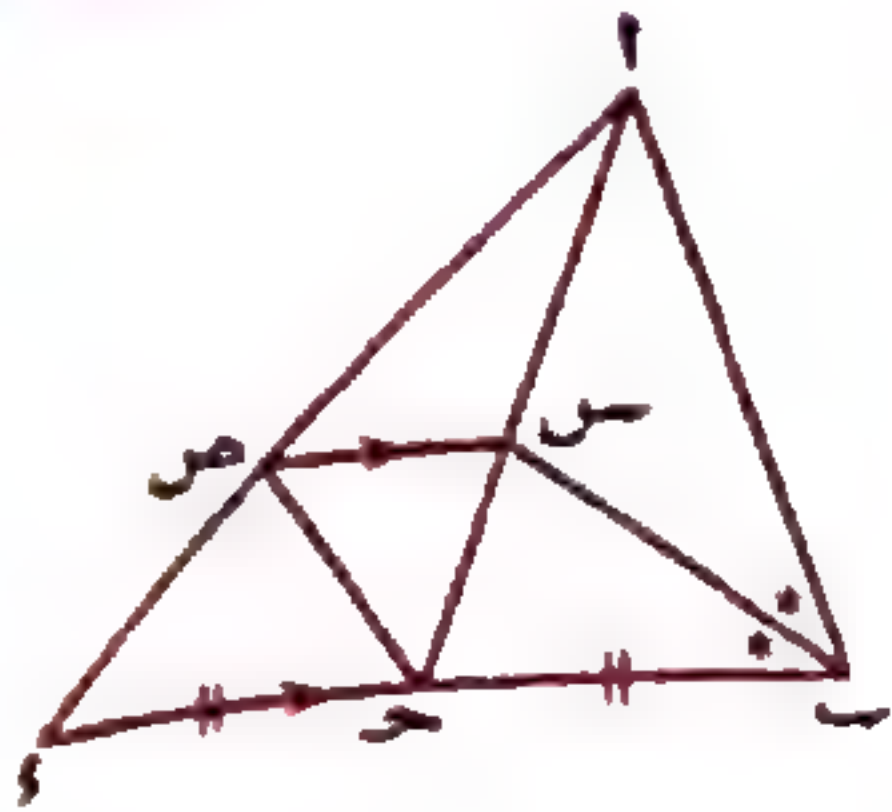
(١) أوجد : قيمة $\frac{AE}{EC}$

(٢) أثبت أن : $DE \parallel BC$

(٣) أثبت أن : S ينصف AD

« $\frac{2}{3}$ »

٨ في الشكل المقابل :

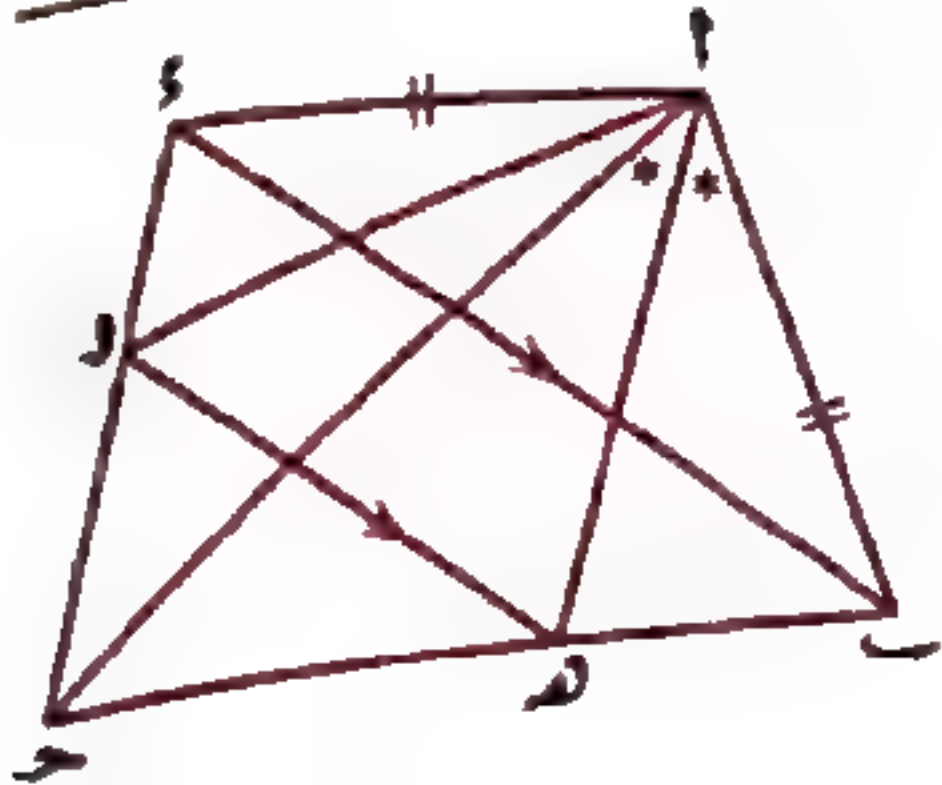


$$AB = 7, AC = 8, DE = 3.5$$

$$DE \parallel BC, \text{ حيث } AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$$

أثبت أن : DE ينصف AB و AC

٩ في الشكل المقابل :



$$AB = 7, AC = 8, DE = 3.5$$

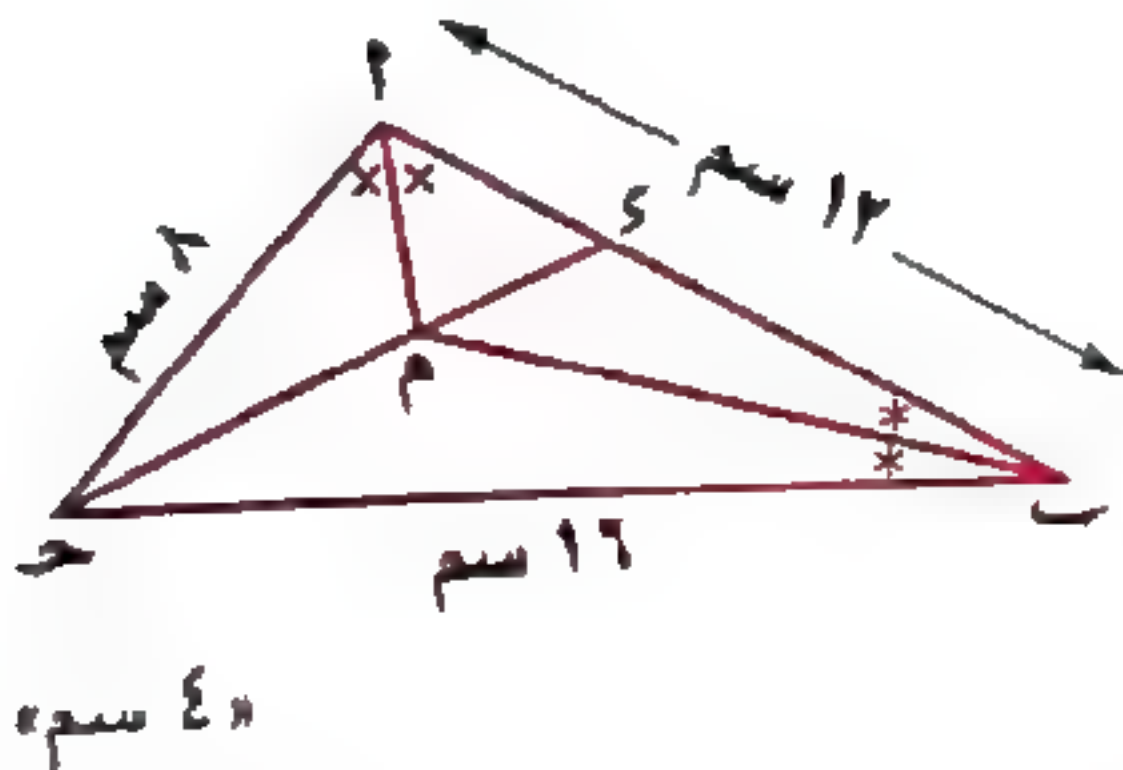
أثبت أن : DE ينصف AB و AC

١٠ \square AB ح مثلث ، $DE \parallel BC$ ، $AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$ ، رسم ح $DE \parallel BC$ ويقطع

AB في D ، ورسم $DE \parallel BC$ ويقطع AC في E

أثبت أن : DE ينصف AB و AC

١١ في الشكل المقابل :

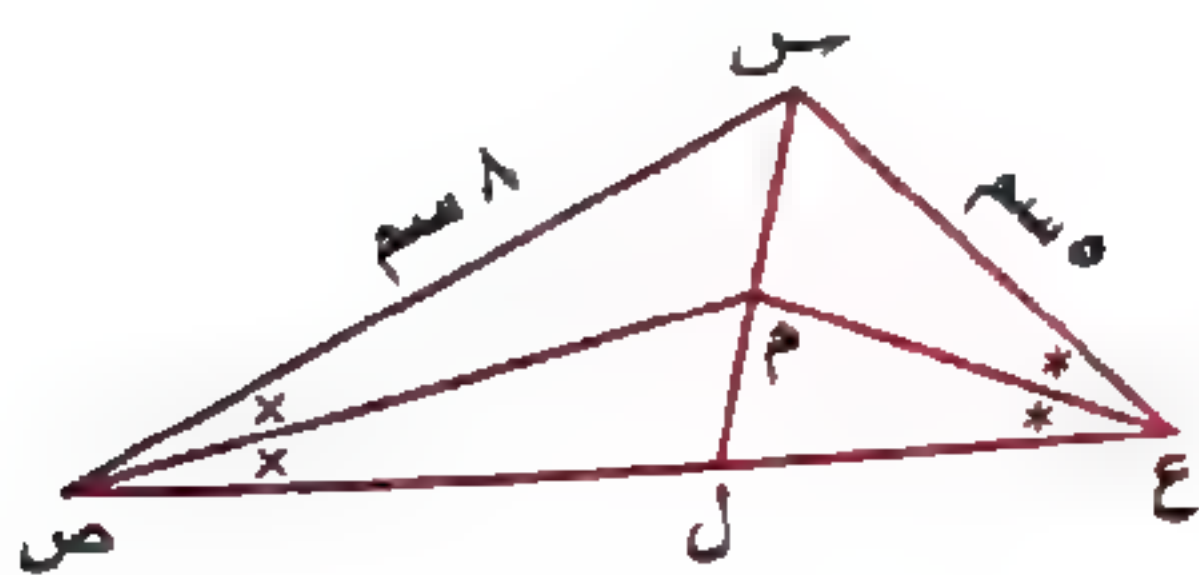


$$AB \text{ ح مثلث فيه : } AB = 7, AC = 8, DE = 3.5$$

$$DE \parallel BC, \text{ حيث } AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$$

أثبت أن : DE ينصف AB و AC

١٢ في الشكل المقابل :

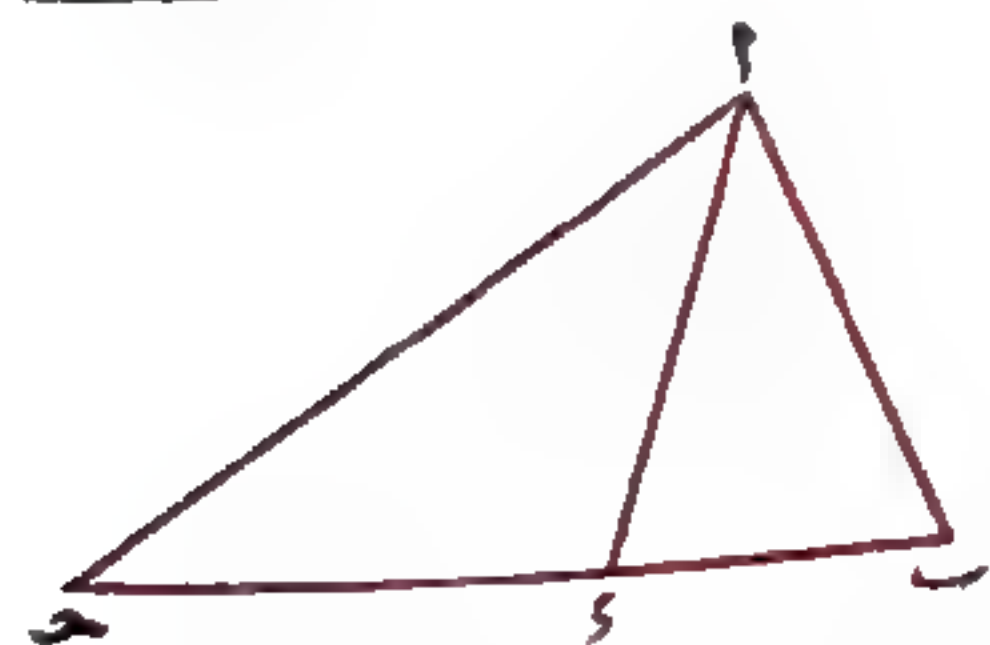


$$E \text{ م } , \text{ ص م منصف } AC, \text{ حيث } AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$$

$$DE \parallel BC, \text{ حيث } AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$$

أثبت أن : DE ينصف AB و AC

١٣ في الشكل المقابل :



$$\text{إذا كان } AD : DB : AE : EC = 3 : 4 : 3.5 : 4.5$$

فأثبت أن : DE ينصف AB و AC

$$AB \text{ ح مثلث فيه : } AB = 7, AC = 8, DE = 3.5$$

$$DE \parallel BC, \text{ حيث } AD = 3, DB = 4, AE = 3.5, EC = 4.5$$

(١) أثبت أن : DE ينصف AB و AC

(٢) أوجد : طول DE



تطبيقات التناسب في الدائرة

5

قوة النقطة بالنسبة لدائرة

تعريف

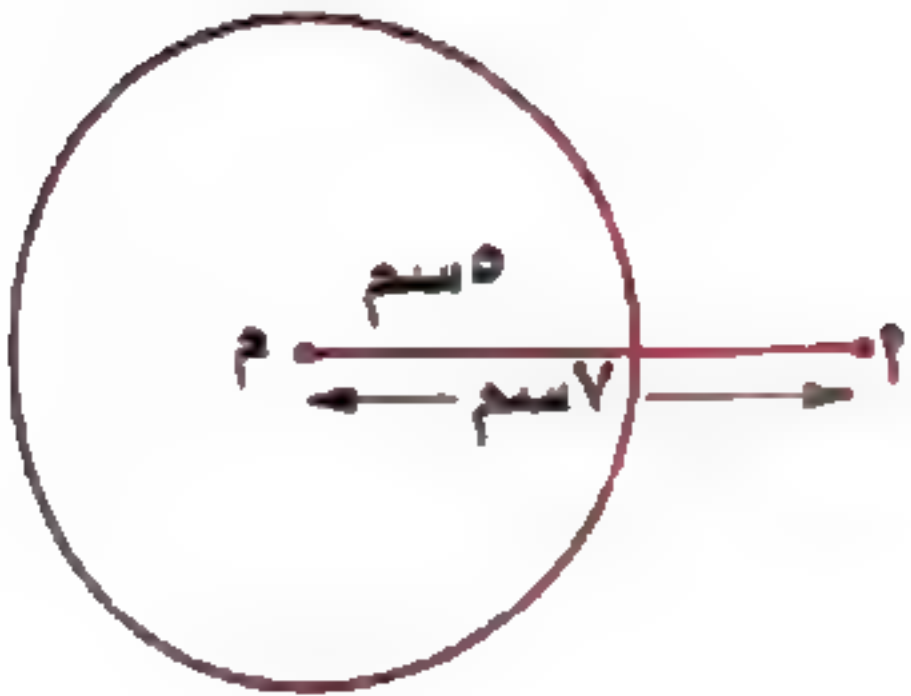
قوة النقطة P بالنسبة للدائرة M التي طول نصف قطرها h هو العدد الحقيقي $h^2 - (PM)^2$ (2)

حيث : $h^2 - (PM)^2 = (2)^2 - 7^2 = 24$

فمثلاً في الشكل المقابل :

إذا كانت P نقطة خارج الدائرة M التي طول نصف قطرها h سم

بحيث : $PM = 7$ سم فإن : $h^2 - (PM)^2 = 24$



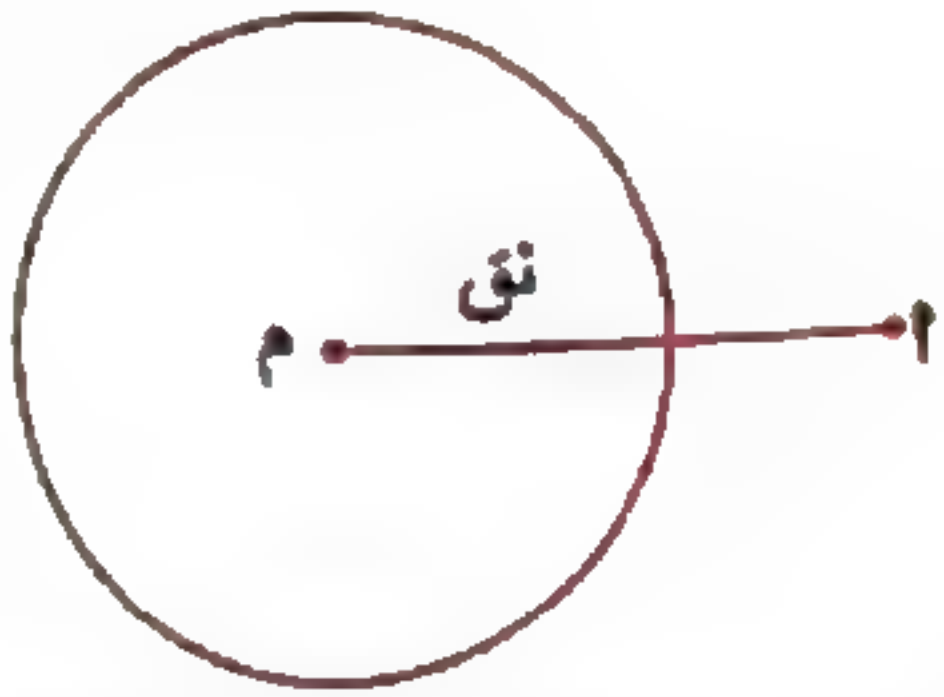
ملاحظة

يمكن تحديد موضع نقطة P بالنسبة للدائرة M عن طريق معرفة $h^2 - (PM)^2$ فإذا كان :

• $h^2 - (PM)^2 < 0$ فإن : P تقع خارج الدائرة.

• $h^2 - (PM)^2 = 0$ فإن : P تقع على الدائرة.

• $h^2 - (PM)^2 > 0$ فإن : P تقع داخل الدائرة.



مثال ١

إذا كانت M دائرة طول قطرها ١٢ سم ، P نقطة تقع في مستويها فحدد موضع النقطة P بالنسبة للدائرة M في كل حالة مما يأتي ثم احسب بعدها عن مركز الدائرة في كل حالة :

١ $h^2 - (PM)^2 = 13$

٢ $h^2 - (PM)^2 = 0$ = صفر

٣ $h^2 - (PM)^2 = -11$

الحل

- ∴ طول قطر الدائرة = ١٢ سم ∴ نق = ٦ سم
- ١ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$
- ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} < ١٢$
- ٢ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$ ∴ $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$
- ٣ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$
- ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$
- ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} > ١١$

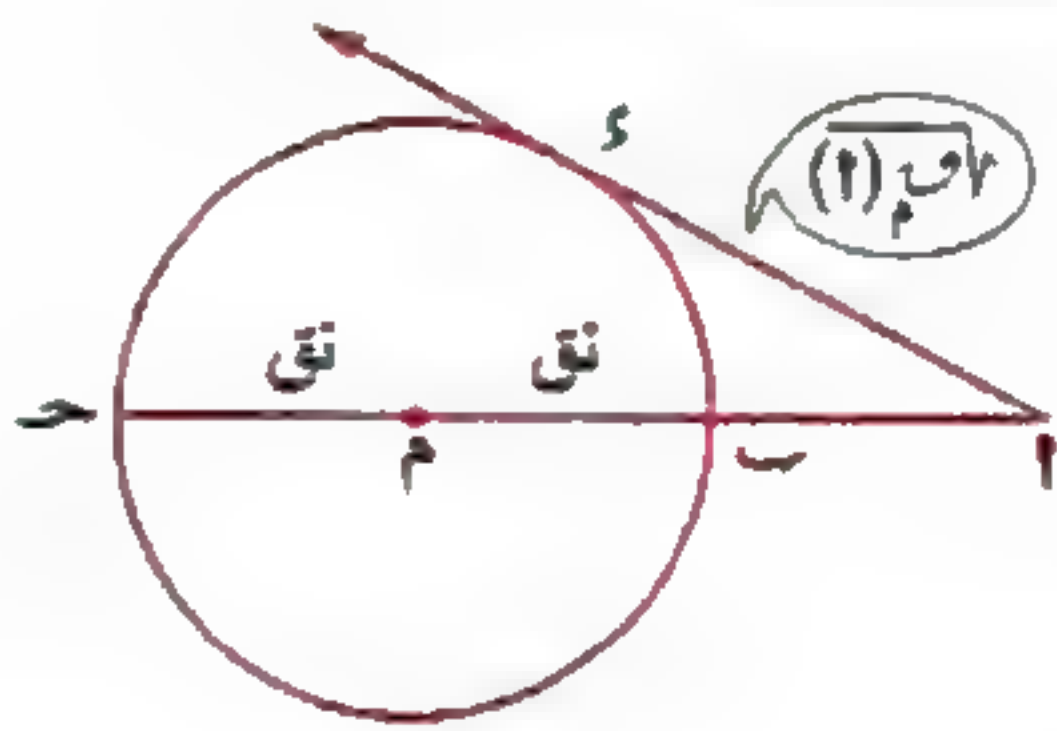
حاول بنفسك

حدد موضع كل من النقط ١، ب، ح بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان :

- ١ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = ١١$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = ١١$
- ٢ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$ ∴ $\sqrt{١١} = (١) \text{ م} = \text{صفر}$
- ٣ ∴ $\sqrt{١٦} = (١) \text{ م} = ١٦$ ∴ $\sqrt{١٦} = (١) \text{ م} = ١٦$ ∴ $\sqrt{١٦} = (١) \text{ م} = ١٦$

ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة م

ملاحظة ٢



إذا وقعت النقطة ١ خارج الدائرة م

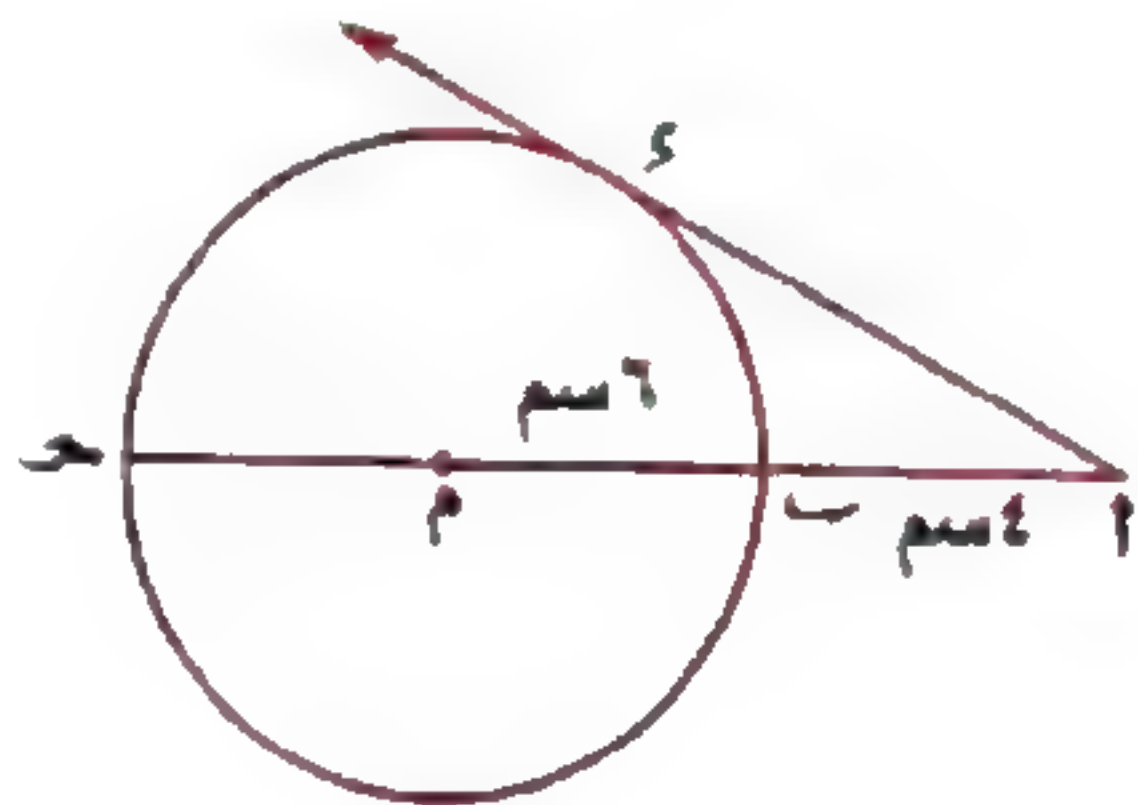
فإن : $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

$$= (١ \text{ م} - \text{نق}) (١ \text{ م} + \text{نق})$$

$$= ١ \times ١ = ١ = \sqrt{١} = (١) \text{ م}$$

∴ طول القطعة المستقيمة المماسية المرسومة من النقطة ١ للدائرة م = $\sqrt{١} = (١) \text{ م}$

فمثلاً في الشكل المقابل :



إذا كانت ١ نقطة تقع خارج الدائرة م التي طول

نصف قطرها ٦ سم ، $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

فإذا كان : $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

يأخذى الطرق الآتية :

• باستخدام التعريف : $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

• باستخدام الملاحظة السابقة : $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

ومما سبق يمكن إيجاد : $\sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م} = \sqrt{١٢} = (١) \text{ م}$

لاحظ أنه

في الشكل المقابل :

إذا كانت : P نقطة خارج الدائرة

، PA تقطع الدائرة في B ، C

فإن : $PA \times PB = (P) \times PC$

ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة حيث :

$$PA \times PB = (P) \times PC$$

$$PA \times PB = (P) \times PC$$

(حيث PA يمس الدائرة في C)

$$PA \times PB = (P) \times PC$$

ملاحظة ٢

إذا وقعت النقطة P داخل الدائرة فإن :

$$PA \times PB = (P) \times PC = (P) \times PD$$

$$PA \times PB = (P) \times PC = (P) \times PD$$

فمثلاً في الشكل المقابل :

إذا كانت : P نقطة تقع داخل الدائرة التي طول

نصف قطرها 7 سم وتبعد عن مركزها 4 سم

$$PA \times PB = (P) \times PC = (P) \times PD = 11 \times 3 = 33$$

لاحظ أنه

في الشكل المقابل :

إذا كانت : AB وترًا في الدائرة M

$$AB \times AC = (P) \times AD$$

$$AB \times AC = (P) \times AD$$

ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة كما يلي :

$$AB \times AC = (P) \times AD$$

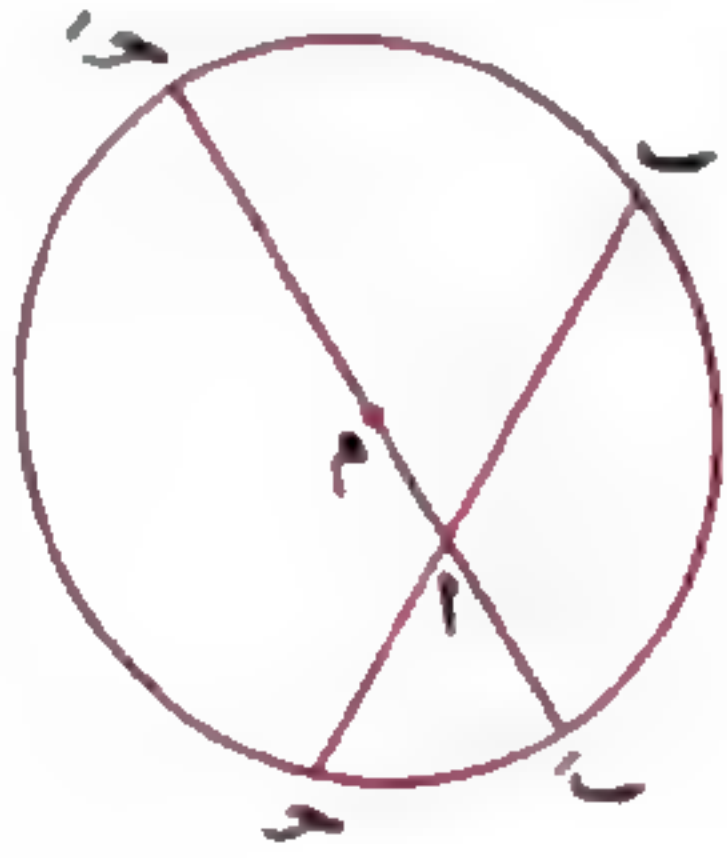
$$AB \times AC = (P) \times AD$$

(حيث AB قطر)

$$AB \times AC = (P) \times AD$$

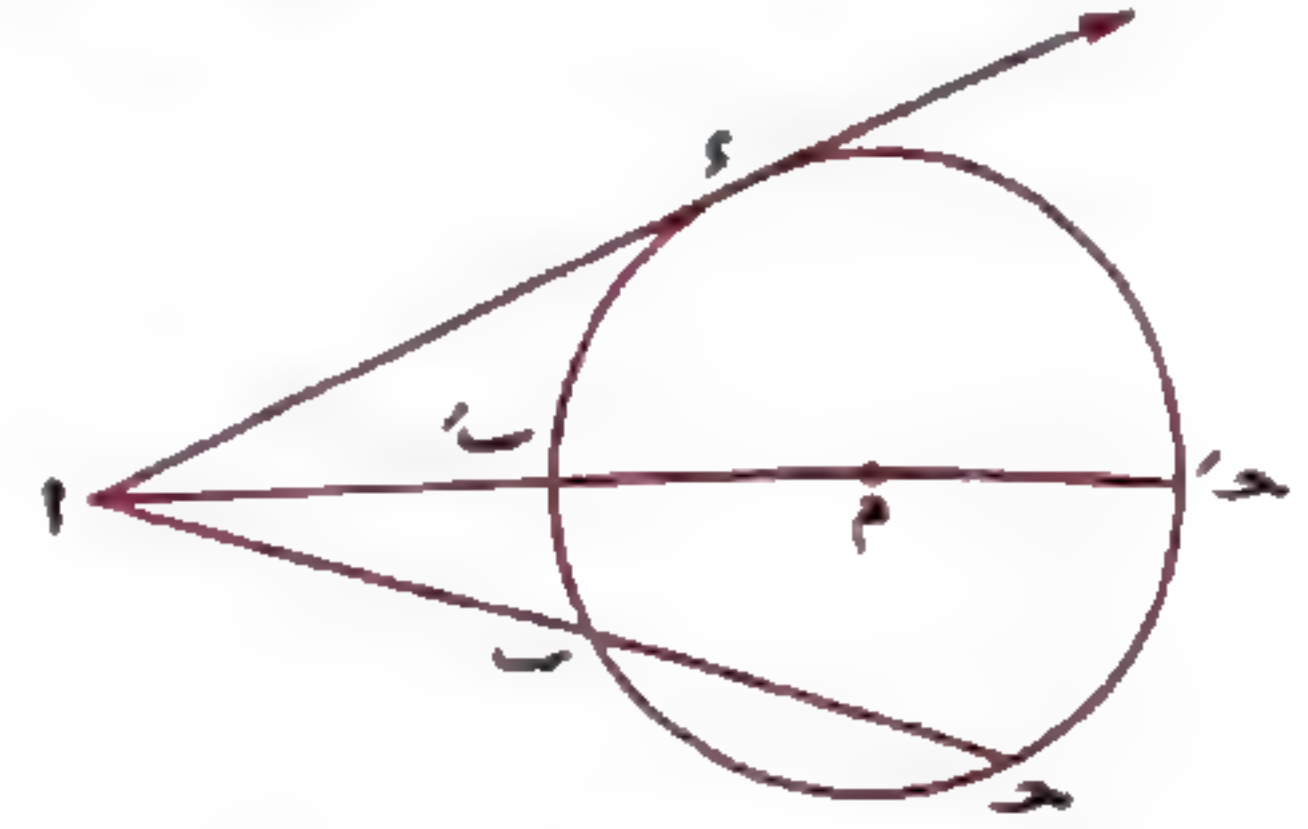
يمكن تلخيص ما سبق كما يلي :

إذا كانت P داخل الدائرة M فإن :



$$PM(1) = PA \times PB = PC \times PD$$

إذا كانت P خارج الدائرة M فإن :

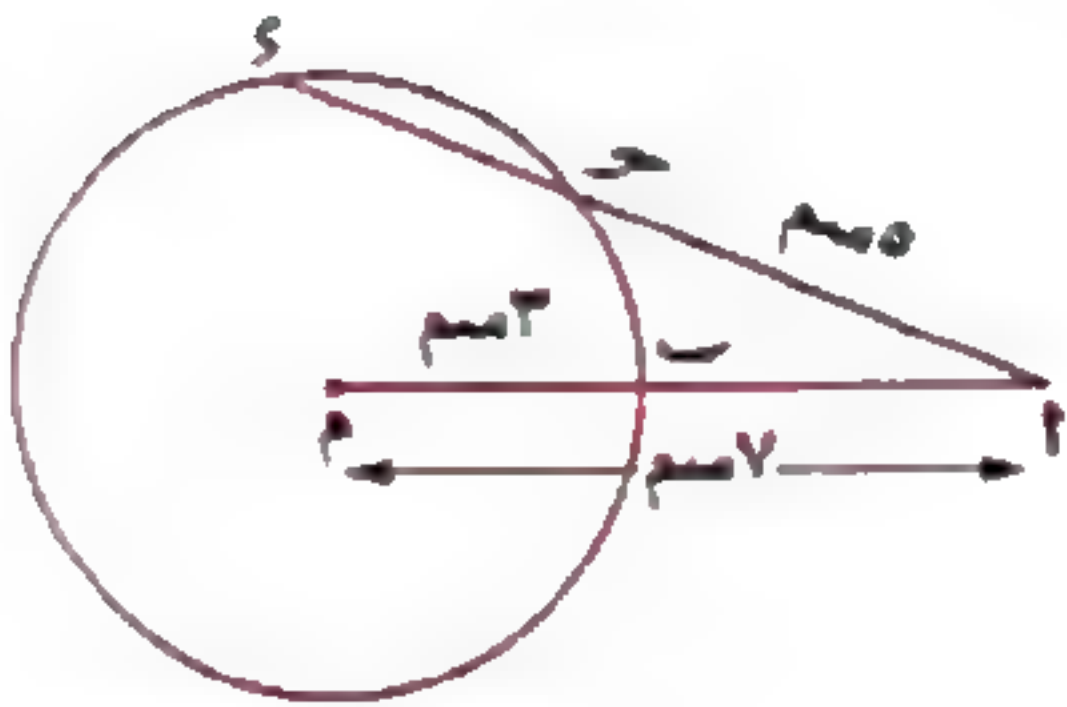


$$PM(2) = PA \times PB = PC \times PD = PE^2$$

مثال ٢

دائرة مركزها M وطول نصف قطرها ٢ سم ، P نقطة تبعد عن مركزها ٧ سم ، رسم من P مستقيم يقطع الدائرة في H ، E بحيث $P \in \overline{HE}$ فإذا كان : $PA = ٥$ سم فاحسب : طول الوتر HE

الحل



(وهو المطلوب)

$$\therefore PA \times ٥ = ٤٠$$

$$\therefore PM(1) = PA^2 - PE^2 = ٩ - ٤٩ = ٤٠$$

$$\therefore PA \times HE = PM(1)$$

$$\therefore PA = ٨ \text{ سم}$$

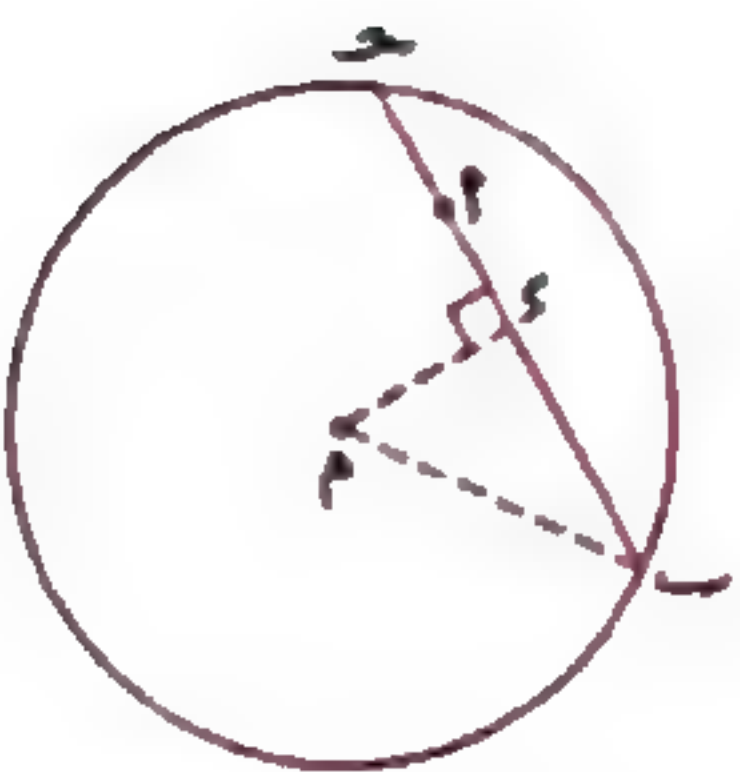
$$\therefore HE = PA - PE = ٨ - ٥ = ٣ \text{ سم}$$

مثال ٣

دائرة M طول نصف قطرها ٧ سم ، P نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر BC يمر بالنقطة P بحيث $AP = ٢$ سم

احسب : 1 طول الوتر BC 2 بُعد الوتر BC عن مركز الدائرة.

الحل



$$\therefore BC = AP + PM = ٨ = ٢\sqrt{٨} \text{ سم (المطلوب أولاً)}$$

وبفرض أن بُعد الوتر BC عن مركز الدائرة هو E حيث : $ME \perp BC$

$$\therefore PM(1) = PA^2 - PE^2 = ٢٥ - ٤٩ = ٢٤$$

$$\therefore PA \times PB = PM(1)$$

$$\therefore PA \times PB = ٢٤$$

$$\therefore PA \times PB = ٢٤$$

$$\therefore PA = ٨ = ٢\sqrt{٨} \text{ سم}$$

$$\therefore PB = ٦ = ٢\sqrt{٦} \text{ سم}$$

∴ و منتصف \overline{AC}

∴ $OM \perp AC$

$$\therefore OM = (O) = (M) - \text{نق}^2 = - \text{ب} \times \text{د} = -$$

$$\therefore (O) = (M) - 49 = - \text{ب} \times \text{د} = -$$

$$\therefore (O) = (M) = 17$$

$$\therefore OM = \sqrt{17} = 4.1 \text{ سم} \quad (\text{المطلوب ثانيًا})$$

حاول بنفسك

الدائرة M طول نصف قطرها ٢٠ سم ، A نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم ، R رسم الوتر AC

حيث $A \in AC$ ، $AB = 2$

٢ بُعد الوتر AC عن مركز الدائرة.

احسب : ١ طول الوتر AC

ملاحظة هامة

تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسي للدائرتين

فإذا كان : $OM = (O) = (M)$ فإن A تقع على المحور الأساسي للدائرتين M ، N

فمثلاً إذا كان : $OM = (O) = (M)$ ، $ON = (N)$ فإن : AB محور أساسي للدائرتين M ، N

مثال ٤

دائرتان M ، N متقاطعتان في A ، B ، $C \in AC$ ، $D \in AC$ ، رسم AD فقطع الدائرة M في E ، F حيث :

$AD = 9$ سم ، $DE = 7$ سم ، ورسم AD يمس الدائرة N عند O

١ أثبت أن : AD تقع على المحور الأساسي للدائرتين M ، N

٢ إذا كان : $AB = 10$ سم أوجد : طول كل من AB ، AD

الحل

∴ A تقع على الدائرة M ، A تقع على الدائرة N

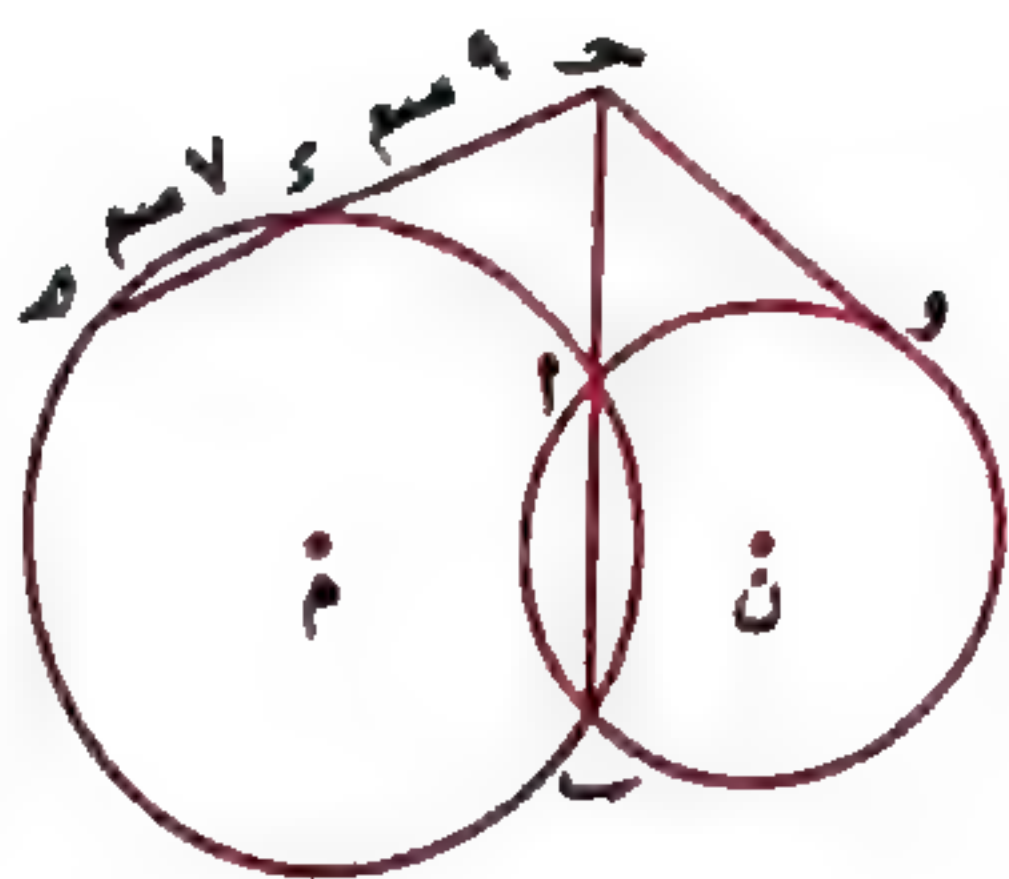
$$\therefore OM = (O) = (M) = \text{صفر}$$

$$\text{بالمثل : } ON = (N) = (O) = \text{صفر}$$

∴ AB محور أساسي للدائرتين M ، N ، ∴ $AD \in AC$ ، ∴ $AD \in AC$

∴ النقطة D تقع على المحور الأساسي للدائرتين M ، N

$$\therefore OM = (O) = (M) = \text{صفر} = \text{ح} \times \text{د} = 9 \times 16 = 144$$



(المطلوب أولاً)

$$\begin{aligned} \therefore 144 &= 10 + 2 \text{ ح} \\ \therefore (2 \text{ ح})^2 &= 144 - 10 \\ \therefore 2 \text{ ح} &= 8 \text{ سم} \end{aligned}$$

(المطلوب ثانيًا)

$$\therefore \text{حو} = 12 \text{ سم}$$

$$\text{م} \times \text{ح} = \text{ح} \times \text{ح}$$

$$\therefore 144 = 10 + 2 \text{ ح}$$

$$\therefore (8 - 2 \text{ ح}) (8 + 2 \text{ ح}) = 0$$

، \therefore ح تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

$$\therefore \text{م} \times \text{ح} = \text{ح} \times \text{ح} ، \text{م} = \text{ح} = \text{حو}$$

$$\therefore 144 = \text{حو}^2$$

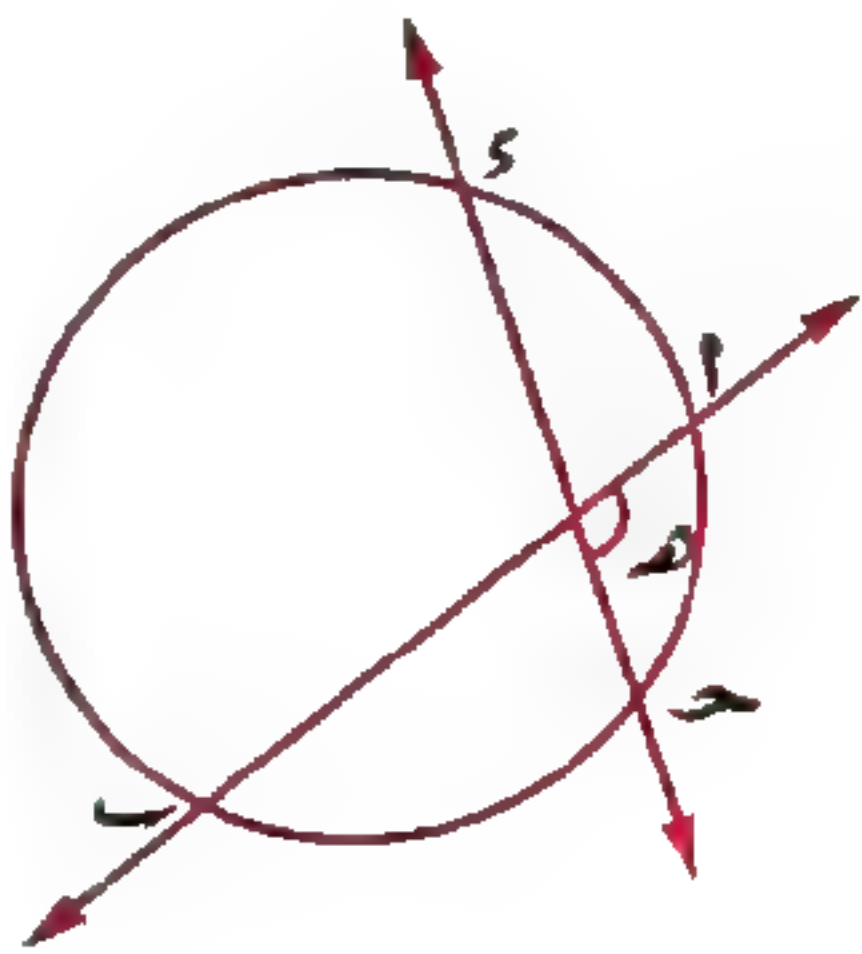
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

تذكر أن :

١ إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوس

المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.

في الشكل المقابل :



أ ، ح قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{أ} \cap \overleftrightarrow{ب} = \text{م}$

$$\text{فإن : } \text{ح} = \frac{1}{2} [\text{أ} + \text{ب}]$$

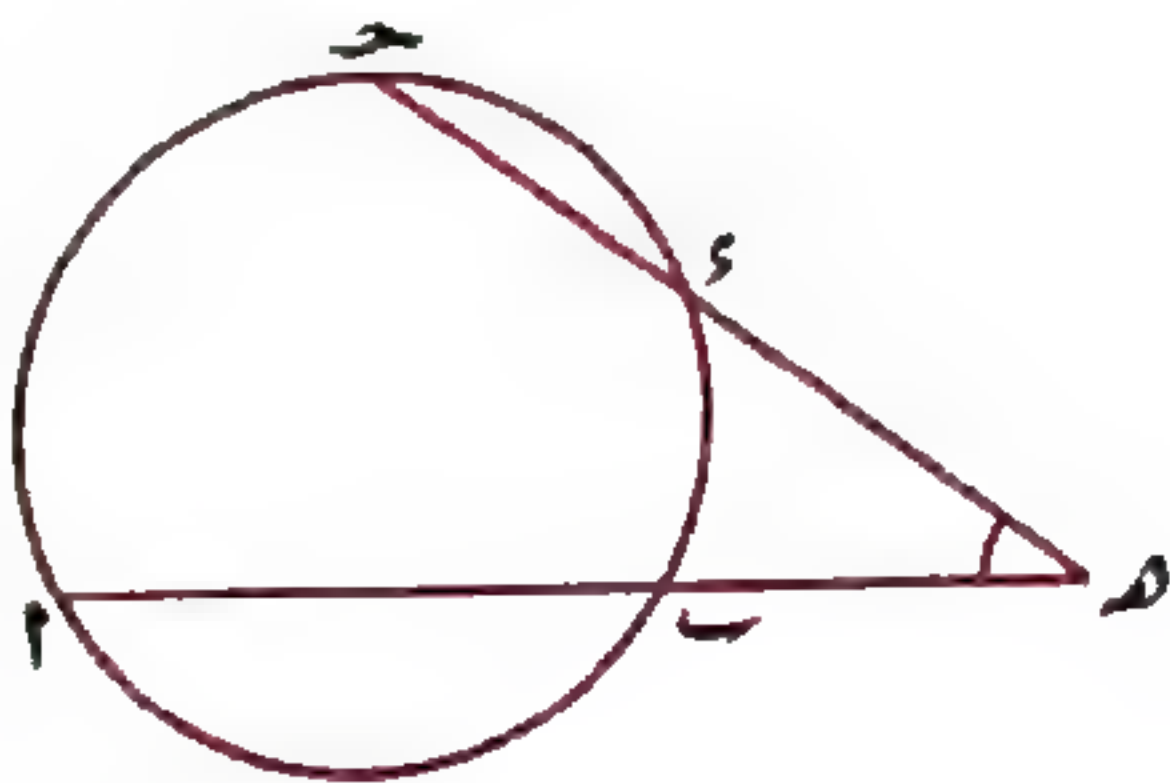
فمثلا إذا كان : $\text{أ} = 50^\circ$ ، $\text{ب} = 170^\circ$

$$\text{فإن : } \text{ح} = \frac{1}{2} [50^\circ + 170^\circ] = 110^\circ$$

٢ إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي

القوسين المقابلين لها.

في الشكل المقابل :



أ ، ح قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{أ} \cap \overleftrightarrow{ب} = \text{م}$

$$\text{فإن : } \text{ح} = \frac{1}{2} [\text{أ} - \text{ب}]$$

فمثلا إذا كان : $\text{أ} = 120^\circ$ ، $\text{ب} = 50^\circ$

$$\text{فإن : } \text{ح} = \frac{1}{2} [120^\circ - 50^\circ] = 35^\circ$$

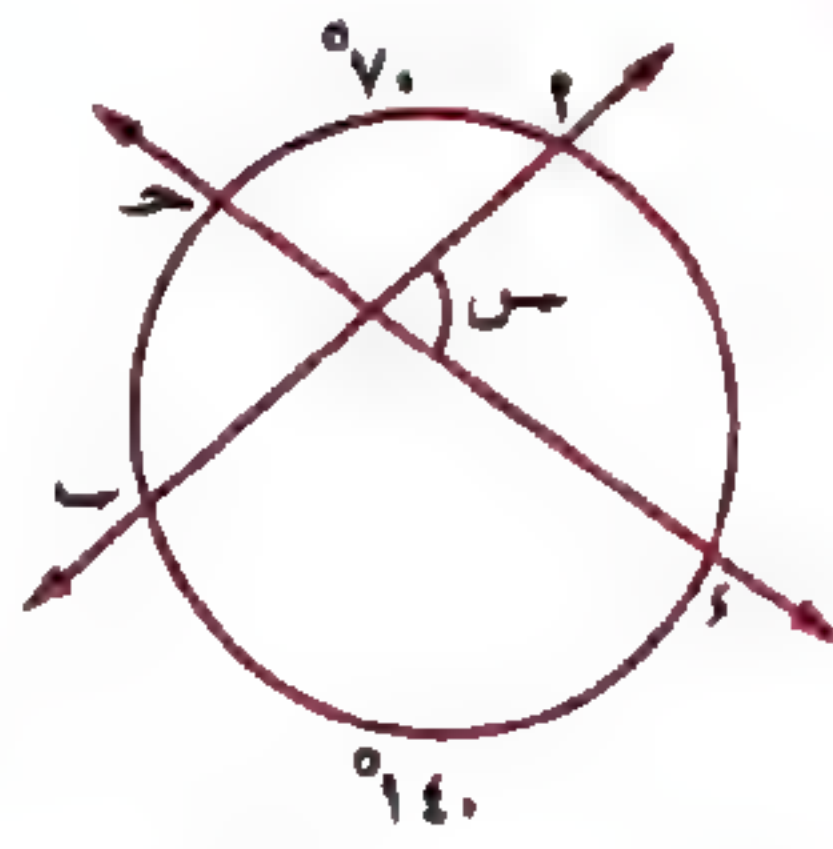
مثال ٥

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س :

١



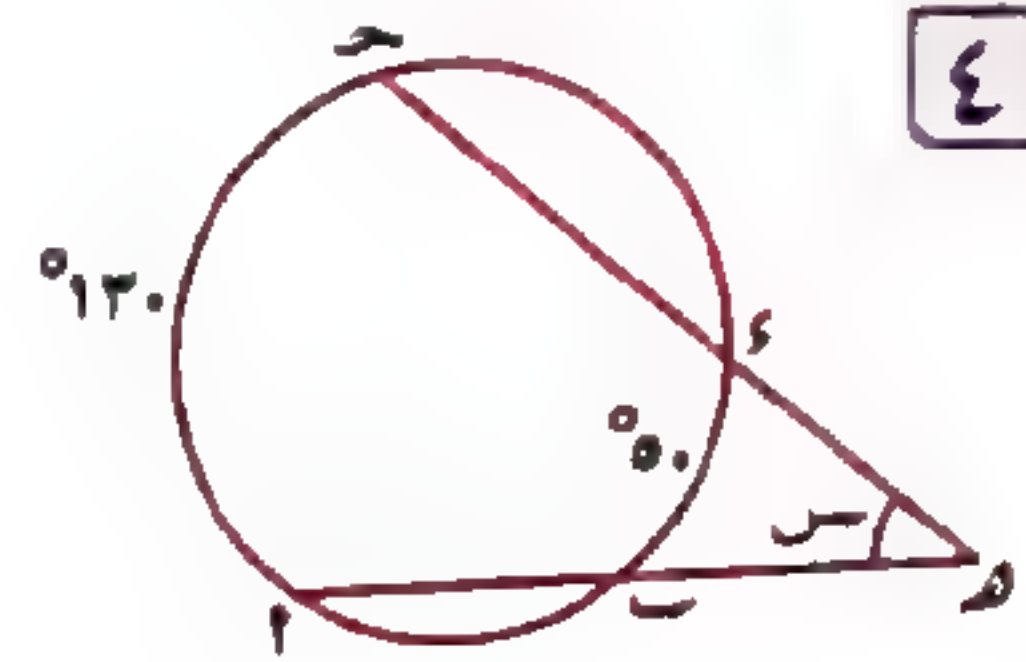
٢



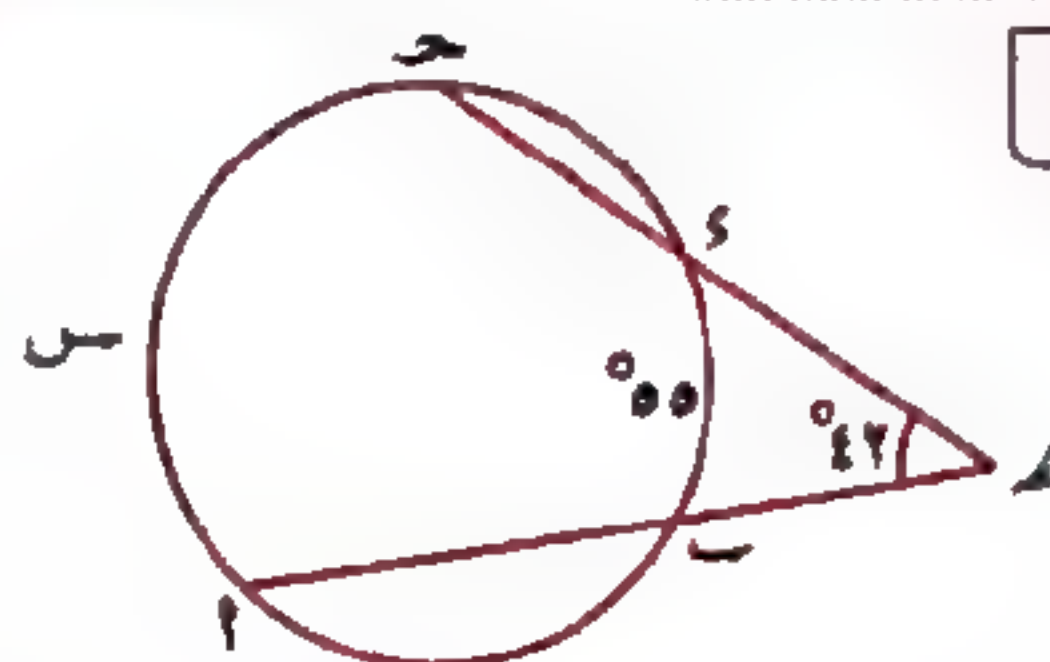
٣



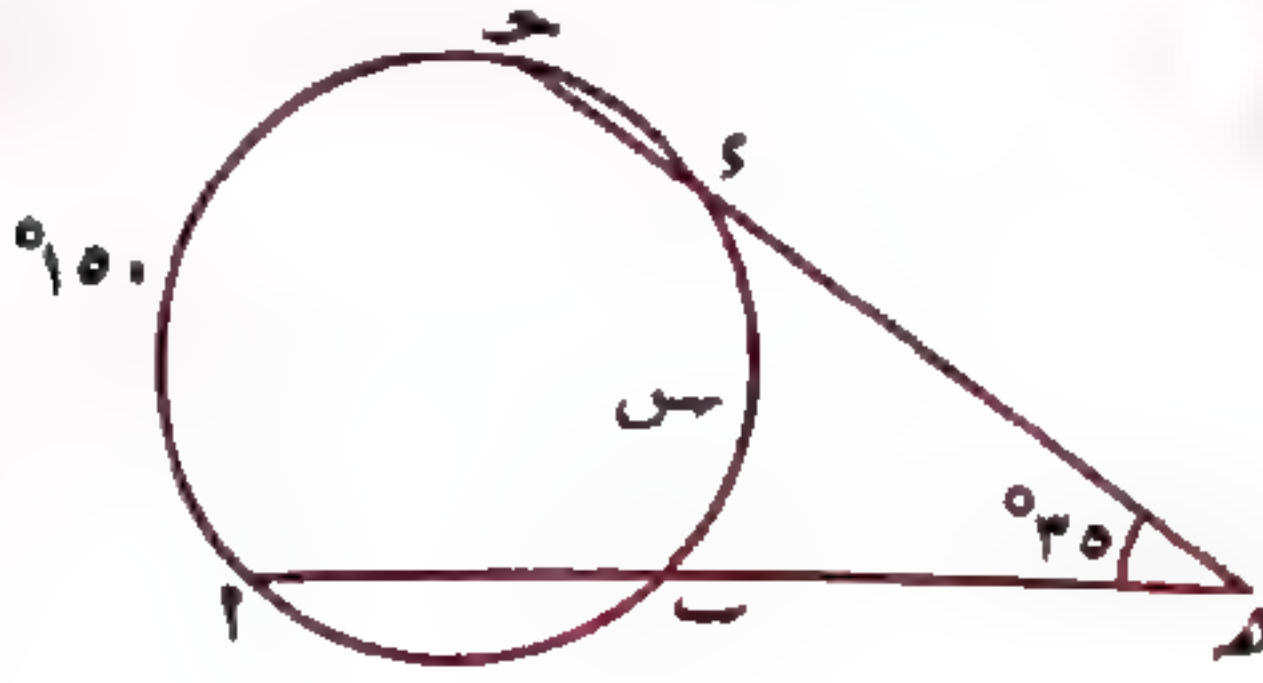
٤



٥



٦



الحل

١ $س = \frac{1}{2} [100 + 40] = 70$

٢ $س = \frac{1}{2} [140 - 70] = 35$

$س = \frac{1}{2} [110 - 80] = 15$

٣ $س = \frac{1}{2} [110 - 80] = 15$

٤ $س = \frac{1}{2} [130 - 50] = 40$

٥ $س = \frac{1}{2} [55 - 130] = -37.5$

٦ $س = \frac{1}{2} [150 - 100] = 25$

$س = \frac{1}{2} [150 - 100] = 25$

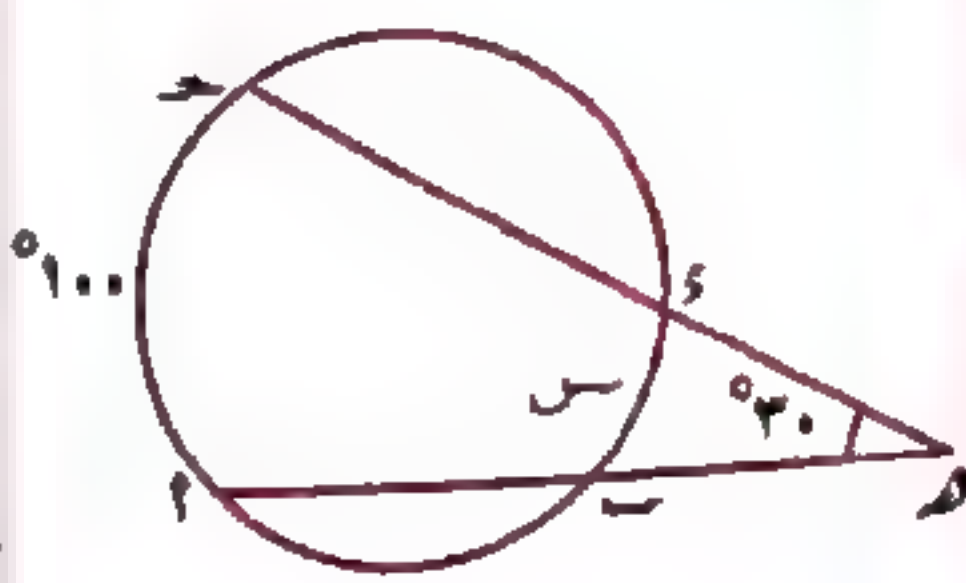
$س = \frac{1}{2} [150 - 100] = 25$

$س = \frac{1}{2} [150 - 100] = 25$

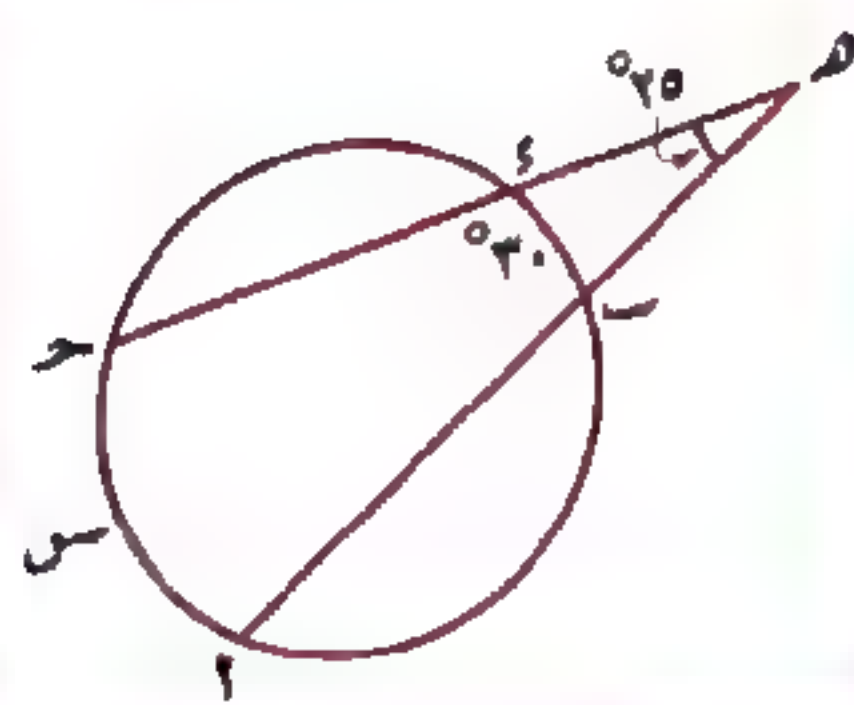
$س = \frac{1}{2} [150 - 100] = 25$

حاول بنفسك

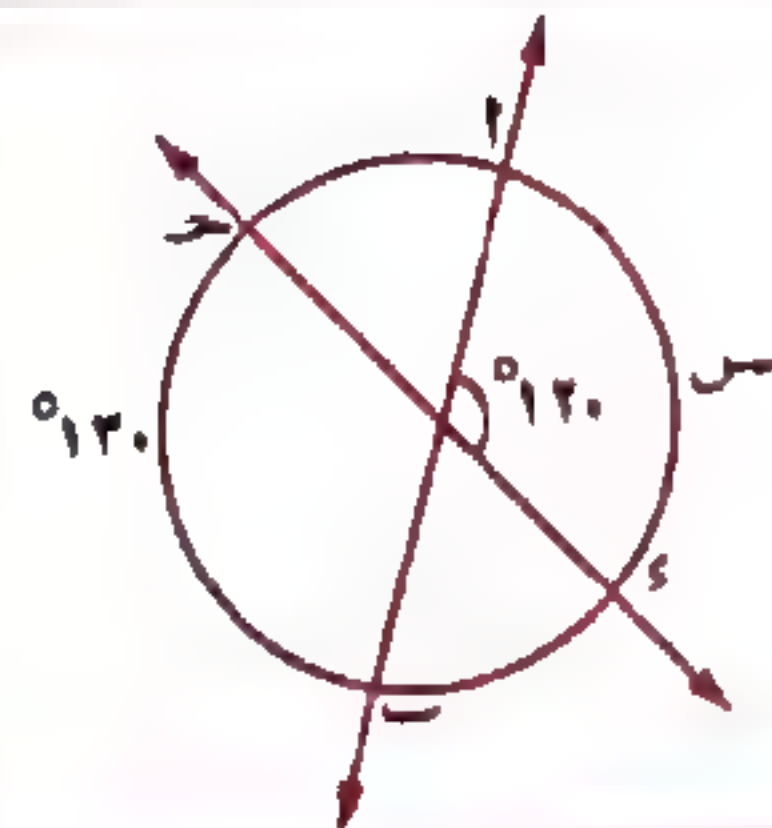
أوجد قيمة س في كل مما يأتي :



شكل (E)



شكل (3)



شكل (2)



شكل (1)

لنمارن مشهور

القاطع والمماس لدائرة (أو المماسان لدائرة) المتقاطعان في نقطة خارجها ، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساوياً نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

تقاطع القاطع والمماس لدائرة

الحالة الأولى

المعطيات
المطلوب
العمل
البرهان

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap$ الدائرة م = { ح ، ع }

إثبات أن : $\widehat{د ح ع} = \widehat{د أ ب} + \widehat{د ب ع}$

نرسم ب ح ، ب ع

∴ د ب ح و خارجة عن Δ أ ب ح

$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

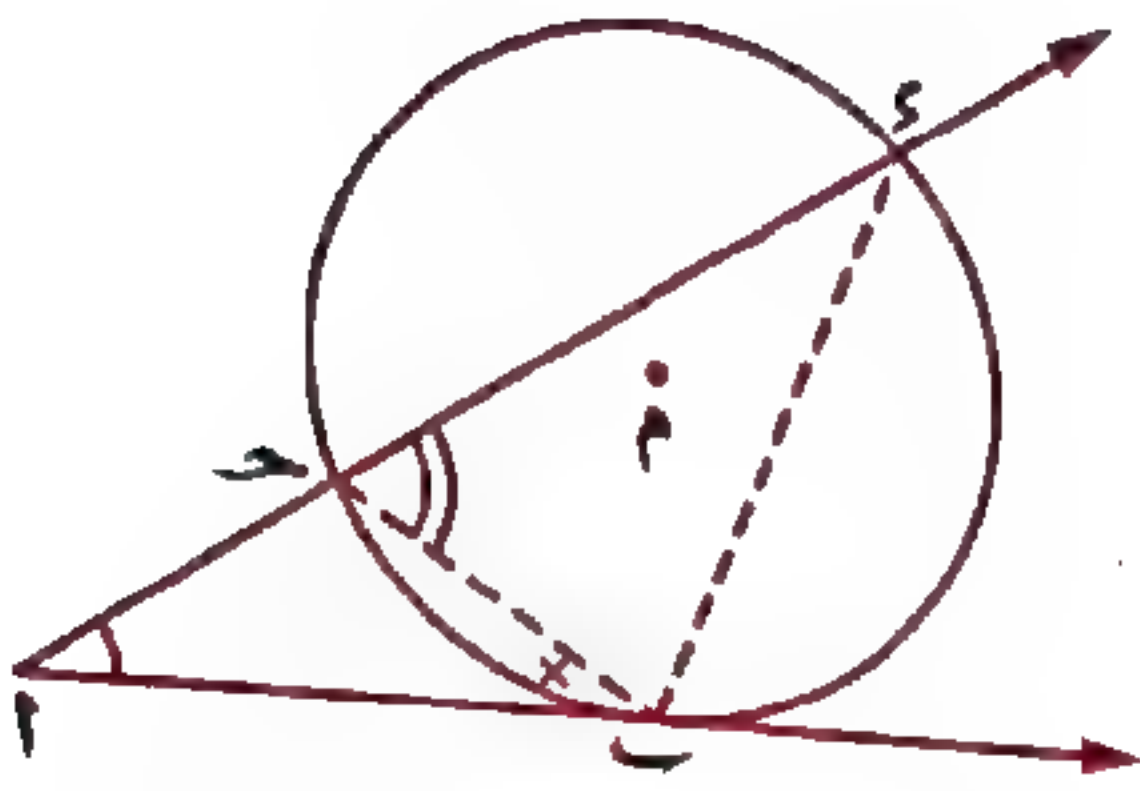
$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع} \quad \therefore \widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع} \quad \therefore \widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

(وهو المطلوب)



تقاطع مماسين لدائرة

الحالة الثانية

المعطيات
المطلوب
العمل
البرهان

أ ب ، أ ح مماسان للدائرة م عند ب ، ح

إثبات أن : $\widehat{د ب ح} = \widehat{د أ ب} + \widehat{د ب ع}$

نرسم ب ح

∴ د ب ح و خارجة عن Δ أ ب ح

$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

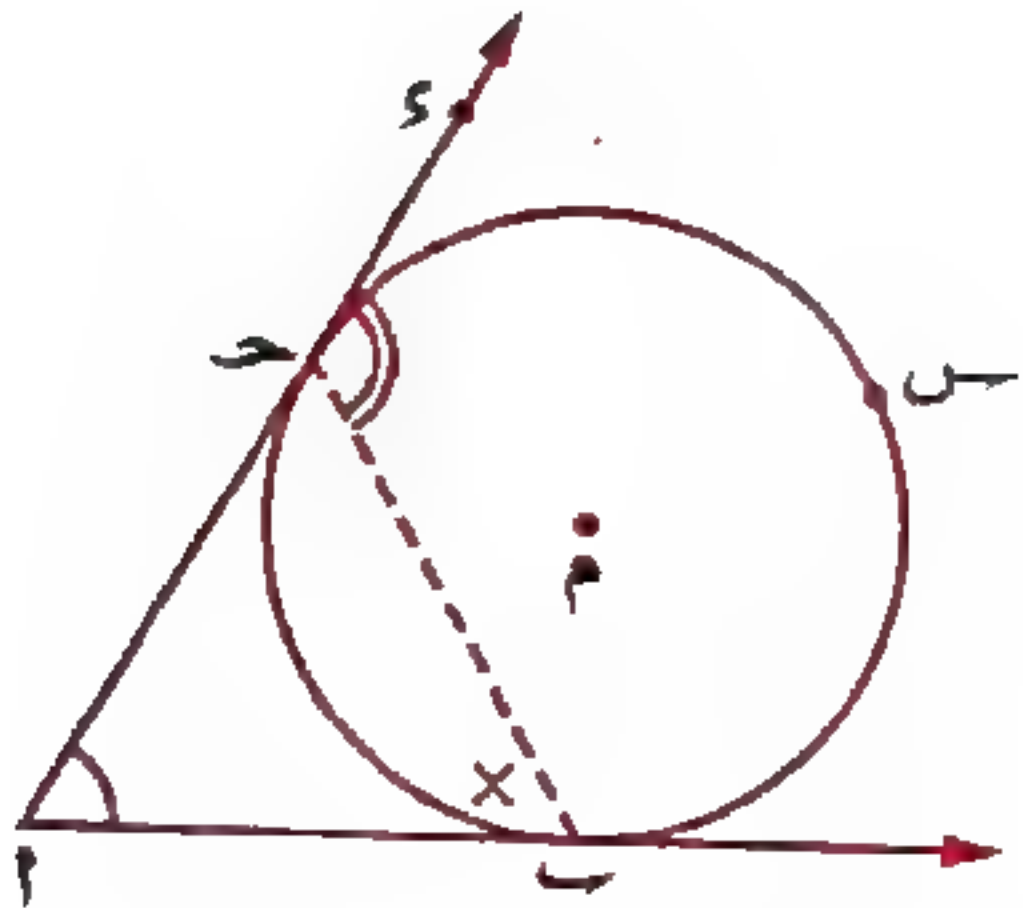
$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع} \quad \therefore \widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع} \quad \therefore \widehat{د ب ح} = \widehat{د ب ع} + \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

$$\widehat{د ب ح} - \widehat{د ب ع} = \widehat{د ح ع}$$

(وهو المطلوب)



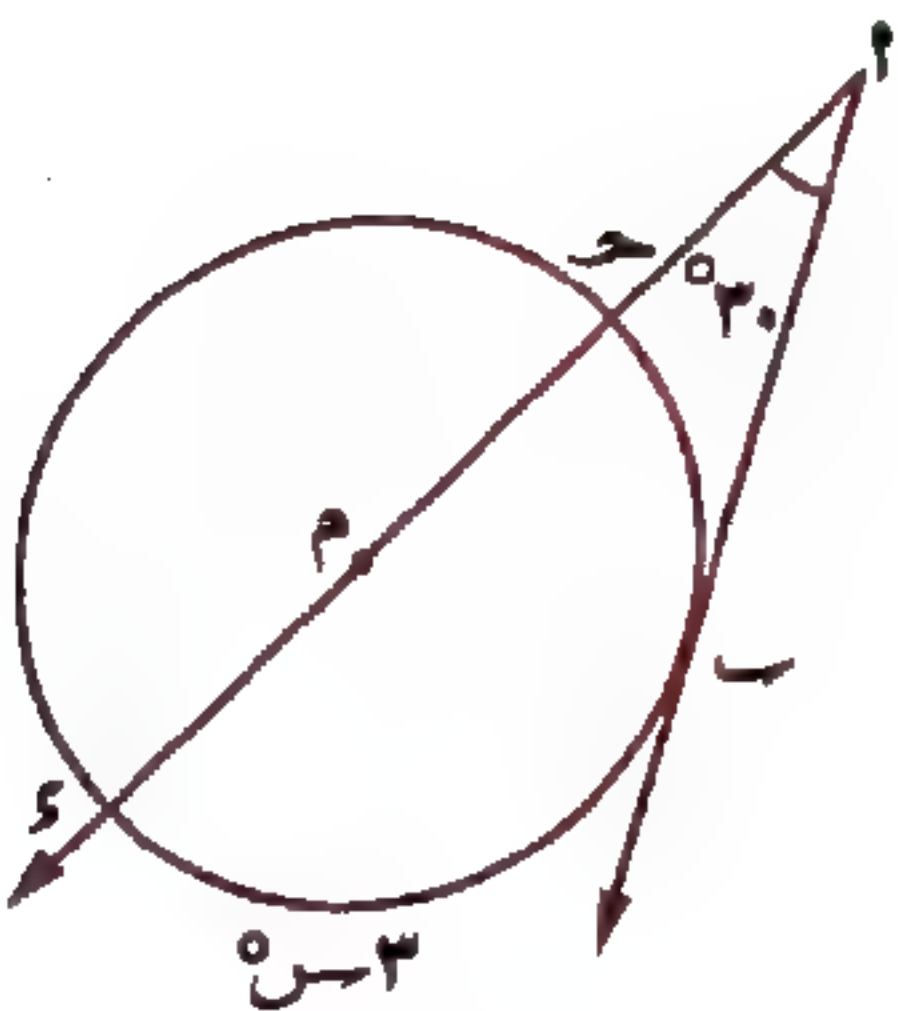
مثال ٦

في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب مماساً للدائرة م عند ب ، $\widehat{د ب ح} = 30^\circ$

أ م يقطع الدائرة في ح ، ع ، $\widehat{د ب ع} = 3^\circ$

أوجد : قيمة س



الحل

$$\therefore \text{ق (د ا)} = \frac{1}{4} [\text{ق (ب د)} - \text{ق (ب ح)}]$$

$$\therefore \text{ق (ب د)} - \text{ق (ب ح)} = 60^\circ \quad (1)$$

$$\therefore \text{ق (ب د)} + \text{ق (ب ح)} = 180^\circ \quad (2)$$

$$\therefore \text{ق (ب د)} = 120^\circ$$

$$\therefore 3\text{س} = 120^\circ$$

(وهو المطلوب)

\therefore $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أ د}$ قاطع لها

$$\therefore \frac{1}{4} [\text{ق (ب د)} - \text{ق (ب ح)}] = 20^\circ$$

، \therefore $\overline{أ د}$ قطر في الدائرة م

بجمع (1) ، (2) ينتج أن : $2\text{ق (ب د)} = 240^\circ$

$$\therefore \text{ق (ب د)} = 3\text{س}$$

$$\therefore 3\text{س} = 120^\circ$$

مثال ٧

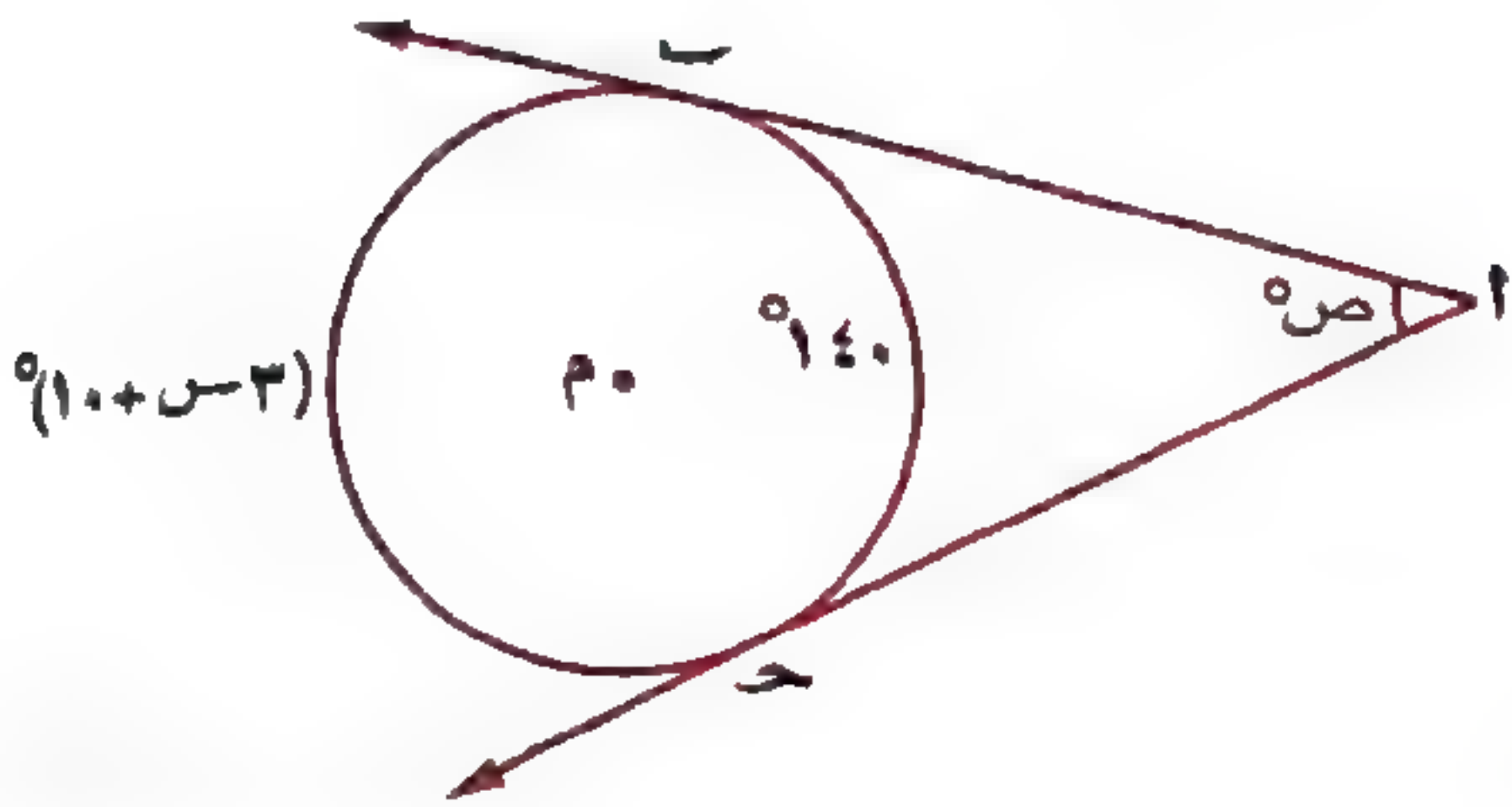
في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ مماسين للدائرة م

عند ب ، ح على الترتيب ، $\text{ق (د ا)} = 3\text{س}^\circ$

$$\text{ق (ب ح)} \text{ الأصغر} = 140^\circ$$

$$\text{ق (ب ح)} \text{ الأكبر} = (3\text{س} + 10)^\circ \text{ فأوجد : قيمتي س ، ص}$$



الحل

\therefore قياس الدائرة = 360°

$$\therefore 360^\circ = 140^\circ + (3\text{س} + 10)^\circ$$

$$\therefore 3\text{س} = 210^\circ$$

$$\therefore 3\text{س} = 210^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ب ح)} \text{ الأكبر} = (3 \times 70 + 10)^\circ = 220^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د ا)} = \frac{1}{4} [\text{ق (ب ح)} \text{ الأكبر} - \text{ق (ب ح)} \text{ الأصغر}]$$

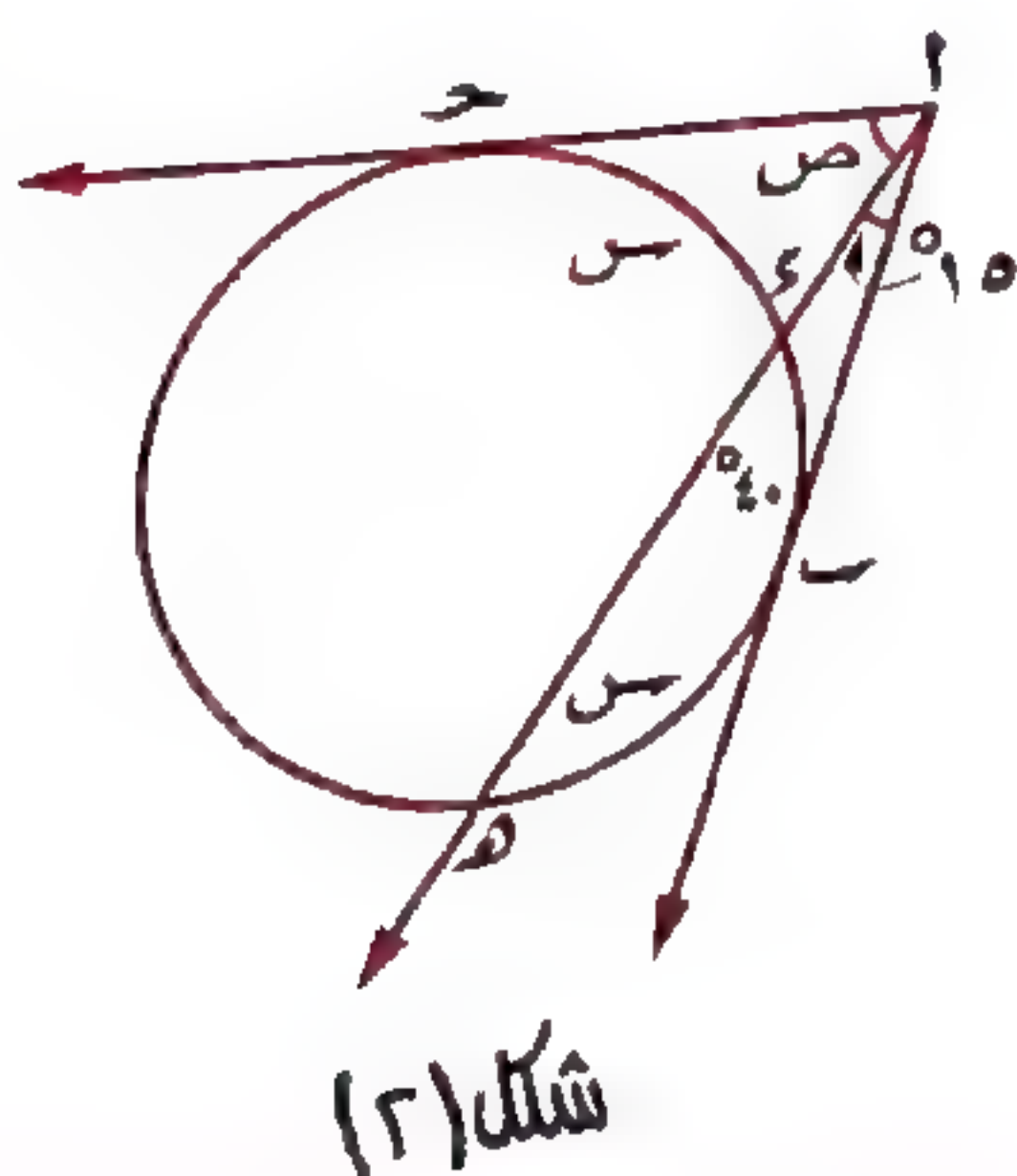
$$\therefore 3\text{س} = \frac{1}{4} [220^\circ - 140^\circ]$$

$$\therefore 3\text{س} = 20^\circ$$

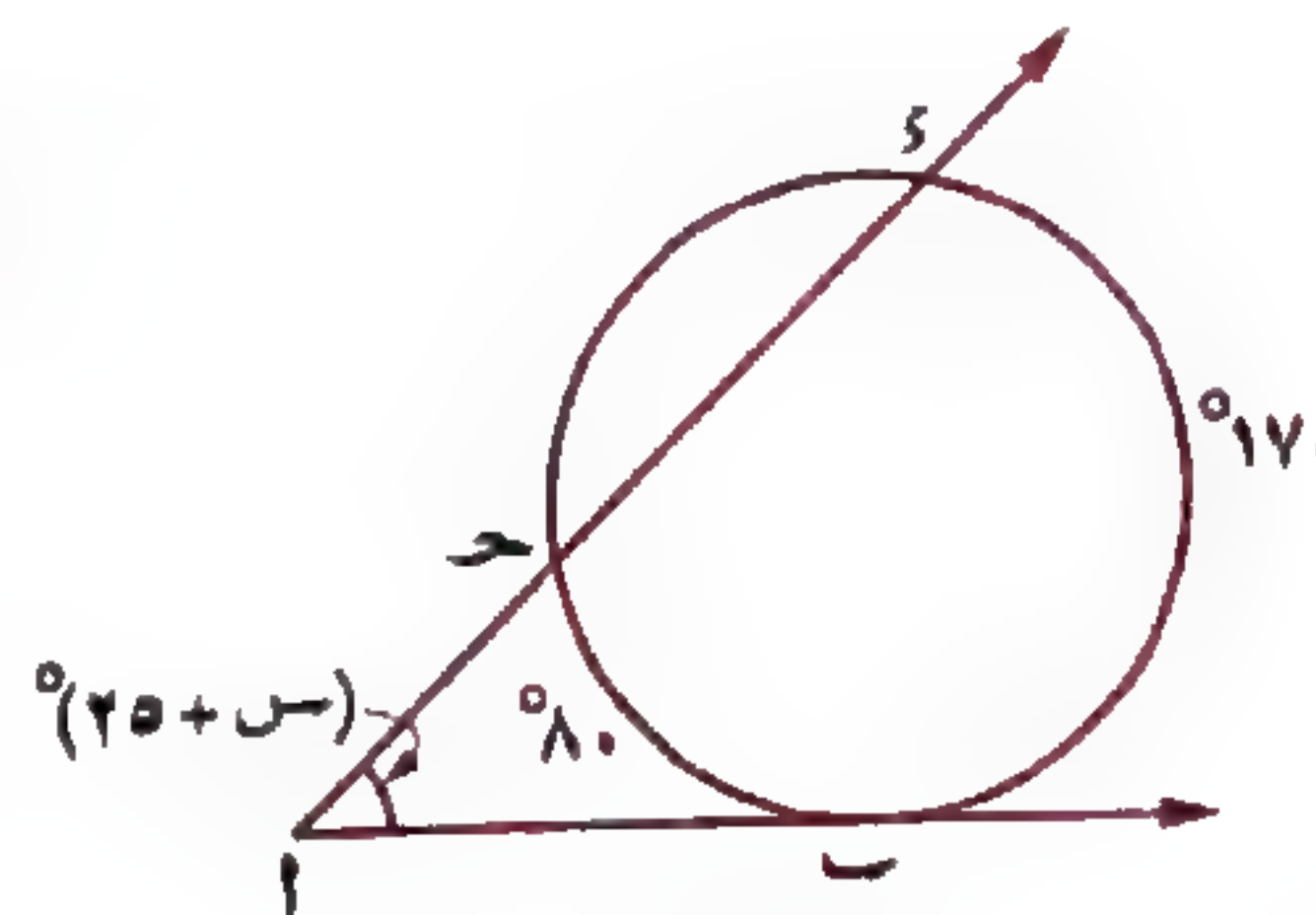
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

باستخدام معطيات الشكل ، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :



شكل (٢)



شكل (١)



١ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م ، والتي طول نصف قطرها نق :

(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

(٢) النقطة ب حيث ب م = ٨ سم ، نق = ١٥ سم

(٣) النقطة ح حيث ح م = ٧ سم ، نق = ٧ سم

(٤) النقطة د حيث د م = $\sqrt{17}$ سم ، نق = ٤ سم

٢ حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، ح بالنسبة إلى الدائرة م ، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم

احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية :

(١) أ م = ٣٦ - (٢) ب م = ٩٦ (٣) ح م = صفر

٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوي ٤٠٠

أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

« ١٥ سم »

٤ إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م ، أ مماسة للدائرة عند د بحيث أ د = ٨ سم

« ٦٤ »

فأوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة فإن أ تقع

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (ج) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٢) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة تقع في مستويها بحيث أ م = ٠ فإن أ تقع

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (ج) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٣) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في مستويها بحيث أ م = ٤ سم

فإن أ م = (أ)

(أ) $\sqrt{17}$ (ب) ٩ (ج) ٧ (د) ٧ -

(٤) إذا كانت ن دائرة طول قطرها ١٦ سم ، ب نقطة في مستويها بحيث ن ب = ٥ سم

فإن ن ب = (ب)

(أ) ٣٩ (ب) ٣٩ - (ج) $\sqrt{39}$ (د) ٢٣١ -

(٥) إذا كانت قوة نقطة بالنسبة لدائرة م تساوى ٦٢٥ ، بُعد هذه النقطة عن مركز الدائرة يساوى ١٥ سم
فإن طول قطر هذه الدائرة يساوى سم

- (١) ٤٠٠ (ب) ٢٠ (ج) $\sqrt{34} ٥$ (د) $\sqrt{34} ١٠$

(٦) إذا كانت م دائرة ، نقطة فى مستويها بحيث م = ٦ سم ، م (٢) = ١٣ -

فإن مساحة هذه الدائرة = سم^٢ $\left(\frac{٢٢}{٧} = \pi \right)$

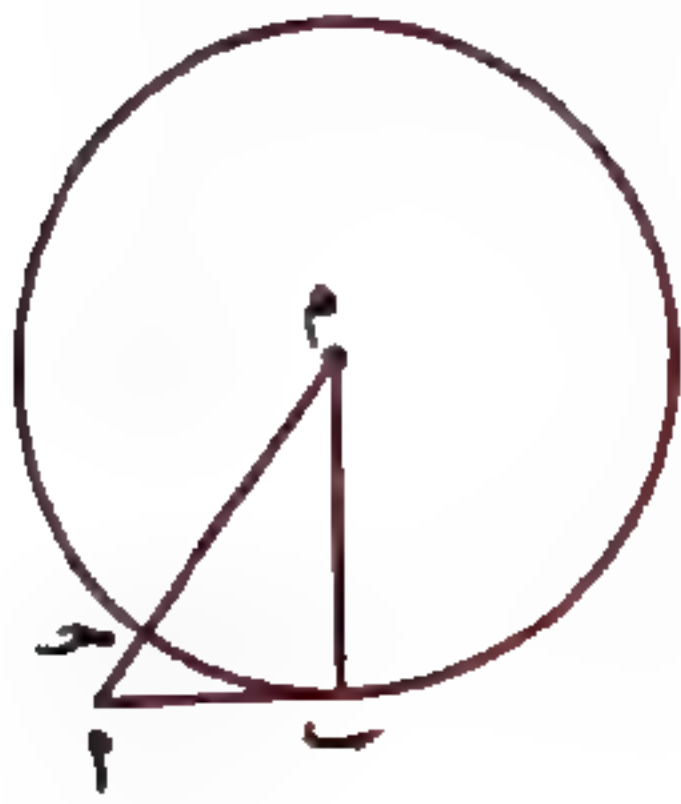
- (١) ١٥٤ (ب) ٤٤ (ج) ١٤٤ (د) ٧

(٧) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، نقطة فى مستويها تبعد عن مركز الدائرة ٢٥ سم فإن

طول القطعة المماسية المرسومة من م للدائرة م يساوى سم

- (١) ٥ (ب) ٤٩ (ج) ٢٤ (د) ١٢

٦ فى الشكل المقابل :



أ ب تماس الدائرة م عند ب ، م تقطع الدائرة م فى نقطة ح

إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٢ سم

، م (٢) = ٨١

فأوجد : (١) طول أ ب

(٢) طول أ ح

« ٩ سم ، ٣ سم »

٧ الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم ، رسم الوتر ب ح

حيث : أ ب = ٢٣ ، ب ح = ٢٢

احسب : (١) طول الوتر ب ح

(٢) بعد الوتر ب ح عن مركز الدائرة. « ٤٨ سم ، ١٩,٦ سم »

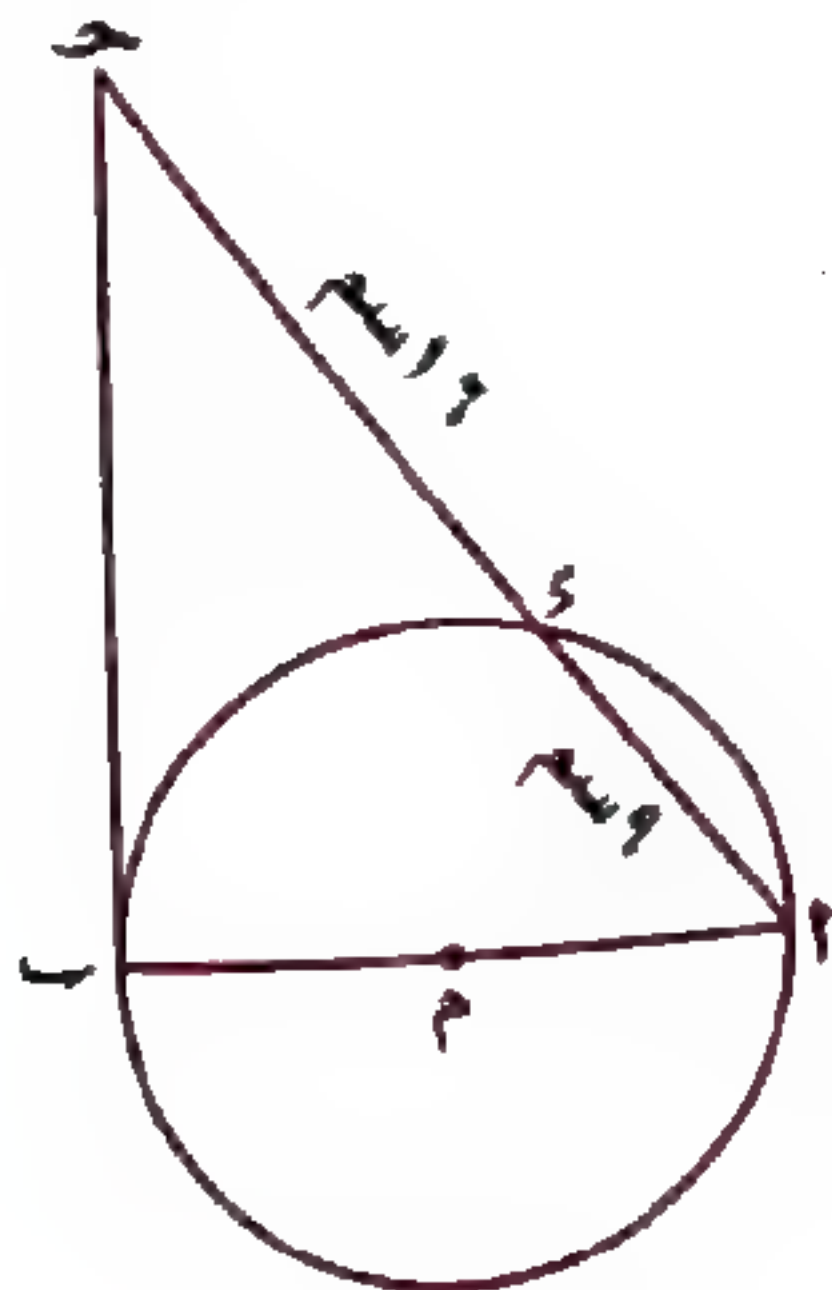
٨ الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم ، النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة ، رسم مستقيم

يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة فى نقطتين ح ، د حيث ح ب = د ح

احسب طول الوتر ح د وبعدة عن النقطة ن

« ١٠,٢ سم ، ٦,٣ سم »

٩ فى الشكل المقابل :



م دائرة ، أ ب قطر فيها ، ح ب تماس الدائرة م

فى ب ، ح أ تقطع الدائرة م فى د بحيث :

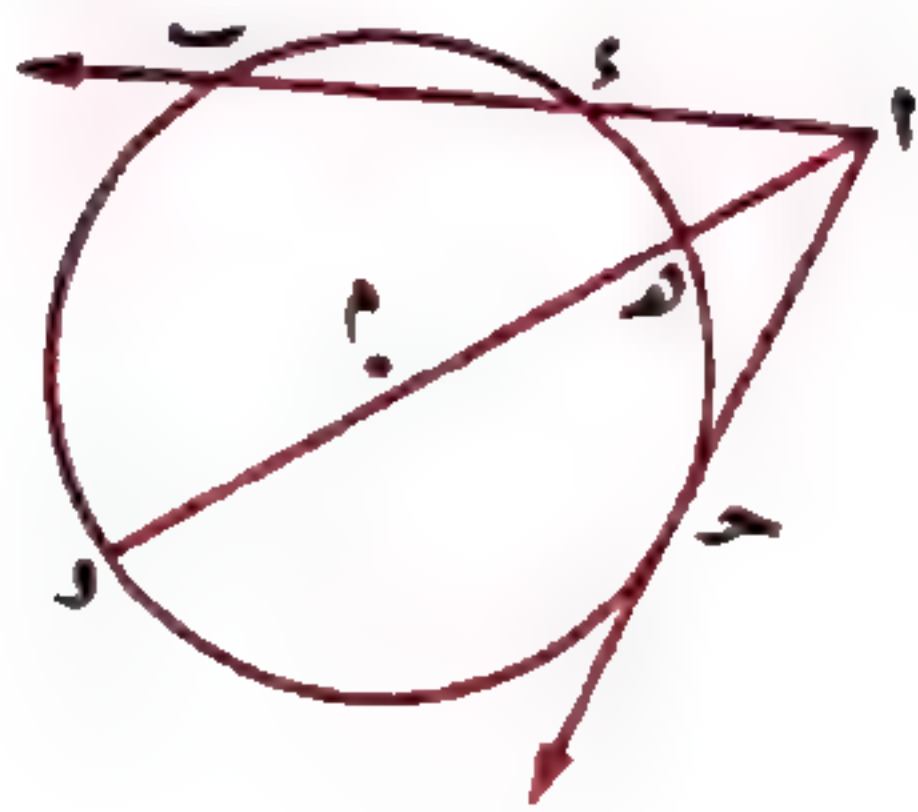
ح د = ١٦ سم ، د ع = ٩ سم

أوجد : (١) طول نصف قطر الدائرة.

(٢) مساحة المثلث أ ب ح

« ٧,٥ سم ، ١٥٠ سم^٢ »

١٠ في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م ، \overleftrightarrow{AB} يقطع الدائرة في د ، ب
 ، \overleftrightarrow{AO} يقطع الدائرة في هـ ، و ، \overleftrightarrow{AC} يمس الدائرة عند ح
 ، $٨ = \text{سم } \text{د} \text{ ، } ١٨ = \text{سم } \text{هـ}$

(١) إذا كان : $\text{م} (١) = ١٤٤$ فأوجد : طول كل من \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{AO}

(٢) إذا كان : $\text{س} \exists \text{ب} \text{د} \text{ حيث } \text{س} = ٤ \text{ سم}$

« ١٢ سم ، ١٠ سم ، ٦ سم ، ٤ سم - ٢٤ »

فأوجد : $\text{م} (س)$

١١ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، \overleftrightarrow{AB} مماس مشترك للدائرتين م ، ن

، \overleftrightarrow{BC} يقطع الدائرة م في ح ، د ، \overleftrightarrow{BD} يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب.

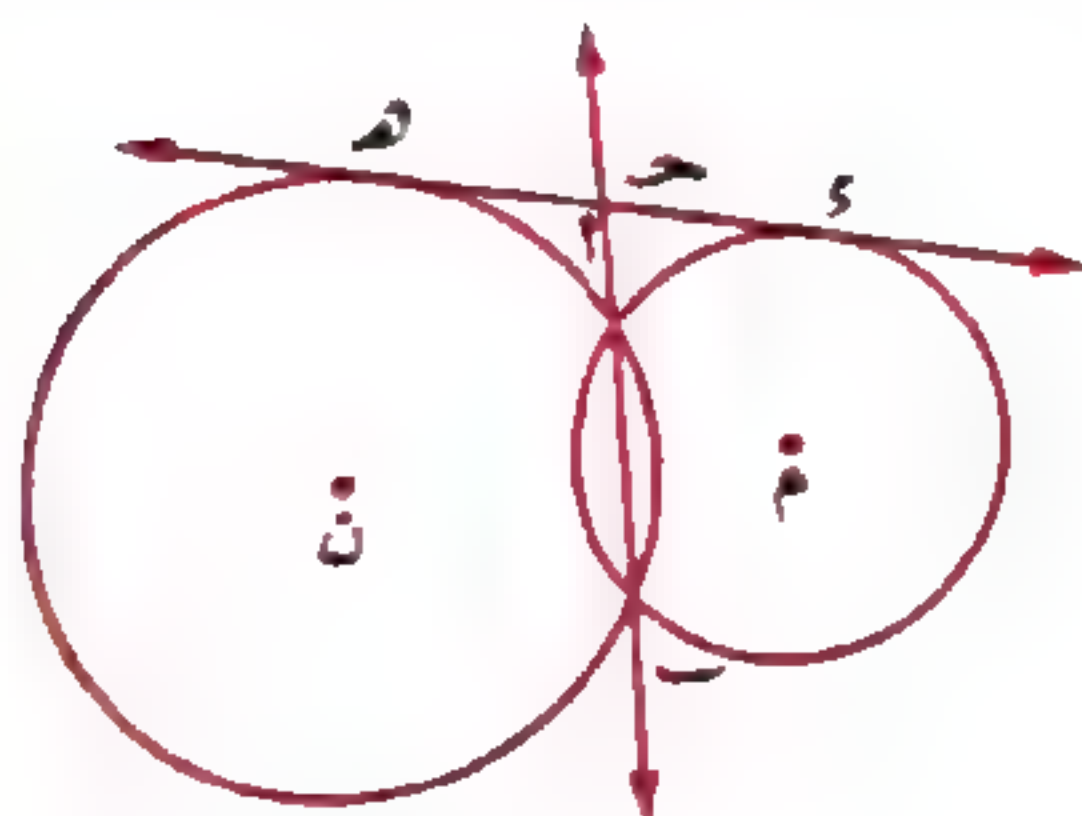
(١) أثبت أن : \overleftrightarrow{AB} محور أساسي للدائرتين م ، ن

(٢) إذا كان : $\text{م} (ب) = ٣٦$ ، $\text{ب} ح = ٤ \text{ سم}$ ، $\text{هـ} و = ٩ \text{ سم}$

أوجد : طول كل من \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{AB} ، \overleftrightarrow{BD}

« ٥ سم ، ٦ سم ، ٢ سم »

١٢ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، \overleftrightarrow{DE} مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند د ، هـ

على الترتيب ، $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} = \{ح\}$

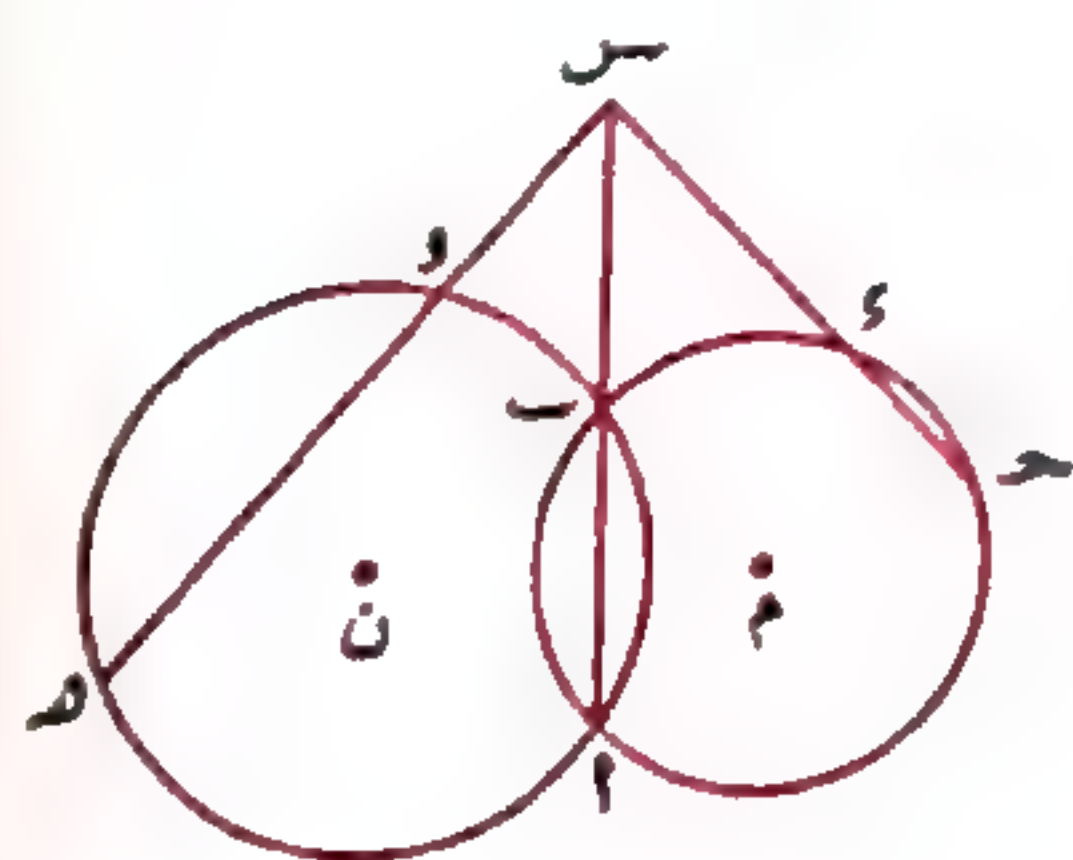
(١) أثبت أن : \overleftrightarrow{BC} محور أساسي للدائرتين.

(٢) إذا كان : $\text{ب} = ١٢ \text{ سم}$ ، $\text{ح} (ب) = ٦٤$

أوجد : طول كل من \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{AD}

« ٤ سم ، ٨ سم »

١٣ في الشكل المقابل :



الدائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب

حيث : $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{س\}$

، $\text{س} د = ٢$ ، $\text{هـ} و = ١٠ \text{ سم}$ ، $\text{ح} (س) = ١٤٤$

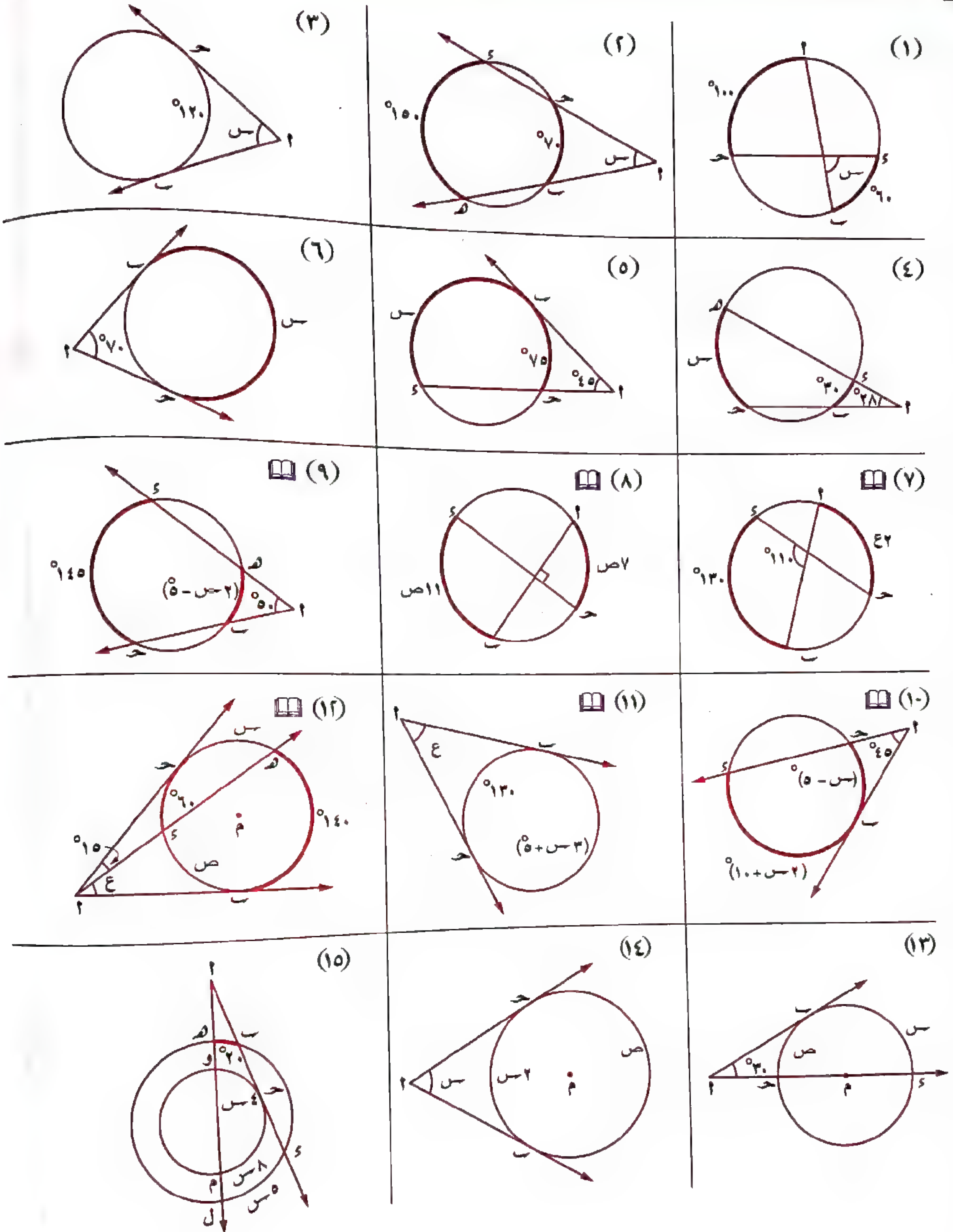
(١) أثبت أن : \overleftrightarrow{AB} محور أساسي للدائرتين م ، ن

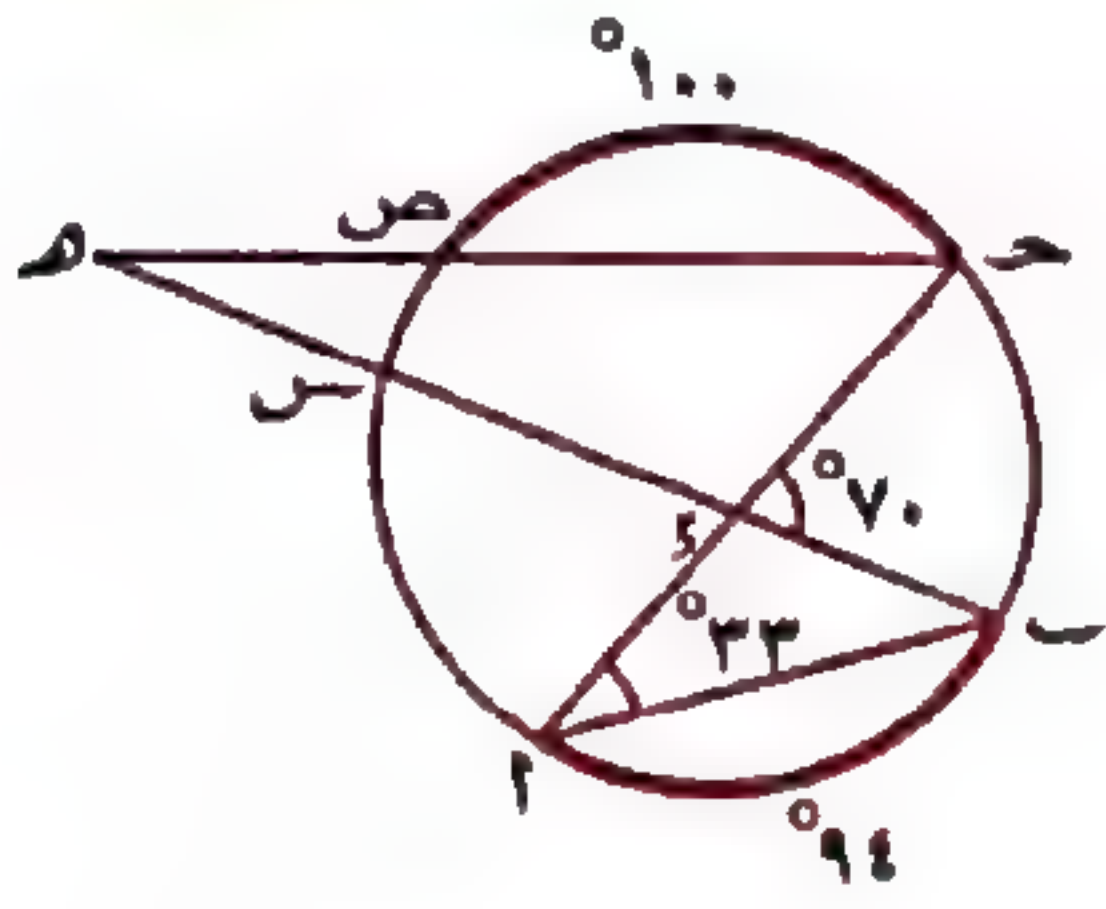
(٢) أوجد : طول كل من \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{AD}

(٣) أثبت أن : الشكل ح د و هـ رباعي دائري.

« ٦ ، ٦ ، ٨ سم »

١٤ مستعينا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :





١٥ في الشكل المقابل :

$$\widehat{PQ} = 94^\circ, \widehat{QS} = 100^\circ, \angle SPQ = 70^\circ$$

$$\widehat{PQ} = 94^\circ, \widehat{QS} = 100^\circ, \angle SPQ = 70^\circ$$

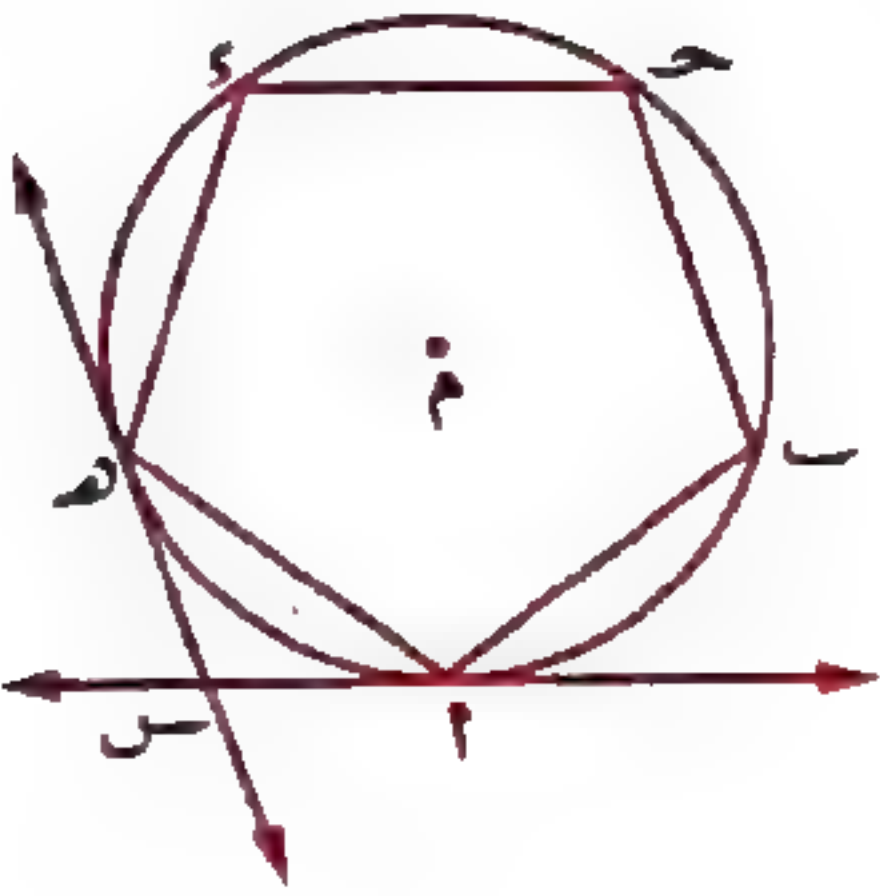
أوجد قياس كل من :

$$(1) \widehat{SP}$$

$$(2) \widehat{PS}$$

$$(3) \angle PMS$$

$$26^\circ, 74^\circ, 20^\circ$$



١٦ في الشكل المقابل :

أ ب ح د هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م

، أ س مماس للدائرة عند أ

، هـ س مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{AS} \cap \overleftrightarrow{HS} = \{S\}$

أوجد : (١) \widehat{AH}

$$(2) \angle AHS$$

$$72^\circ, 108^\circ$$

تقيس مستويات عليا من التفكير

مسائل



١٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

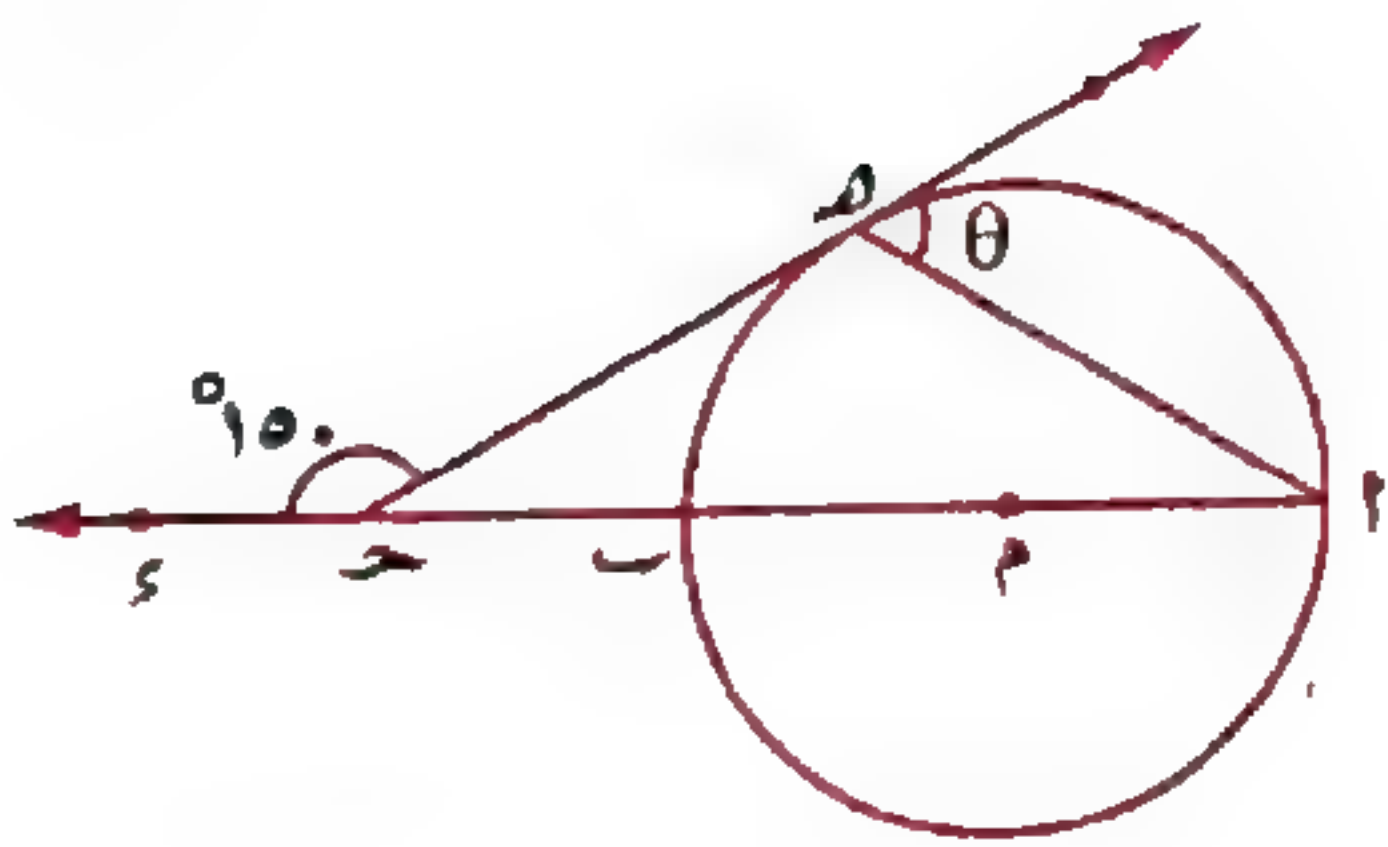
$$\theta = \dots\dots\dots^\circ$$

$$(أ) 45$$

$$(ج) 55$$

$$(ب) 50$$

$$(د) 60$$



(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\widehat{AP} = 40^\circ$ ، \widehat{PQ} قطراً ، $\angle PMS = 21^\circ$

فإن : $\angle PMS = \dots\dots\dots^\circ$

$$(أ) 100$$

$$(ب) 104$$

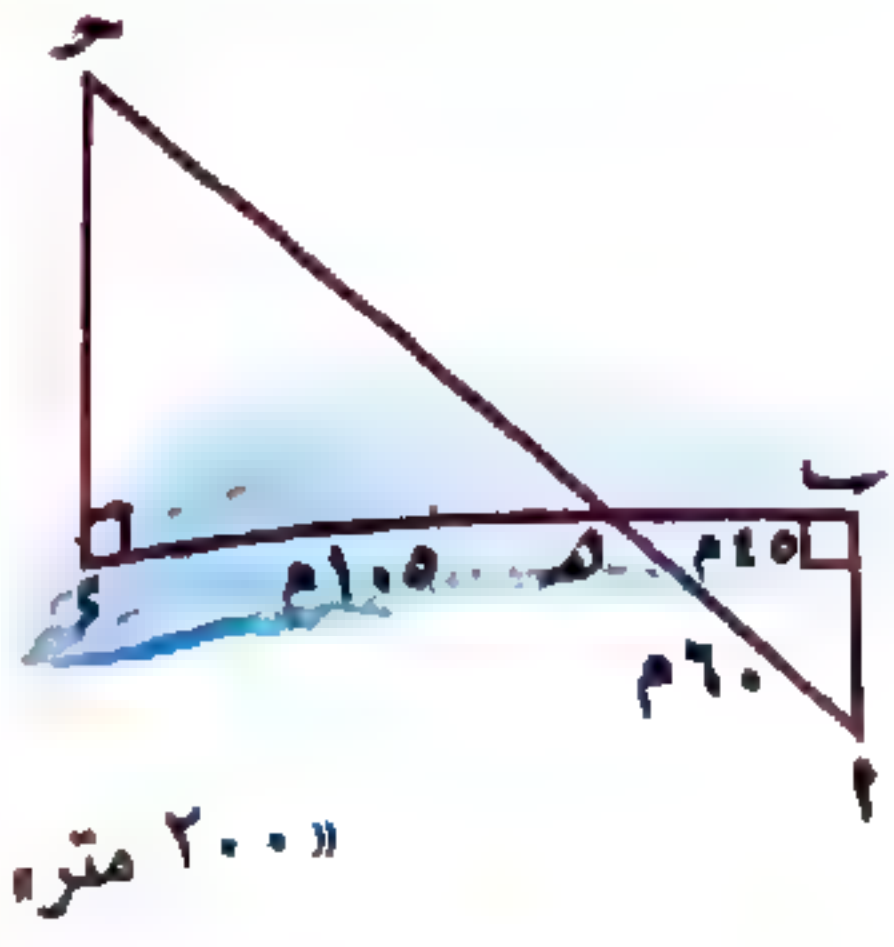
$$(ج) 106$$

$$(د) 110$$



تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

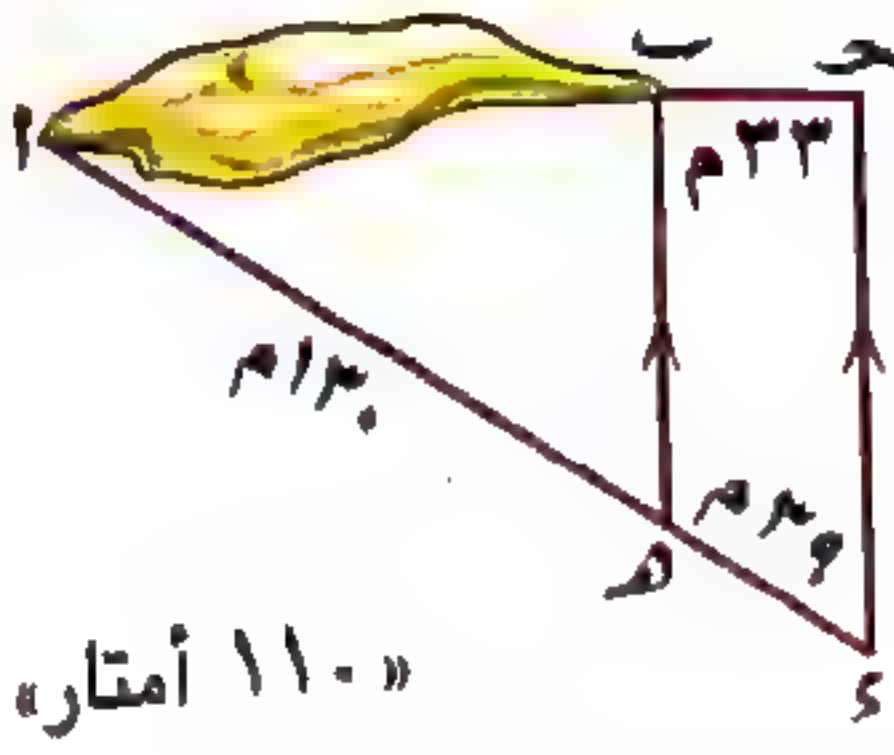
من أسئلة الكتاب المدرسي



١. لتحديد الموقع ح ،

قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع ح عن الموقع أ

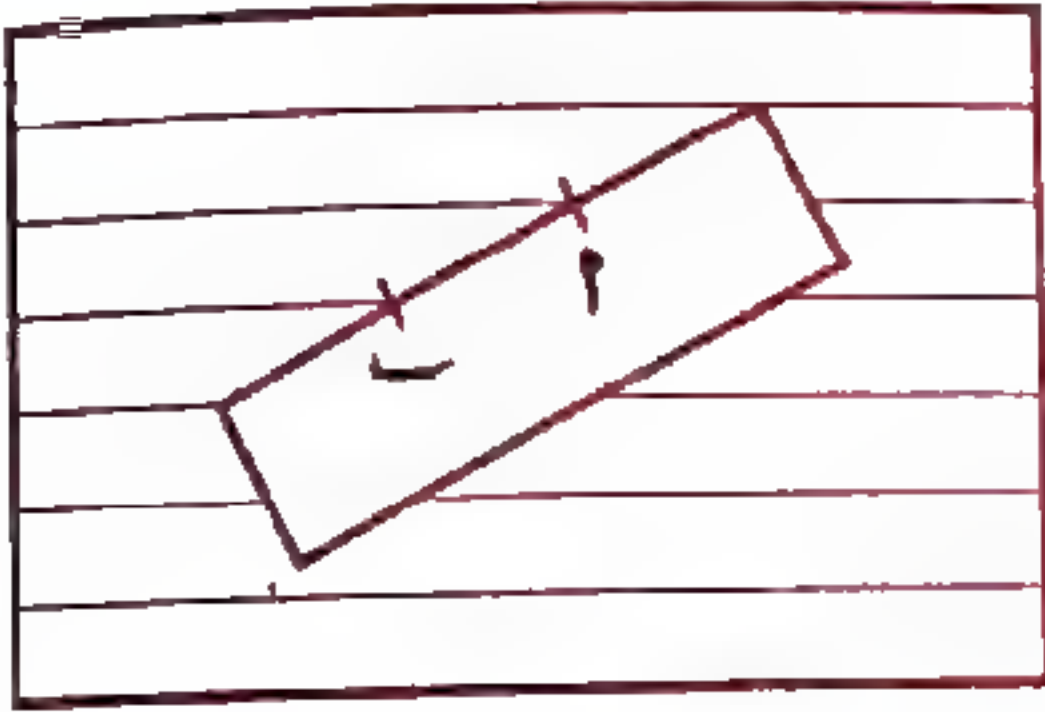


٢. قام فريق مكافحة التلوث

بتحديد موقع بقعة زيت على أحد

الشواطئ كما في الشكل المقابل.

احسب طول بقعة الزيت.

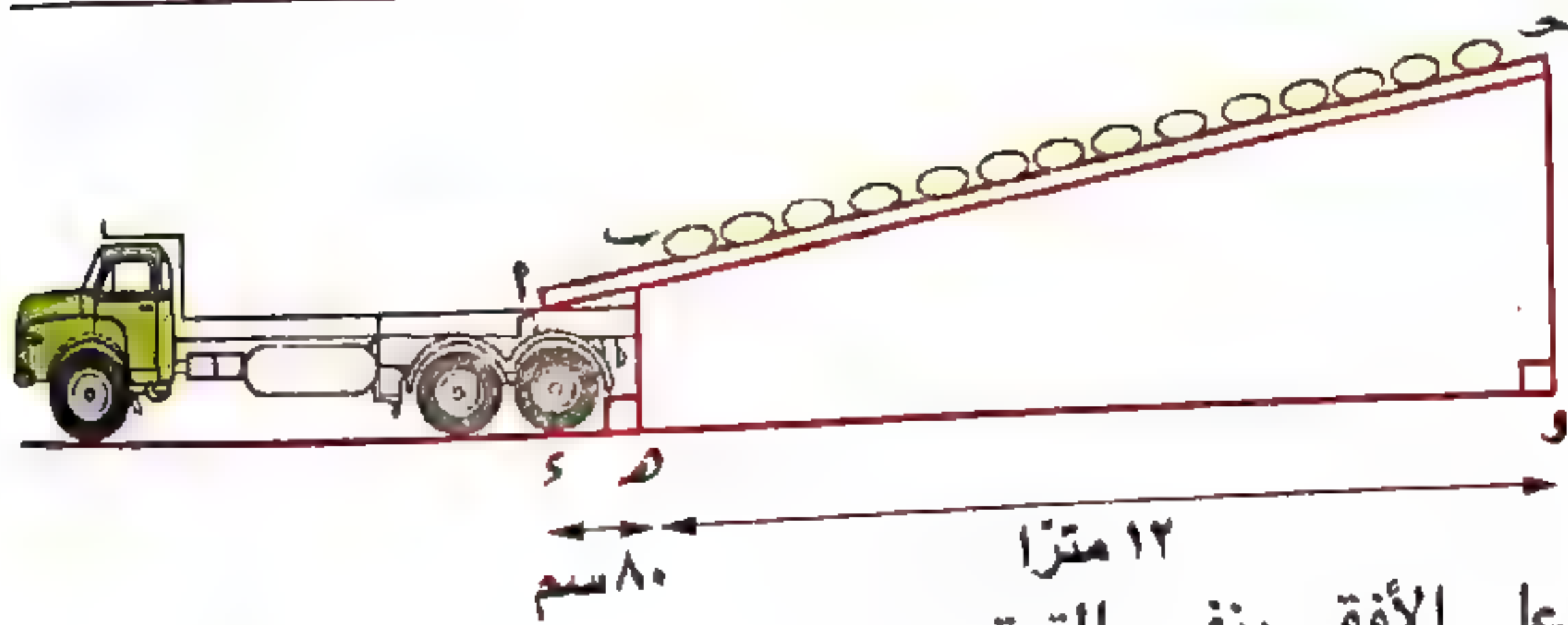


٣. أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية في الطول،

فقام بوضعه على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتي التقسيم

أ ، ب هل تقسيم يوسف للشريط صحيح ؟ فسر إجابتك. استخدم أدواتك

الهندسية للتحقق من صحة إجابتك.



٤. تنقل عبوات الأسمدة

من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب

مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع

كما في الشكل المقابل.

فإذا كانت د ، هـ ، و مساقط النقط أ ، ب ، ح على الأفقى بنفس الترتيب

، أ = ب = ١,٢ م ، د = هـ = ٨٠ سم ، و = ١٢ متراً أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

«١٩ متراً»



٥. أ سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ

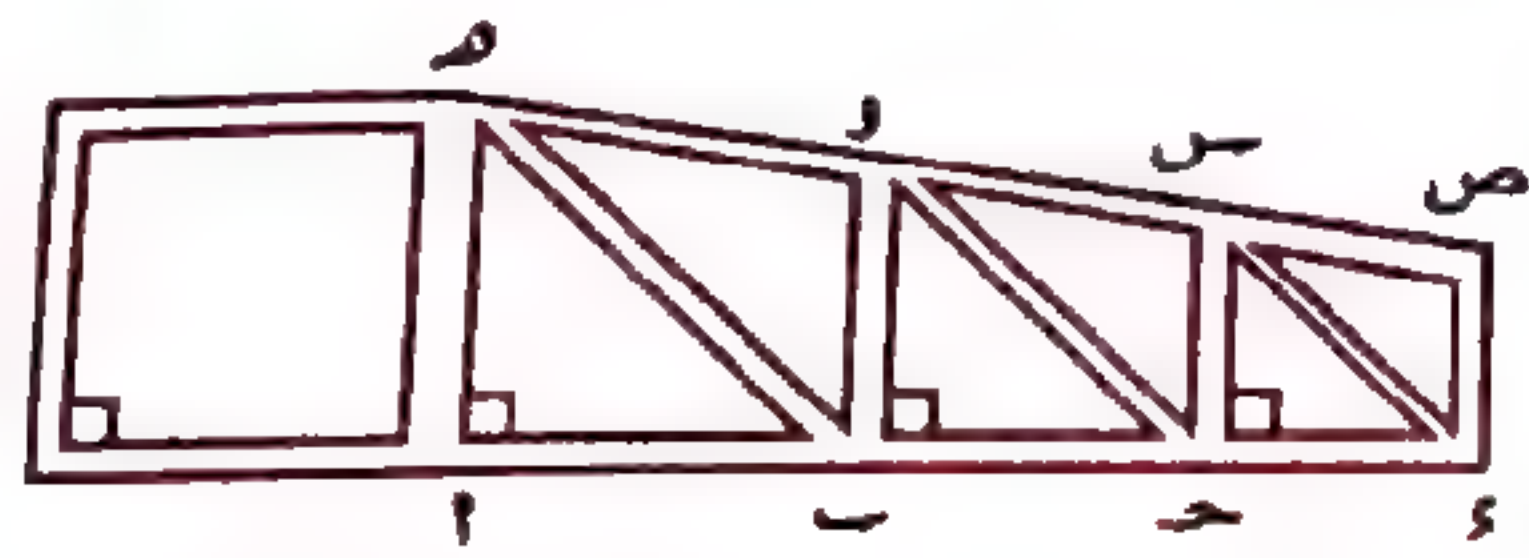
على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية

خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠ سم.

فاحسب المسافة التى يصعد بها رجل على السلم ليصبح

على ارتفاع ٢,٤ متر من الأرض.

«٢,٤٦ متراً»

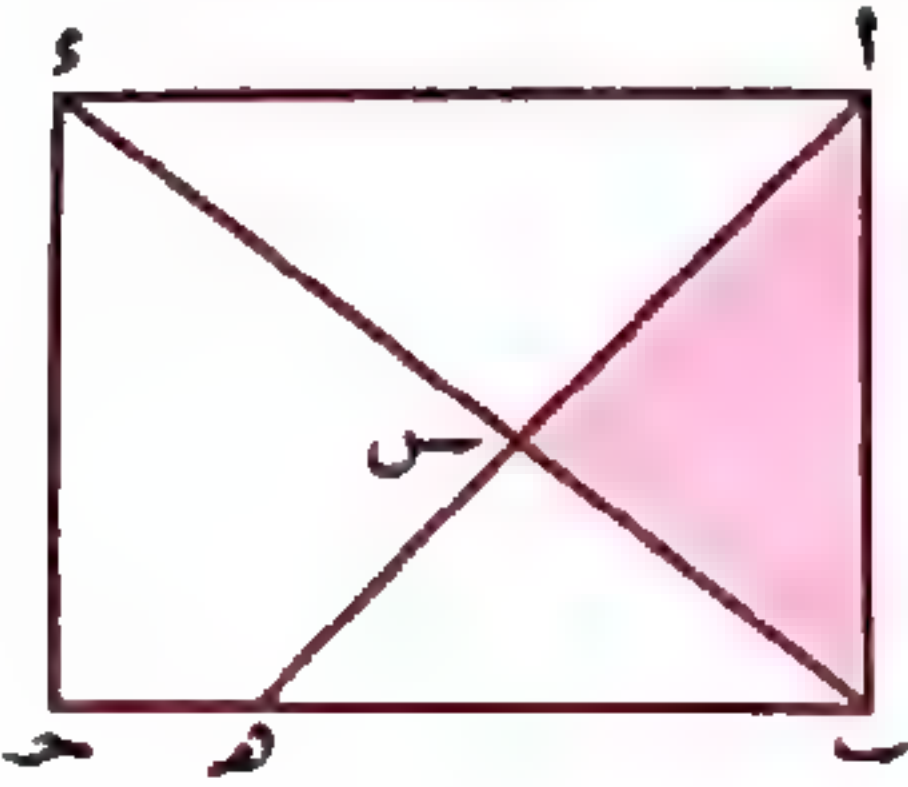


إذا كان : $أ = ١٨٠$ سم ، $و = ٢$ متر

، $أ : ب : ح : د = ٥ : ٤ : ٣$

أوجد : طول كل من $و$ ، $ص$ ، $ح$

« ٤٨٠ سم ، ١٠٨ سم »



بين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل

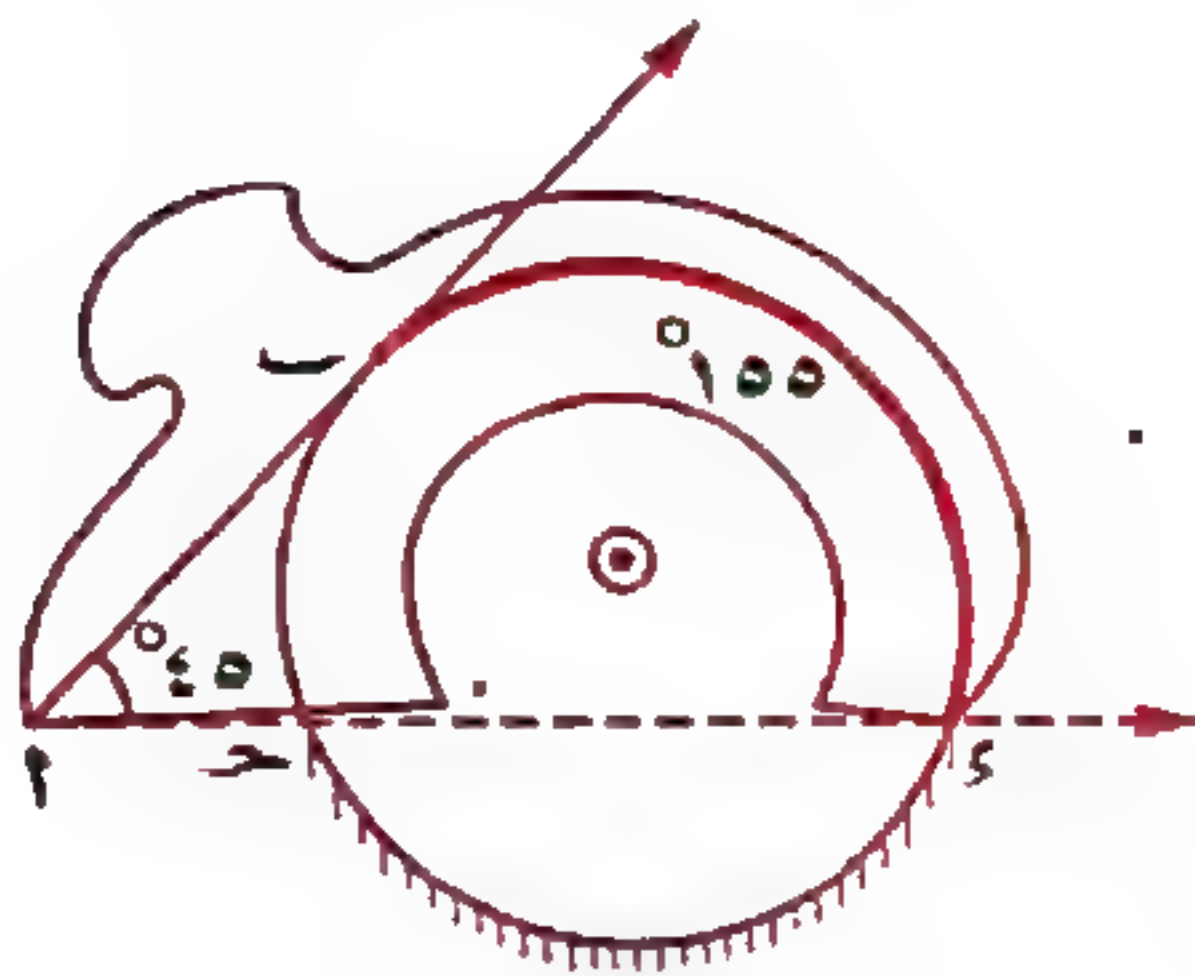
إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين $س$ ، $و$ ، $أ$ ، $ح$ ،

حيث $و \supseteq ب \supseteq ح$ ، $س \cap و = أ$ ، $س \cap و = ح$

فإذا كان : $أ = ب = و = ٤٢$ مترًا ، $و = ٥٦$ مترًا.

احسب مساحة القطعة $أ$ بالأمطار المربعة وطول $س$

« ٥٠٤ متر مربع ، ٢٤ ٢/٢ متر »



منشار دائري لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته

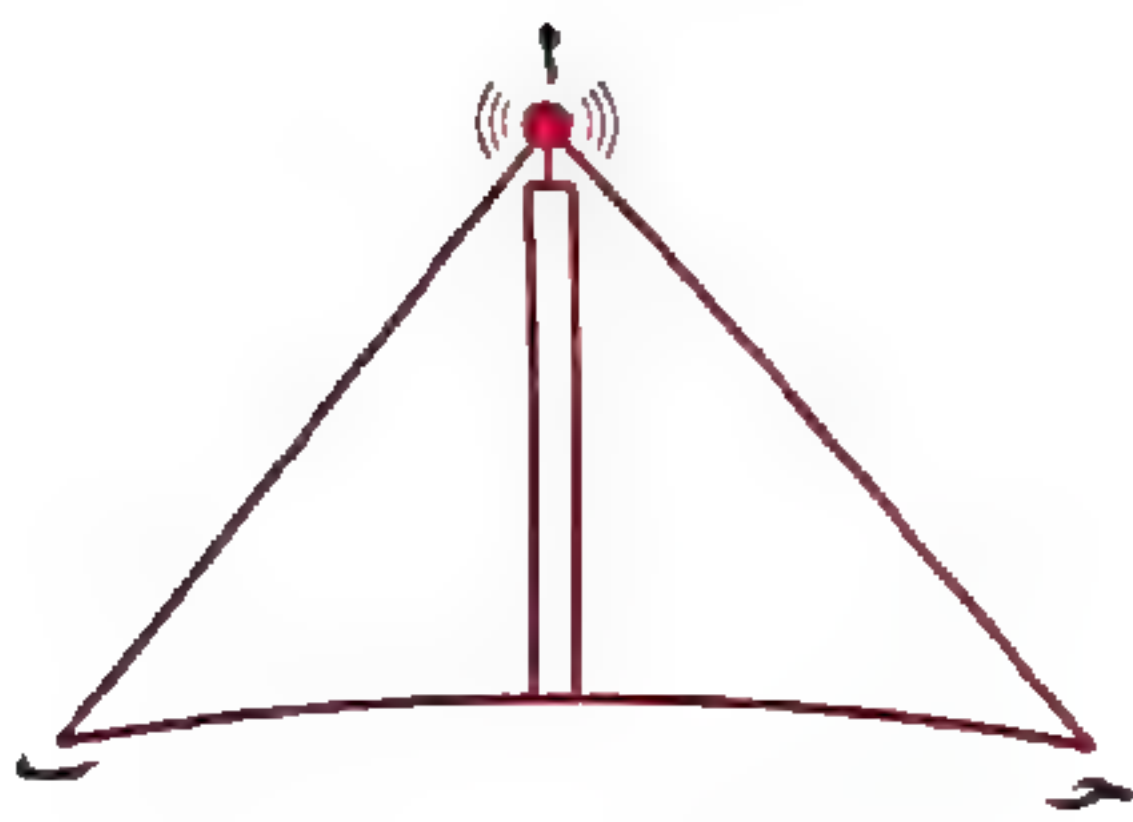
١٠ سم ، يدور داخل حافظة حماية ،

فإذا كان : $و = (د ب س) = ٤٥^\circ$ ، $و = (س ب س) = ١٥٥^\circ$

أوجد طول قوس قرص المنشار

خارج حافظة الحماية.

« ٢٤,٤ سم »



تتبع الإشارات التي تصدر عن برج الاتصالات في مسارها شعاعًا

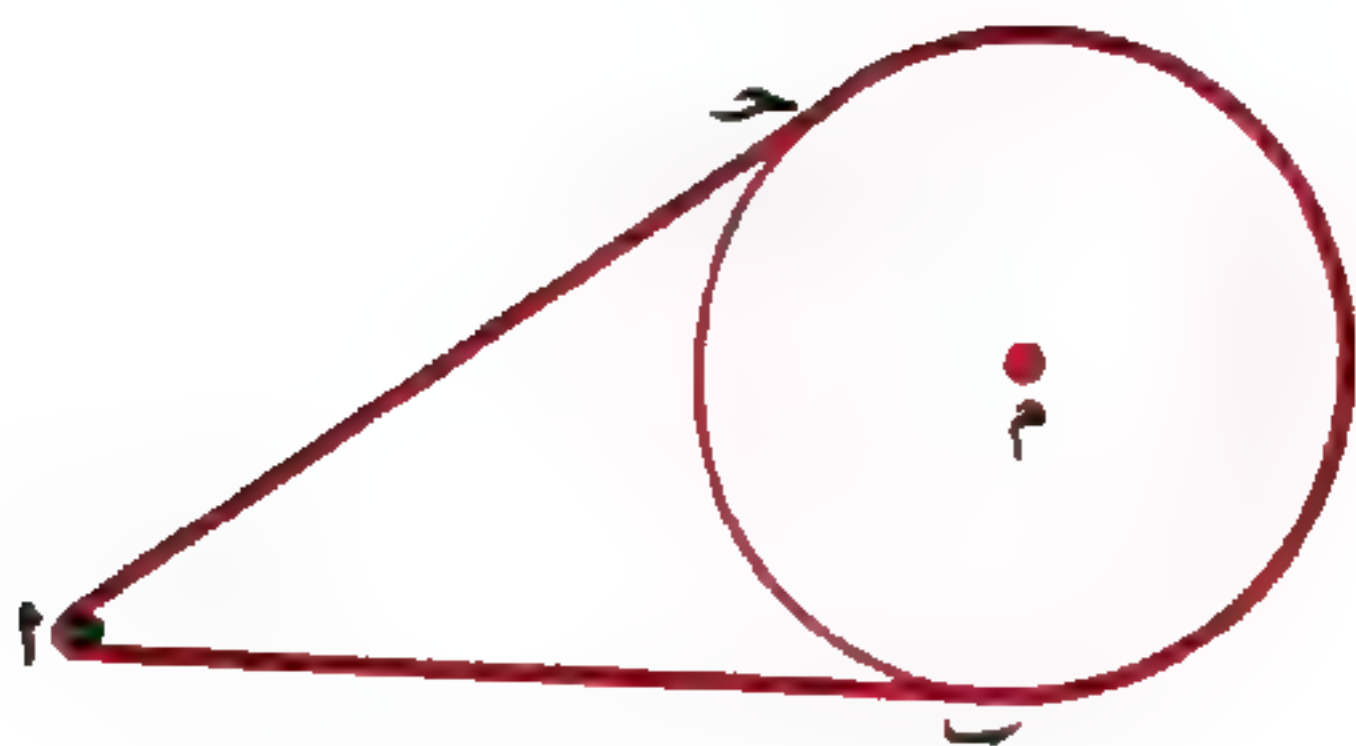
، نقطة بدايته على قمة البرج ، ويكون مماسًا لسطح الأرض ، كما

في الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين بفرض أن

البرج يقع على مستوى سطح البحر

، $و = (د ح أ) = ٨٠^\circ$

« ١٠٠ »



تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة

عند أ فإذا كان قياس الزاوية بين جزئي السير ٤٠° فأوجد طول

$ب$ الأكبر ، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩ سم

« ٢٤,٥٦ سم »

يدور قمر صناعي في مدار ، محافظًا في أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء ،

وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°

فأوجد :

(١) قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعي.

(٢) طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

« ١٢٦ ، ٦٣٧٨ كم »

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

- استعارات ترابطية
- أمثلة ذاتية

الجزء الخاص بالامتحانات

تقنية
محددة
الاحتكاك بالبنية
بمستوى نظرية
GR



الكتاب

إعداد نخبة من خبراء التعليم



محتويات الكتاب

- الاختبارات التراكمية القصيرة
- امتحانات الكتاب المدرسي
- لامتحانات النهائية
- الإجابات



الاختبارات التراكمية القصيرة



أجب عن الأسئلة الآتية :

كل نقطة ١

٦ درجات

السؤال الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{2-4} = \sqrt{2-4} = \sqrt{2-4} = \dots$

- (أ) ١٦ (ب) ٤ (ج) ٤ (د) ١٦

(٢) أبسط صورة العدد التفريلي 12 هي

- (أ) ١١ (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٣

(٣) مجموعة حل المعادلة : $x^2 + 9 = 0$ هي في \mathbb{C}

- (أ) $\{1, 2\}$ (ب) $\{-2, 2\}$ (ج) $\{2, -2\}$ (د) $\{2, 2\}$

(٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية f يقطع محور السينات في النقطتين $(-1, 0)$ و $(2, 0)$

فإن مجموعة حل المعادلة : $f(x) = 0$ هي \mathbb{C} هي

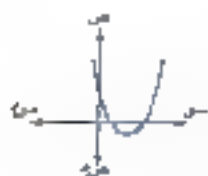
- (أ) $\{0, 2\}$ (ب) $\{0, -1\}$ (ج) $\{-1, 2\}$ (د) $\{1, -2\}$

(٥) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \dots$

- (أ) ٦ (ب) ١ (ج) ١٦ (د) ٤

(٦) الشكل المقابل يمثل المنحنى : $f(x) = x^2 + 4x + 4$ هو

فقط مما يلي صحيح :



- (أ) $0 < x < 4$ (ب) $0 < x < 2$ (ج) $0 < x < 4$ (د) $0 < x < 2$

- (أ) $0 < x < 4$ (ب) $0 < x < 2$ (ج) $0 < x < 4$ (د) $0 < x < 2$

السؤال الثاني ٢ درجات (١) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(١) أوجد في \mathbb{C} مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$

(ب) أوجد قيمتي x و y اللتين يحققان أن $x + y = 2$ و $x - y = 2$

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : 6 درجات كل مثلة درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 - 12x + 36 = 0$ متساويين فإن : =

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 12

(2) إذا كان : $x = 9$ أحد جذري المعادلة : $x^2 - 2x - 18 = 0$ فإن : =

(أ) 1 (ب) -1 (ج) 3 (د) -3

(3) إذا كان : $x^2 + 1 = 2x$ و $x^2 - 1 = 2x$ فإن : =

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 2 (د) -2

(4) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 - 6x + 9 = 0$ حقيقيين مختلفين فإن : =

(أ) $9 - \infty$ (ب) $9 + \infty$ (ج) $9 - \infty$ (د) $9 + \infty$

(5) إذا كان جذرا المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$ مركبان متناقضان ففي مما يأتي صحيح ؟

(أ) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (ب) $x^2 - 2x - 1 = 0$

(ج) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (د) $x^2 - 4x - 4 = 0$

(6) $(x^2 + 2)^2 = 2^2$ =

(أ) 2^2 (ب) 2^4 (ج) 2^6 (د) 2^8

السؤال الثاني : 4 درجات (1) درجة (ب) 2 درجات

(1) أثبت أن جذري المعادلة : $x^2 - 4x + 4 = 0$ غير حقيقيين

لم أوجد ، مسبوحة حل المعادلة في سكر

(ب) أوجد قيم x التي تجعل للمعادلة : $x^2 - 4x + 4 = 0$:

جذرين مركبين وغير حقيقيين.

اجب عن الاسئلة الاتية :

السؤال الاول : 6 درجات كل نقطة درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 - (3 - m)x + 5 = 0$ معكوباً جبرياً للآخر

فإن : $m = \dots\dots\dots$

(أ) 5 (ب) -3 (ج) 4 (د) -5

(٢) أبسط صورة العدد القسري $\frac{1}{2}$ هي

(أ) 1 (ب) -1 (ج) 2 (د) -2

(٣) إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 + 2x + 5 = 0$ معكوباً جبرياً للآخر

فإن : $\dots\dots\dots = 5$

(أ) 5 (ب) -5 (ج) 4 (د) -4

(٤) إذا كان جذراً للمعادلة : $x^2 + 4x + 5 = 0$ حقيقيين فإن : $\dots\dots\dots \geq$

(أ) $4 \leq \infty$ (ب) $4 \leq \infty$ (ج) $4 \leq \infty$ (د) $4 \leq \infty$

(٥) إذا كان جذراً للمعادلة التربيعية : $x^2 + 2x - 5 = 0$ صفراً مختلفاً الأشارة

فإن :

(أ) $-5 < 0$ (ب) $-5 > 0$ (ج) $-5 < 0$ (د) $-5 > 0$

(٦) إذا كان : $(1 + 2x)^2 = (1 - 2x)^2$ $x = 0$ فإن : $x + 5 = \dots\dots\dots$

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الدرس الثاني : 4 درجات (أ) 3 درجة (ب) 2 درجة

(١) إذا كان جذراً للمعادلة : $x^2 - 3x + 4 = 0$ متساويين فأوجد : قيمة m

(ب) أوجد قيمة m التي تجعل أحد جذري المعادلة : $x^2 + 2x + 5 = 0$ ضعف الجذر الآخر.

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 4x + 4 = 0$ هي x هي

{1} (أ) {2} (ب) {2 و 4} (ج) {2 و 4} (د) {2}

(٢) للمعادلة التربيعية التي جذورها x و y هي

(أ) $x^2 - 1 = 0$ (ب) $x^2 - 1 = 0$

(ج) $x^2 - (x + y) = 0$ (د) $x^2 - (x - y) = 0$

(٣) يكون جذر المعادلة : $x^2 - 2x + 1 = 0$ حقيقيين مختلفين إذا كان :

(أ) $1 < 4$ (ب) $1 > 4$ (ج) $1 < 4$ (د) $1 > 4$

(٤) أبسط صورة المقدار : $(x^2 - 1)$ هي

(أ) $x - 1$ (ب) $x + 1$ (ج) $x - 1$ (د) $x + 1$

(٥) إذا كان جذر المعادلة التربيعية : $x^2 + 3x + 2 = 0$ عددين فرديين متتاليين

فإن : $x^2 - 3x + 2 = 0$

(أ) $x - 1$ (ب) $x + 1$ (ج) $x - 1$ (د) $x + 1$

(٦) حاصل ضرب جذور المعادلات : $x^2 + 3x + 2 = 0$ و $x^2 + 2x + 1 = 0$ هو

$x^2 + 3x + 2 = 0$ يساوي

(أ) $2x + 3$ (ب) $x - 1$ (ج) $x + 1$ (د) أصغر

السؤال الثاني : ٤ درجات (١) ٣ درجات (٢) ٣ درجات

(١) إذا كان x و y هما جذر المعادلة : $x^2 + 3x + 2 = 0$

فكون المعادلة التي جذورها $\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}$

(ب) أوجد في أبسط صورة المقدار : $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x + 2)$

أجب عن الاسئلة الآتية :

الأسئلة الأولى ٦ درجات كل جزئية درية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f(x) = x^2 - 4x + 4$ من تكون إشارتها سالبة في

الفترة :

(أ) $[2, 4]$ (ب) $[2, 3]$ (ج) $[3, 4]$ (د) $[2, 3] \cup [3, 4]$

(٢) إذا كان جذر المعادلة $x^2 - 6x + 8 = 0$ متساويين فإن : له

(أ) ١ (ب) ١ (ج) ١ (د) ١٢

(٣) المعادلة التربيعية التي جذورها (١ + ٢) و (١ - ٢) هي

(أ) $x^2 - 2x + 3 = 0$ (ب) $x^2 - 2x - 3 = 0$

(ج) $x^2 + 2x + 3 = 0$ (د) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(٤) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ معكوساً ضربياً للآخر

فإن : =

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ٢ -

(٥) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ معكوساً ضربياً للآخر

فإن : =

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ٢ -

(٦) إذا كانت $x^2 + 3x + 2 = 0$ موجبة لجميع قيم x الحقيقية فإن

(أ) $3 - 1 < 0$ (ب) $3 - 1 > 0$

(ج) $3 - 1 = 0$ (د) $3 - 1 \geq 0$

(٧) أي مما يأتي تطلب لمقدار $(x^2 + 9)$

(أ) $(x^2 - 9)$ (ب) $(x^2 + 9)$

(ج) $(x^2 - 2)$ (د) $(x^2 + 2)$

الأسئلة التالية ٤ درجات (١) لارها (٢) لارها

عن إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالاعداد الآتية موضعاً ذلك على خط الأعداد :

(١) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$ (٢) $g(x) = x^2 + 9$

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ٦ درجات كل جزئية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة $f: D \rightarrow (S)$ تكون سالبة في

(أ) $[-1, 0]$ (ب) $[-2, 2]$ (ج) $[-100, 100]$ (د) $[-100, 100]$

(٢) مجموعة الحل للمعادلة : $\sin(x) = 0$ هي \mathbb{R}

(أ) $\{0, 2\}$ (ب) $\{0, \pi\}$ (ج) $\{0, \pi\}$ (د) $\{0, \pi\}$

(٣) أبسط صورة الحد التفاضلي $\frac{1}{x^2}$ هي

(أ) 1 (ب) -1 (ج) 1 (د) -1

(٤) إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 + 4x + 3 = 0$ معكوساً ضريباً للجذر الآخر

فإن : $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \dots$

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{5}$ (د) $\frac{1}{6}$

(٥) مجموع الأعداد المربعة التي تقسم المجموعة حل المعادلة $(x-3)(x-1) = 0$:

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 16 (د) 9

(٦) أي مما يلي عدد تخيلي ؟

(أ) π (ب) $5-5$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) 5

السؤال الثاني : ٤ درجات (١) درجة (ب) درجة

(١) إذا كان : $x + 1$ أحد جذري المعادلة : $x^2 - 2x + 3 = 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$

فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد القيمة ح

(ب) أبحث إشارة الدالة $f: D \rightarrow (S)$ = $x^2 - 7x + 10$

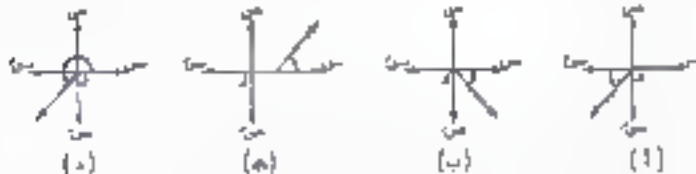
ومن ذلك استنتج مجموعة حل للمعادلة : $x^2 + 7x + 10 \geq 0$

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) الزاوية التي قياسها 50° في الوضع القياسي تكمل الزاوية التي قياسها
 (أ) 130° (ب) 310° (ج) 140° (د) 490°
- (٢) جميع الزوايا التي قياساتها كالاتي تقع في الربع الثاني ما عدا
 (أ) 290° (ب) 120° (ج) 120° (د) 80°
- (٣) الزاوية التي قياسها (710°) تقع في الربع
 (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع
- (٤) جميع الزوايا الموجبة التالية ليست في وضعها القياسي ما عدا



- (٥) إذا كان الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-1, 1)$ فإن الضلع النهائي يقع في
 (أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (ج) الربع الثالث (د) غير ذلك
- (٦) إذا كان : θ - قياس زاويتين متكاملتين فإن : $\theta - 90^\circ$ - يكون
 (أ) متكاملتين (ب) متكافئتين (ج) متتامتين (د) مجموعهما 360°

السؤال الثاني : ٤ درجات (١) درجة (ب) ٣ درجات

- (أ) عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالاتي :
 (١) 52° (٢) 270° (٣) 1230°
- (ب) أوجد زاويتين إحداها بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا التي قياساتها كالاتي :
 (١) 122° (٢) 70° (٣) 720°



مدرسة للعلوم

١٠

حتى درس 2 من الوحدة الثامنة

2

اختبار

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : ٦ درجات كن حريصاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقاسة :

(١) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٢) القياس الستيني لزاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتقابل قوساً

طوله π^3 سم يساوي

(أ) ٢٠ (ب) ٦٠ (ج) ٩٠ (د) ١٢٠

(٣) الزاوية التي قياسها ٧٠° تكافئ الزاوية التي قياسها الستيني

(أ) ١٢٥° (ب) ٦٧° (ج) ٦٣° (د) ٩٧°

(٤) القياس الدائري لزاوية مركزية تقصر قوساً طوله ٣ سم في دائرة طول قطرها ٤ سم

يساوي

(أ) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ (ج) ٥° (د) ٦°

(٥) القياس الموجب للزاوية التي يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية

ونصف تماماً يساوي

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{12}$ (ج) $\frac{\pi}{16}$ (د) $\frac{\pi}{8}$

(٦) إذا كان $\theta = ١$ قياساً زاويتين متكلفتين قلن إحدى قيم θ هي

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

السؤال الثاني : ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٣ درجة

(١) لو وجد طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٦٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

(ب) المساحة التي تحدها : (أ) ٧٠° ، (ب) ٦٠° ، (ج) ٦٠° ، (د) ٦٠° بالتقدير الدائري.

أجب عن الاسئلة الآتية :

كل جزئية درجته

6 درجات

السؤال الاول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله 3 سم من دائرة طول قطرها 10 سم يساوي

- (أ) $\frac{3}{10}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٢) قياس أصغر زاوية موجبة مكافئة لزاوية التي قياسها $(-870)^\circ$ هو

- (أ) 210° (ب) 150° (ج) 210° (د) 120°

(٣) إذا كان θ قياس زاوية موجبة مرسومة في الوضع القياسي بحيث : $0 < \theta < 2\pi$

ففي أي ربع يقع الضلع النهائي لهذه الزاوية ؟

- (أ) الأول (ب) الأول والثاني (ج) الثاني والثالث (د) الثالث والرابع

(٤) إذا كان : $\theta = 2\pi$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

- (أ) 2π (ب) 60° (ج) 45° (د) 90°

(٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle A + \angle B + \angle C = \frac{\pi}{2}$

فإن : $\angle D = \dots\dots\dots$ سم



- (أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 14

(٦) بتدوير بسيط طول خيطه 14 سم يتلخبط بزواوية قياسها $\frac{1}{2}\pi$ فإن طول قوسه = سم

- (أ) 4.6 (ب) 4.4 (ج) 4.3 (د) 4.8

السؤال الثاني : 4 درجات (١) الدرجة (ب) الدرجة

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

$$3\pi + 30^\circ - 60^\circ - 90^\circ + 180^\circ + 270^\circ - 360^\circ$$

(ب) إذا كان : $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta \in [0, \pi]$

فأوجد جميع السوال المكافئة للزاوية التي قياسها θ

أجب عن الاسئلة التالية :

السؤال الاول 6 درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقطوعة :

- (١) تبسط صورة للمقدار : $\sin(\theta + 180^\circ) + \cos(\theta - 270^\circ)$ هي :
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤
- (٢) إذا كان : $\theta < 0$ ، $\theta > 0$ فإن : θ تقع في الربع :
 (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع
- (٣) إذا كانت θ زاوية حادة وكان : $\sin(\theta + 30^\circ) = \cos 30^\circ$ فإن : $\theta =$:
 (أ) 5° (ب) 20° (ج) 25° (د) 35°
- (٤) القياس المقياسي لزاوية مركزية تمحور قوساً طوله 2π سم من دائرة طول نصف قطرها 2 سم هو :
 (أ) $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (ب) 4π (ج) 12π (د) 24π

- (٥) $\sin 9^\circ \times \sin 2^\circ \times \sin 3^\circ \times \sin 4^\circ \times \dots \times \sin 90^\circ =$:
 (أ) $\sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \sin 3^\circ \times \sin 4^\circ \times \dots \times \sin 90^\circ$
 (ب) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 90$
 (ج) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 90^\circ$
 (د) صفر

(٦) في الشكل المقابل :

ΔABC حقائق الزاوية هي : θ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2} = \theta$

فإن : $\alpha =$:
 (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{2} - 1$ (ج) $\frac{\pi}{2} - 1$ (د) $\frac{\pi}{2} - 1$



السؤال الثاني 9 درجات (١) درجة (ب) درجة

- (١) إذا كان الضلع النهائي لزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ فأوجد في تبسط صورة قيمة المقدار :
 $\sin(\theta - 180^\circ) \cos(\theta - 90^\circ) + \sin(\theta - 180^\circ) \cos(\theta - 90^\circ)$
 (ب) أوجد الحل العام للمعادلة : $\sin(2 - \theta) = \sin(20 - \theta)$
 ثم أوجد : جميع قيم θ حيث $\theta \in [0, 180]$ التي تحقق المعادلة.

أجب عن الأسئلة الآتية:

المسألة الأولى: ٦ درجات كل فقرة درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقصدة:

(١) القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x^2 - 9$ هي

(أ) 4 (ب) -4 (ج) 2 (د) -2

(٢) الزاوية التي قياسها 60° تقع في الربع

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٣) القياس الدائري للزاوية التي قياسها 60° بدلالة π هو

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{2\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٤) إذا كانت θ ما $\theta = 2$ ما θ حيث $\theta \in [0, 90]$ فإن $\theta = 2$ هو

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) صغر (د) $\frac{2}{3}$

(٥) الدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ دالة دورية ودورتها تساوي

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\pi/6$ (د) $\pi/3$

(٦) عدد مرات تقاطع المنحنى $y = 2x$ مع محور السينات في الفترة $[0, \pi/2]$ يساوي

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7

المسألة الثانية: ٤ درجات (١) درجة (ب) درجة

(أ) لوجد الحل العام للمعادلة $\theta = 2$ ما $\theta = 2$

(ب) إذا كانت الدالة $f(x) = 2x$ لوجد:

(١) مجالها (٢) مداها (٣) دورتها

اجيب عن الاسئلة الآتية :

السؤال الأول 1 درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان $\theta = 30^\circ$ فإن قياس أقل زاوية موجبة تحقق ذلك هي

- (أ) 15° (ب) 120° (ج) 225° (د) 315°

(٢) أبسط صورة للمقدار $\sin(\theta - 360^\circ) + \tan(\theta - 270^\circ)$ هي

- (أ) $\sin \theta$ (ب) $\cos \theta$ (ج) $\tan \theta$ (د) $\cot \theta$

(٣) قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله π سم في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم بالدرجات يساوي

- (أ) 40° (ب) 60° (ج) 120° (د) 150°

(٤) أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها متساويين ؟

- (أ) 50° (ب) 150° (ج) 210° (د) 300°

(٥) $\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dots\dots\dots$

- (أ) $\frac{\pi}{8}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{\pi}{8}$ (د) $\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(٦) إذا كان $\theta = \frac{3}{4}$ فإن مما يأتي لا يصلح قيمة تقريبية لـ θ ؟

- (أ) $0.8, 1.5, 2.5$ (ب) $0.8, 1.5, 2.5$

- (أ) $0.2, 0.3, 0.7$ (ب) $0.2, 0.3, 0.7$

السؤال الثاني 2 درجات (١) درجة (٢) درجة

(١) أوجد بالقياس المتين قيمة θ التي تحقق أن $\theta = 360^\circ$.

(ب) إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ فأوجد : قيمة θ

أجب عن الاسئلة التالية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية زروية

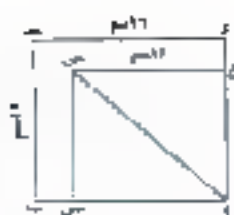
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مثلثان متشابهان النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٢ فإذا كان محيط

الأصغر ١٤ سم فإن محيط الأكبر سم

(١) ١٤ (ب) ٢٨ (ج) ١٥ (د) ٢١

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كان المستطيل ABCD ~ المستطيل EFGH

فـ EF = ١٦ سم ، BC = ٢٠ سم ، AC = ١٢ سم

فإن : AB = سم

(١) ٢٠ (ب) ١٠

(ج) ١٥ (د) ١٨

(٣) مثلثان متشابهان فيهما $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ فإن مما يأتي خطأ ؟

(١) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ب) $\Delta ABC \sim \Delta FED$ (ج) $\Delta ABC \sim \Delta EFD$ (د) $\Delta ABC \sim \Delta FDE$

(٢) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ب) $\Delta ABC \sim \Delta FED$ (ج) $\Delta ABC \sim \Delta EFD$ (د) $\Delta ABC \sim \Delta FDE$

(٤) أي مما يأتي صحيح ؟

(١) كل المضلعات المتشابهة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(ج) كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(٥) إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وكان $AB = ١٠$ ، $BC = ١٥$ ، $AC = ٢٠$ فإن : $DE =$ (د) ١٠

(١) ١١٠ (ب) ٣٥ (ج) ٧٥ (د) ٧٠



(٦) إذا كان h هو معامل تشابه مثلعين h ، إلى h ، حيث المضلع h ، هو تصغير للمضلع h ، فإن
 (أ) $h < 0$ (ب) $h = 1$ (ج) $h < 1$ (د) $h > 1$

السؤال الثاني ٤ درجات (١) درجة (٢) درجة

في الشكل المقابل :



الدرجة الكلية

المضلع h مدحى - المضلع h من h ل

(١) أوجد معامل تشابه المضلع h مدحى للمضلع h من h ل

(٢) أوجد الجمة كل من h و h

١٠

على : وصل 2 من الودد n الثلاثة

2

اختبار

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول 6 درجات كل بزية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان بعد الأول ١٢ سم و ٨ سم ومحيط الثاني ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثاني =

(أ) ١٦ سم (ب) ١٨ سم (ج) ٢٤ سم (د) ١٦ سم

(٢) في الشكل المقابل :

أي العبارات التالية غير صحيحة ؟

(١) $h = 2$ سم $h = 2$ سم (ب) $h = 2$ سم $h = 2$ سم

(ج) $h = 2$ سم $h = 2$ سم (د) $h = 2$ سم $h = 2$ سم

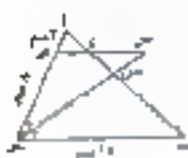
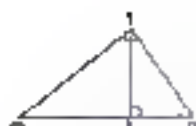
(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : h من ينصف h و h و h // h مدحى

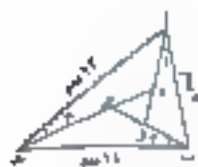
فإن : $h = 2$ سم

(١) ٢ (ج) ٤

(ج) ٥ (د) ٦



(٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : $DE = (٤ د) = (٣ د)$

فإن : د هـ : هـ د = د هـ : د هـ = = =

(أ) ١٢ : ١١ : ٧ : ١٢

(ب) ١٢ : ١١ : ٧ : ١٢

(٥) في الشكل المقابل :

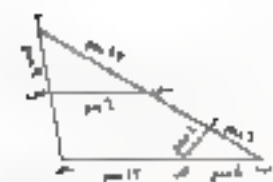


إذا كانت : د هـ منتصف د هـ

فإن : د هـ = = =

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

(٦) في الشكل المقابل :



من د هـ = =

(أ) ٩ (ب) ١٠

(ج) ١١ (د) ١٢

السؤال الثاني : ٢ درجات (١) درجة (٢) درجة

في الشكل المقابل :



أ- حدد شكل رباعي د هـ \Rightarrow د هـ حيث :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$$

أثبت أن : (١) $AE \parallel ED$ (٢) $AB \parallel CD$

الدرجة الكلية

اختبار 3 من أسرار 3 على الزيادة لثاقه 10

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ٦ درجات كل إجابة درجة

أعز الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النسبة بين محيطي مثلعين متشابهين ٩ : ٤ فإن النسبة بين مساحتهما

(أ) ٨ : ١٨ (ب) ٢ : ٢ (ج) ١٦ : ٨١ (د) ٤ : ٩



$$q = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \{1\}$$

44 (二)

(۲) في الشكل المقابل :



74 (a)

{ 0 1 }

743

(E) في الشكل المرفق :



११, १ (५)

40 [1]

११ (—)

(٤) في الشكل المرفق :



(د) صفر

$$\dots\dots\dots = T_{\text{eff}} = 1_{\text{eff}}$$

(11) $\{S - S'\} = 2 - 4 = -2$ جس سے

۱۰۰۰

(٦) إذا كان Δ من جنس $E - \Delta + A = (\Delta - S) + E = 2 - (\Delta - S)$

رکائے : س ص = آ سم فلق : آ =
.....

$$\tau(-) \quad \frac{1}{\tau_1} (+) \quad \overline{\tau_1} \tau(-) \quad \overline{\tau_1} \tau(+)$$

السؤال الثاني: في خطب

ا- ح- و- هـ- ع- ل- عضلمان متضامیان فاذا كانت م متضامه سا ح- و- ن متضامه هـ- ع-

وكان : ٩ = م ٤ = سم ، ١٠ = ن ٩ = سم

فأثبت أن : مساحة المضلع n بحدود : مساحة المضلع n من $n = 1$: $n = 16$

الدرجة لكلية

١٠

حقى درس 4 من الوحدة الثالثة

4

اختبار

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقطوعة :

(١) في الشكل المقابل :

..... =

(أ) $2\sqrt{5}$

(٢) في الشكل المقابل :

..... =

(أ) ٥

(ج) ٣

(٣) في الشكل المقابل :

نصف دائرة (م)

فاين : مر = سم.

(أ) $\frac{5}{12}$

(ب) $\frac{58}{12}$

(ج) $\frac{87}{12}$

(د) $\frac{89}{12}$

(٤) أي مثلعين متثلعين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان

(أ) متطابقان. (ب) متساويان في المساحة.

(ج) متساويان في المحيط. (د) متشابهان.

(٥) في الشكل المقابل :

مساحة دائرة

فاين : =

(أ) $2\sqrt{2}$

(ج) ١٨

(ب) ٣

(د) ٦



(أ) ٦

(ج) ٢٠

(ب) ٢٦



(ب) ٤

(د) ٧

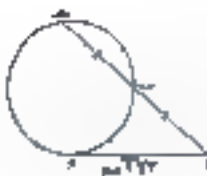


(أ) $\frac{89}{12}$

(ج) $\frac{87}{12}$

(ب) $\frac{58}{12}$

(أ) $\frac{5}{12}$



(ب) ٣

(د) ٦

(أ) $2\sqrt{2}$

(ج) ١٨



(٦) في الشكل المقابل :

$$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

(د) $\frac{17}{19}$

(ج) $\frac{9}{10}$

(ب) $\frac{75}{19}$

(أ) $\frac{9}{19}$

السؤال الثاني ٤ درجات (١) دورة (ب) دورة

(١) استخرج دوائر مثلثان متشابهان ، من منتصف \overline{AB}

، من منتصف \overline{BC} أبت أن $\Delta ABC = \Delta DCB$ و $AC = DB$

(ب) في الشكل المقابل :

أبت أن :

النقط A و B و C تقع بها دائرة واحدة.



الدرجة لاكتيف

اختبار 5 حتى درسي 1 من الوحدة الرابعة 10

أجب عن الاسئلة الآتية :

السؤال الاول 6 درجات كل فقرة درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

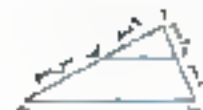
$$\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{EC}$$

(د) ١٠

(ج) 8

(ب) 6

(أ) 4



(١) في الشكل المقابل :

إذا كان \overline{AD} مماساً للدائرة فإن $\angle ADE = \dots$

(ب) 90°

(أ) 180°

(د) 45°

(ج) 135°



إذا كان: $y = (z + j)$ $u = (z + j)$

ملفوظات : ۱۳۵۲ ۱۳۵۳

- 47 (2) 44 (2)

- $$\gamma_1(\mu) \qquad \gamma_2(\mu)$$

المشكلة في الشكل الثاني:



إذا كان: \overline{AB} مماس الدائرة Γ عند A ، \overline{AC} مماس الدائرة Γ عند C

فایز : ۱ = به صورت

- 3 (w) 1 (i)

- $$V(\pm) \quad V(\pm)$$

(٥) في الشكل المقابل t

إذا كان m نقطة داخلية المتوسطات في ΔABC

طول و $\overline{PQ} = \dots\dots\dots$ سم.

- $$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

- $$A(s) \qquad \qquad \qquad Y(s)$$

(٦) في الشكوك المتعاقلة :

(١٤) كانت مساحة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ = ١٥ سم^٢

٢٠٠٠ : دراسة (أ. و. محمد) = ٩٠ علم

ع ١٦ = ع ١٧ ق ١٦ = ق ١٧

- $$h = \{ \varphi \} \quad \gamma[1]$$

- ١٧٧ (١) ١٧٧ (٢)

تعارف

۱۵۱۱- ریژیل لفانی

في الشكل المقابل :

اب حنیفہ، ابو جریج، ابو ہریرہ // ابی ایوب // ام

البيت أن: (جـ هـ) = جـ و هـ



حب عن الاسطوخودوس الطبية

السؤال الأول ٦ درجات شكل جزئية درجة

المعنى الإيجابية الصحيحة من بين الإجابات المقطوعة :

وإن في الشكل المقابل إذا كانت الأطوال معلومة بالصيغة:

تکلیف : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



YEL [1]

$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

14)

442

[illegible]

وكان: و كان = ۛ سم فلان: فلان = ۛ سم

Figure 1

44 (cont.)

५६ [५५]

Y. C. Li

٢٠ في الشكل المقابل :

أَسَدٌ عَالِمٌ لِلْعَالَمِ

$$\dots = \tau(\mathbf{1}) : \text{كل}$$


تفہیم

Figure 2.2

5-11-11

Figure 1

٤. في الشكل المقابل:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

نات. فرو =

44 | — |

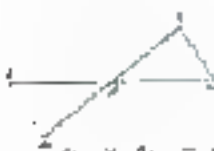
1.

451

47, 20

بیشتر از ۱۰۰۰ نفر در این حادثه کشته شدند.

.....

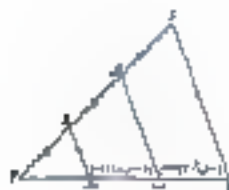

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

دارالافتاء دارالعلوم دیوبند

— 48 —

ح. م. ب. ۱۳۵۷

(٦) في الشكل المقابل :



١٠ = ١٠٠ سم .

(ب) ٢ سم ١ + ٢

(١) ٩ سم

(د) ٢٦

(ج) ٣٩

السؤال الثاني : ٤ درجات (١) ٣ درجة (٢) ٢ درجة

في الشكل المقابل :



س م // د ه // ل ع

(٢) طول م ع

أوجد : (١) طول د م

الدرجة الكلية

اختبار 7

مبنى دروس : 3 من الوحدات الرابعة

أجب عن المسئلة الآتية :

السؤال الاول : ٦ درجات لكل جزئية درجة

اخر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقسطة :

(١) إذا كان : Δ أ ب ج - Δ م ن ع وكان : $٢ = ٣$ م ن

$$\text{فلن : } \frac{٣ (٣ م ن ع)}{٣ (٣ أ ب ج)} = \dots$$

(د) ٩

(ب) $\frac{1}{9}$

(ب) ٢

(١) $\frac{1}{9}$

(٢) في الشكل المقابل :



أ ب ينصف د ب أ ج

١٠ = ١٠٠ سم

(ب) ٦٠

(١) ٨

(د) ٣٢ ٧

(ج) ٦٥ ٢

(٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{a} \cap \overline{b} = \{ \text{هر} \}$

فإن : النقط a, b : تقع على دائرة واحدة

إذا كان : $\overline{a} \cap \overline{b} = \dots\dots\dots$

- (١) a, b سم (ب) a, b سم (ج) a, b سم (د) a, b سم

(٤) في الشكل المقابل :

$$\dots\dots\dots = \frac{a}{b}$$



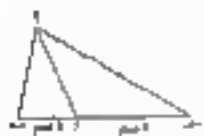
(١) $\frac{a}{b}$ (ب) $\frac{a}{b}$

(ج) $\frac{a}{b}$ (د) $\frac{a}{b}$

(٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $a = (b) = 2$ و $c = (d) = 2$

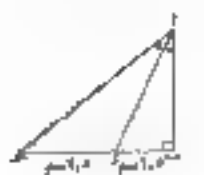
فإن : $a = b = \dots\dots\dots$ سم



- (١) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٦) في الشكل المقابل :

$a = b = \dots\dots\dots$ سم



(١) 1 (ب) 2

(ج) 3 (د) 4

المسألة الثانية

من ص ح ممكث ، نصبت زاوية من منتصف قطع \overline{a} في a ، ثم رسم

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \text{ من قطع } \overline{a} \text{ في } \overline{b} \text{ أثبت أن : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

وإذا كان : $a = b = 6$ سم ، $c = d = 4$ سم فأوجد : طول \overline{a}

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ سم

فلن : $\overline{AC} = \overline{BD}$ سم

(١) ٤ (ب) ٥

(ج) ٦

(د) ٨



(٢) في الشكل المقابل :

أو ينصف د ، $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، فإذا كان : $AD = ٩$ ، $DB = ١٠$ سم

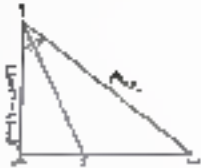
، $AE = (٦ - \text{سم})$ سم

فلن : $EC = \dots$ سم

(١) ٢٥ (ب) ٢٥

(ج) ٣٠

(د) ٢٠



(٣) في الشكل المقابل :

سم = \overline{AC} سم

(١) ٣ (ب) ٩

(ج) ٢

(د) ١٨



(٤) في الشكل المقابل :

إثبات أن $\overline{AD} = \overline{BC}$ (د) $\overline{AD} = \overline{BC}$

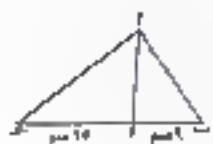
نحتاج معرفة أن \dots

(١) $\overline{AD} = \overline{BC}$

(ج) $\overline{AD} = \overline{BC}$

(ب) $\overline{AD} = \overline{BC}$

(د) $\overline{AD} = \overline{BC}$ (ج) $\overline{AD} = \overline{BC}$





١٢ (د)

٩٦ (ج)

٩ (ب)

٧ (أ)



٧٢ (د)

٥٤ (ج)

٤٨ (ب)

٣٦ (أ)

(٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle 1 = 40^\circ$ و $\angle 2 = 70^\circ$

فلن : $\angle 3 = \angle 4 = \dots = \dots$ سم

(٦) في الشكل المقابل :

مساحة $\triangle ABC = 120$ سم² .

٩ درجات

السؤال الثاني



في الشكل المقابل :

بـ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ ، $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}$ و $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

أثبت أن : \overline{AC} يتصل بـ \overline{DE} في \overline{AC}

بدرجة واحدة

١٠

حتى درس ٥ من الوحدة الرابعة

٩

اختبار

أجب عن الأسئلة التالية :

كل بئرئة درجة

٦ درجات

السؤال الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقصاة :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : \overline{AD} ينصف الزاوية الخارجة عند A

فلن : $\angle 1 = \angle 2 = \dots = \dots$ سم

٨ (د)

٤ (ج)

٦ (ب)

٢ (أ)



(٢) في الشكل المقابل :

..... =

(أ) ٣ (ب) ٤

(ج) ٧ (د) ٢

(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان \overrightarrow{r} مماساً للدائرة

فإن : \angle =



(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (ج) ٩٥ (د) ٥٥

(٤) إذا كان : $\angle = ٤٠$ سم ، \angle = ٣٠ سم حيث \angle نقطة خارج الدائرة

فإن : \angle = ()

(أ) ١٦ (ب) ٩ (ج) ٢٥ (د) ٧

(٥) في الشكل المقابل :

أي مما يأتي ليسوا \angle ()

(أ) \angle (ب) \angle (ج) \angle (د) \angle

(ج) \angle (د) \angle (أ) \angle (ب) \angle

(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle = ٤٠$ سم ، \angle = ٣٠ سم ، \angle = ٢٠ سم

فإن : \angle = ()

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤

(ج) ٩٠ (د) ١١٠



المسألة الثانية

(٢) درجة

(٦) درجة

المسألة

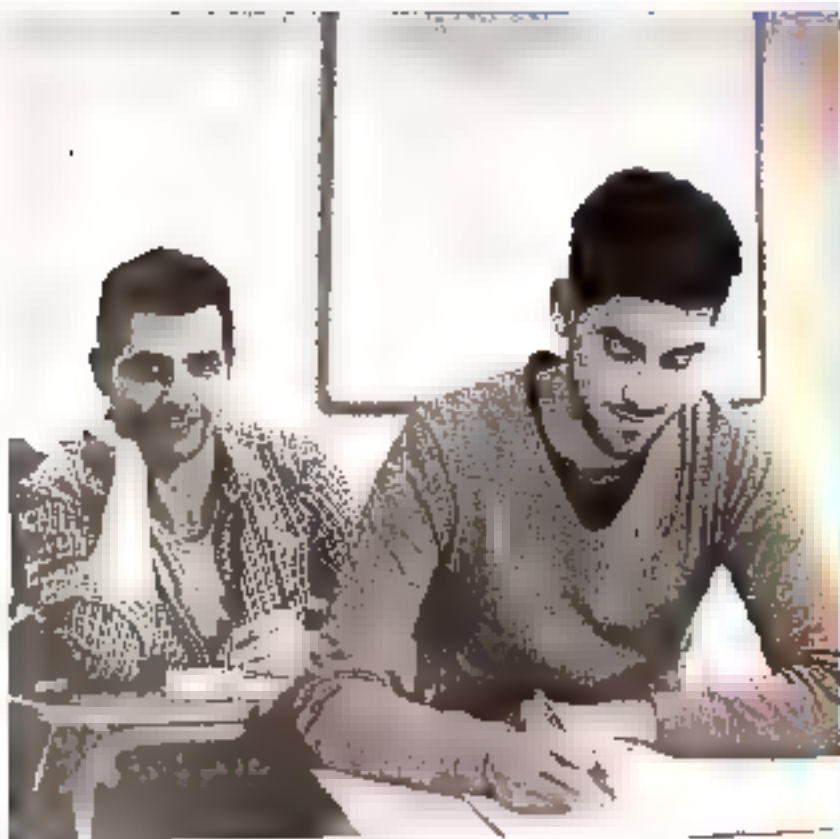
المسألة

دائرة Γ طول نصف قطرها ٧ سم ، \angle نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، \angle راسم الوتر \overline{AB} يمر

بالنقطة \angle بحيث $\angle = ٢٢$ سم

احسب : (١) طول الوتر \overline{AB} (٢) بُعد الوتر \overline{AB} عن مركز الدائرة.

امتحانات الكتاب المدرسي



تساقط المتكاثرات الكسرية المحذرة في الجبر وحساب المتكاثرات

النموذج الأول

أجب عن المسئلة الآتية:

1 أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان: $ل = ٢$ جذري للمعادلة: $س^٢ - ٧س + ٢ = ٠$ فإن: $ل + م =$

(١) ٢ (ب) ٢ (ج) ٧ (د) ٧

(٢) إذا كانت: $ما = ٠$ ، $١ = ٠$ ، $١ = ٠$ ، فإن: $٠ =$

(١) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (ج) $\frac{\pi ٢}{٢}$ (د) $\pi ٢$

(٣) المعادلة التربيعية التي جذورها: $٢ - ٢$ ، $٢ + ٢$ هي

(١) $س^٢ + ٤س + ١٢ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٤س + ١٢ = ٠$

(ج) $س^٢ + ٤س - ١٢ = ٠$ (د) $س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$

(٤) إذا كان أحد جذري المعادلة: $س^٢ - (٢ + م)س + ٢ = ٠$ معكوساً جدياً للجذر

الأخر فإن: $م =$

(١) ٢ (ب) ٢ (ج) ٢ (د) ٢

1 أعمل ما يأتي:

(١) الدالة $د$ حيث $د(س) = (س - ١) - (س + ٢)$ موجبة في الفترة

(٢) الزاوية التي قياسها ٩٢٠° تقع في الربع

(٣) إذا كان: $ما = ٠$ ، $\frac{١}{٢} = ٠$ ، $\frac{\pi ٢}{٢} = ٠$ ، فإن: $٠ =$

(٤) للمعادلة التربيعية التي جذورها ضلعت جذري المعادلة: $س^٢ - ٨س + ٥ = ٠$

هي

2 (١) ضع العدد $\frac{٢ - ٢}{٢ + ٢}$ في صورة عدد مركب حيث: $١ = ٢$

(ب) إذا كان: $١ = ٢ - ٠$ ، لوجد: ٠ حيث $٠ \geq ٠$ ، $\frac{\pi}{٢}$

..... (٥) : فإن $\frac{\pi}{2} > \theta > \pi$ ، $\overline{r} = \theta$: $\frac{\pi}{2} > \theta > \pi$ (٥)

$$\frac{\pi}{2} (2)$$

$$\frac{\pi l}{\tau} \left(\frac{m}{\tau} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} |w|$$

$\frac{x}{x}$ (1)

2. () يوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة: $x^2 - 7x + 12 = 0$

هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

(ب) إذا كان: $\theta = \alpha - \beta$ ، ما $\gamma_0 - \beta = \alpha + \gamma_0 - \beta$ ؟ حيث: $\gamma_0 > \theta > 0$.

ਭਾਗ: ੨ (੨)

2. (1) أوجد قيمتي a و b اللتين تحفظان المعادلة: $2 + 12 + 12 = 2 + 27 - 37$

(۱) آجندہ کی کُل مجموعہ حل للتباہتہ: $s = (n + 1) - 2 \geq 2$.

(ب) زاوية مركزية قياسها θ مرسومة في دائرة طول نصف قطرها ٩٨ سم وتقدر قوسها

طوله ٤٦ سم، أوجد θ بالقياس الستيني.

5 (1) إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة للنتيجة $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ يعطى بالعلاقة:

جـ = $\frac{2d}{r} = (n + 1)$ لكم عددًا صحيحًا متاليًا بدءًا من العدد 1 يكون مجموعها:

٤٧٣. كمال

(ب) إذا كان $\frac{f}{g} = \theta$ حيث $0 < \theta < 1$.

$$(\theta - \gamma_V) \mathbf{L}_V + (\theta - \gamma_I) \mathbf{L}_I + (\theta - \gamma_A) \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B$$

نهادج ارتكابات الكتات المدرسي من الهندسة

النموذج الأول

أجب عن الاسئلة التالية :

أكمل ما يأتي :

(١) المثلثان المتشابهان ثالثا يكتبان

(٢) في الشكل المقابل :

أولاً : $(٢ - ب) = ٩$ و $٩ = \dots$

ثانياً : $(٢ - ب) = ٩$ و $٩ = \dots$

ثالثاً : $٩ \times ٢ = ١٨$ و $١٨ = \dots$

رابعاً : $٩ \times ٢ = ١٨$ و $١٨ = \dots$



٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقطوعة :

(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثاني طوله ١٠ سم

و فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثاني تساوي

(أ) $١ : ٢$

(ب) $٢ : ١$

(ج) $١ : ٢$

(د) $٢ : ١$

(٢) أي مثلثين من المثلثات الآتية متشابهان ؟



(١)



(٢)



(٣)



(٤)

(أ) $(١) + (٢)$

(ب) $(٢) + (٤)$

(ج) $(١) + (٣)$

(د) $(١) + (٤)$

(٣) إذا كانت النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين $٤ : ١$ فإن النسبة بين مساحتي سطحيهما

تساوي

(أ) $١٦ : ١$

(ب) $٤ : ١$

(ج) $١ : ٤$

(د) $١ : ١٦$

١٠١ في الشكل المقابل :



كل التعبيرين الرياضي التالي صحيح

ماعدًا العبارة : ...

(ب) $\{A\} = \{B\} = \{C\}$

(١) $\{A\} = \{B\} = \{C\}$

(٢) $\{A\} = \{B\} = \{C\}$

(ج) $\{A\} = \{B\} = \{C\}$

٣ (١) في الشكل المقابل :



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ حيث أن $DE \parallel BC$

وإذا كان : $AD = 3$ سم ، $DB = 4$ سم

، $DE = 6$ سم ، $BC = 10$ سم

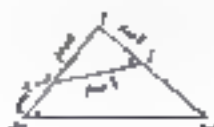
أوجد : طول كل من AE و AC

(ب) $\triangle ABC$ مثلث DE حيث : $AD = 3$ سم ، $DB = 4$ سم ، $DE = 6$ سم ، $BC = 10$ سم

يحيث : $AD = 3$ سم ، $DB = 4$ سم ، $DE = 6$ سم

أثبت أن $DE \parallel BC$ ، $\triangle ABC$ ثم أوجد النسبة بين مساحتي مثلثيهما.

٤ (١) في الشكل المقابل :



وإذا كان : $AD = 3$ سم ، $DB = 4$ سم ، $DE = 6$ سم ، $BC = 10$ سم

، $DE = 6$ سم ، $BC = 10$ سم

أوجد طول كل من AE و AC

(ب) في الشكل المقابل :



حيث : $\{A\} = \{B\} = \{C\}$ ، $\{A\} = \{B\} = \{C\}$

وإذا كان : $AD = 3$ سم ، $DB = 4$ سم

أوجد : طول AC

٣ (١) DE متوسط في المثلث ABC ، نصقت D و E بنصف تقاطع AB في H ، نصقت

DE و AC بنصف تقاطع AC في I ، ومع H أثبت أن $DE \parallel BC$



(ب) في الشكل المقابل :

$\overline{A} // \overline{B} // \overline{C} // \overline{D} // \overline{E} // \overline{F} // \overline{G} // \overline{H} // \overline{I} // \overline{J} // \overline{K} // \overline{L} // \overline{M} // \overline{N} // \overline{O} // \overline{P} // \overline{Q} // \overline{R} // \overline{S} // \overline{T} // \overline{U} // \overline{V} // \overline{W} // \overline{X} // \overline{Y} // \overline{Z}$

[illegible]

أولاً : أوجه : : طوائف : : و

ثَلَاثَةٌ أَلَيْتَ أَنْ يَوْمَ // حَرَرِ

النموذج الثاني

اجب عن الاسئلة الآتية .

١ اكمل ما يلي :

(١) أي مصلحين مستظفين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ...



[T] في الشكل المرفق:

إذا كان Δ زوجاً Δ فردياً

فإن : $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$

(٣) في الشكل المقابل:

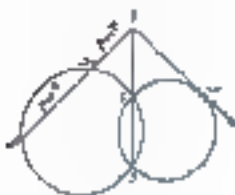


إذا تقاطع المستقيمان الحاربان الفوتونين

والله اعلم

الحل: $u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} = -u^2$

(٤) في الشكل المقابل :



اذا كان α في $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$r = 0.9 = 90\%$$

فازت: 1 بـ 0

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

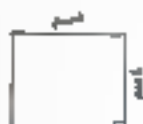
(١) أي مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟



(٤)



(٦)



(٢)



(١)

(ب) المضلعان (١) و (٢)

(١) المضلعان (١) و (٢)

(د) المضلعان (٢) و (٤)

(ج) المضلعان (٢) و (٤)

(٢) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي

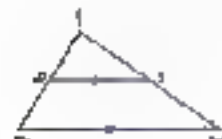
(د) ٤١ : ١٦

(ج) ١٦ : ٢٥

(ب) ٤ : ٥

(١) ٤ : ٢

(٣) في الشكل المقابل :



جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ماعدا التعبير

$$(ب) \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

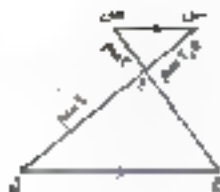
$$(١) \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

$$(د) \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

$$(ج) \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

(٤) في الشكل المقابل :

طول \overline{AC} يساوي



(ب) ٤ سم

(١) ٢,٦ سم

(د) ٤,٨ سم

(ج) ٢,٦ سم

(٣) (١) في الشكل المقابل :

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

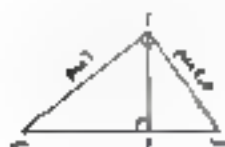
أثبت أن الشكل $BCDE$ مربع و $ABCD$ دائري

وإذا كان : $AC = 3$ سم $BC = 4$ سم $AB = 5$ سم $AD = 2,٥$ سم

أوجد : طول DE



(ب) $\triangle ABC$ وشكل رباعي تقاطع قطرا في O ، رسم $HO \parallel AB$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AB في D ،
رسم $HO \parallel AC$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AC في E ، أثبت أن : $HO \parallel BC$



(1) في الشكل المقابل :

$$\angle A = 60^\circ , \angle B = 90^\circ \text{ و } \angle C = 30^\circ$$

$$AB = 6 \text{ سم} , AC = 12 \text{ سم} , BC = 6 \text{ سم}$$

أوجد طول كل من : AD ، BD ، CD ، OD ، OC

(ب) $\triangle ABC$ وشكل رباعي تقاطع قطرا في O ، رسم $HO \parallel AB$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AB في D ،
رسم $HO \parallel AC$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AC في E ، أثبت أن : $HO \parallel BC$
وأوجد النسبة بين مماسي مثلثيها .



(1) في الشكل المقابل :

$$\angle A = 60^\circ , \angle B = 90^\circ \text{ و } \angle C = 30^\circ$$

$$AB = 6 \text{ سم} , AC = 12 \text{ سم} , BC = 6 \text{ سم}$$

أوجد طول كل من : AD ، BD ، CD ، OD ، OC

(ب) $\triangle ABC$ وشكل رباعي تقاطع قطرا في O ، رسم $HO \parallel AB$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AB في D ،
رسم $HO \parallel AC$ و $BO \parallel AC$ ويقطع AC في E ، أثبت أن : $HO \parallel BC$
وأوجد طول كل من : AD ، BD ، CD ، OD ، OC

الامتحانات النهائية

• امتحان الوزارة التجريبي (يناير ٢٠١٩)

• ١٠ نماذج امتحانية

• ١٠ نماذج امتحانية إلكترونية متتار إليها

باركود QR codes



امتحانات الوزارة التحريتي (يناير ٢٠١٩)

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) إذا كانت $(س)$ = $س + ٢$ حيث $س \in [-٤ ; ٢]$

فإن $٤ - (س)$ تكون موجبة عندما $س \in \dots\dots\dots$

١) $[-٢ ; ٤]$ ٢) $[-٢ ; ٥]$

٣) $[-٤ ; ٢]$ ٤) $[-٢ ; ٢]$

٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{م\}$ ، $م = ٥$ سم

، $م = ٢$ سم ، $م = ٤$ سم

، و $م = ٤$ سم

، و \overline{AB} ، \overline{CD} ، النقطة $م$ ، $م$ ، $م$ ، $م$ تقع على محيط دائرة

فإن : طول $\overline{AB} = \dots\dots\dots$ سم

١) $٠,٥$ ٢) ١ ٣) $١,٥$ ٤) ٢

٣) إذا كانت $م$ زاوية حادة موجبة في الوضع القياسي حيث يمر ضلعها النهائي بالنقطة

$(٦,٠)$ على دائرة الوحدة. أوجد : لأقرب درجة قياس الزاوية $س \in [\pi ; ٠]$

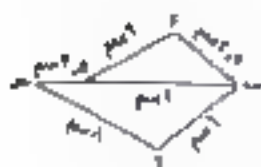
والتي تحقق العلاقة : $٦٠ = م$ | $٦٠ - م$ | $٦٠ - م$ | $٦٠ - م$

٤) إذا كان : $(٦ + ت)$ ، $(٦ - ت)$ ، $ت = ٥$ ، $ت = ٥$

فإن : $س + م = \dots\dots\dots$

١) ١ ٢) ٢ ٣) ٣ ٤) ٤

٥ في الشكل المقابل :



سأعطي استقامة واحدة

إذا كان $AB = 10$ سم و $AC = 12$ سم و $BD = 16$ سم

أعطي $AB = 10$ سم و $AC = 12$ سم و $BD = 16$ سم

أعطي $AB = 10$ سم و $AC = 12$ سم و $BD = 16$ سم

فلن نحاول التماسك بين المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ و $BD = 16$ سم

١٦ : ٩ (د)

٩ : ١٦ (ج)

٤ : ٣ (ب)

٣ : ٤ (أ)

٦ في الشكل المقابل :



وهو $DE \parallel BC$ و $DE = \frac{1}{2} BC$

أعطي $DE \parallel BC$ و $DE = \frac{1}{2} BC$

أثبت أن $DE \parallel BC$ و $DE = \frac{1}{2} BC$

٧ قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس الذي طوله يساوي طول قوس الدائرة محوطة

لأقرب درجة يساوي

١٨٠ (د)

١٢٠ (ج)

١١٥ (ب)

١١٣ (أ)

٨ في الشكل المقابل :



إذا كانت : $AB = 2$ سم

نفس دائرة AB طول نصف قطرها AB سم

في $AB = 2$ سم و $AC = 4$ سم و $BD = 4$ سم

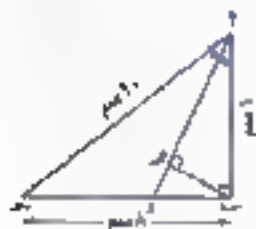
فلن $AB = 2$ سم و $AC = 4$ سم و $BD = 4$ سم

١٨ (د)

١٦ (ج)

١٤ (ب)

١٢ (أ)



١٠ في الشكل المقابل :

أب جد مثلث قائم الزاوية في بـ

بـ جد = ٨ سم

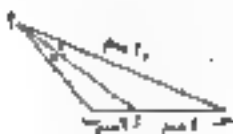
بـ جد = ٦ سم ، أ ب ينصف د ب ؟ جد

بـ جد = ٤ أو احسب طول د ب

١١ إذا كان : $\angle A = 60^\circ$ و $\angle B = 270^\circ$ و $\angle C = 150^\circ$ ،

فإن قيمة x التي تحقق المعادلة حيث $x \in [0, \pi]$ ، $\cos x = \frac{1}{2}$ ، تساوي

- ١) ٥ ٢) ١٠ ٣) ٢٠ ٤) ٩٠



١٢ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب منصف داخلي للزاوية ب ؟ جد

بـ جد = ١٠ سم ، د ب = ٤ سم

بـ جد = ٦ سم فإن : طول أ ب = سم

- ١) ٩ ٢) ٥ ٣) ١٢٢ ٤) ٥٨٢

١٣ إذا كان $\sin x = 7$ و $\cos x = 5$ ،

فأوجد المعادلة التربيعية التي جذورها : $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ ل



١٤ في الشكل المقابل :

إذا كانت : م دائرة ، و رسم أ ب يقطع الدائرة في س ، و

و رسم أ ب يقطع الدائرة في ب ، و س = ٥ ، و ب = ٤

فإن قيمة : س =

- ١) ٤٠ ٢) ٣٠ ٣) ٢٠ ٤) ١٠

١٥) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AB} = ١$ سم

، $\overline{BC} = ٢$ سم ، $\overline{AD} = ٣$ سم

فإن : طول \overline{DE} = سم.

٥ (د)

٤ (ج)

٣ (ب)

٢ (أ)

١٥) إذا كان جذر المعادلة : $٣س + (٢ + س) + (٢ + س) = ٠$ حقيقيين ومتماولين

فإن : $س =$

$\frac{١}{٣}$ (د)

$\frac{١}{٣}$ (ج)

$\frac{٢}{٣}$ (ب)

$\frac{٢}{٣}$ (أ)

١٦) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\{١\}$ ، $\overline{AE} = ١$ سم ، $\overline{BE} = ٢$ سم ، $\overline{CE} = ٣$ سم ، $\overline{DE} = ٤$ سم

، $\overline{AD} = ١$ سم

، $\overline{BC} = ٢$ سم ، $\overline{AC} = ٣$ سم ، $\overline{BD} = ٤$ سم

فإن : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ = سم.

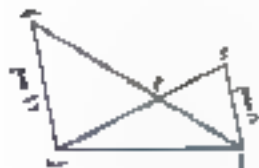
٣٦٥ (د)

١٠٠ (ج)

٤٤ (ب)

٦٠ (أ)

١٧) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AE} = ١$ سم ، $\overline{BE} = ٢$ سم ، $\overline{CE} = ٣$ سم ، $\overline{DE} = ٤$ سم

، $\overline{AD} = ١$ سم

، $\overline{BC} = ٢$ سم ، $\overline{AC} = ٣$ سم ، $\overline{BD} = ٤$ سم

١٨ في الشكل المقابل :



أحـ يمس الدائرة م عند نقطة م ، \overrightarrow{AO} يقطع الدائرة م في النقطتين د ، ق على الترتيب
فلذا كان $\angle د = 3$ سم ، $\angle ق = 4$ سم
فإن : $\angle م = ()$ =

٢٦ (د)

٢٢ (ج)

٩ (ب)

٦ (أ)

١٩ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ،
 $DE = 4$ ، $BC = 6$
فإن : $AD =$ =

٦ (ب)

٨ (أ)

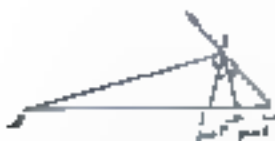
٢ (د)

٤ (ج)

٢٠ عين إشارة الدالة د حيث : د (س) \leq س + ٢

لم أوجد في ع مجموعة حله المتناهية : د (س) \geq صفر

٢١ في الشكل المقابل :



أحـ منتصف الزاوية الداخلية للمثلث $\triangle ABC$ عند د
أحـ \perp \overline{BC} ، $\angle د = 3$ سم ، $\angle ق = 4$ سم
فإن $\angle د =$ =

٢ : ١ (د)

٤ : ٢ (ج)

٢ : ٧ (ب)

٤ : ٧ (أ)

٢٢ إذا كان (٢) أحد جذري المعادلة التربيعية : $x^2 + x - 3 = 0$ ،

حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية ، فإن جميع ما يلي صحيح ما عدا :

(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (-٢)

(ب) مجموع جذري المعادلة = صفر

(ج) حاصل ضرب جذري المعادلة = -١

(د) المعيار للمعادلة التربيعية > صفر

٢٣ في الشكل المقابل :



أوجد محيط الجزء المظلل الذي يمثل جزء من

الدائرة م علمًا بأن مساحة الدائرة 36π سم²

، ما (د - أ) = ؟ $\frac{1}{3}$

٢٤ إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 - 2x + (٩ + م) = 0$ ،

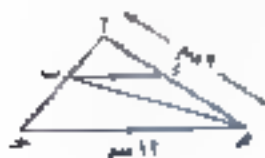
هو متكوس ضربي للجذر الآخر ، فإن : $٩ = م$

(أ) $٩ < ٣ - ١$ (ب) $٩ < ٣ - ١$ (ج) $٩ < ٣ - ١$ (د) $٩ < ٣ - ١$

٢٥ إذا كان : $١٠ = م = ٦$ حيث : ٦ قياس أكبر زاوية حادة ، $٢ \in [٠, \pi]$

فإن القيمة العددية للمقدار : $\cos(٢ + \pi)$ تساوي

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{5}{6}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{2}{3}$



٢٦ في المثلث $\triangle ABC$: $AB \parallel AC$ ،

$AB = 12$ ، $AC = 9$ ، $BC = 15$ سم

، $DE = 6$ سم

اثبت أن : DE تنصف الزاوية $\angle A$.



٢٧) إذا كان : د (س) = $s^2 - 7s + 12$ ، $s \in \mathbb{R}$ فإن جميع ما يلي صحيح ما عدا

- أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هي $\{2, 4\}$
 ب) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هي $\mathbb{R} - [2, 4]$
 ج) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هي $[2, 4]$
 د) د (س) موجبة في الفترة $[-2, 4]$

٢٨) متى الدالة د : د (س) = k حـا س حيث $s \in [-2, 4]$ يتناوب

- أ) $[2, -]$ ب) $[2, 0]$
 ج) $[0, 4]$ د) $[-2, 4]$

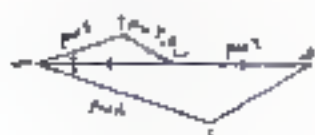


أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت $\alpha = (\theta + 180^\circ)$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن $\theta = \dots\dots\dots$

١. ٦٠ (أ) ٦٠ (ب) ٤٥ (ج) ١٢٥ (د)



٢. ٤ (أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د)

٣ في الشكل المقابل :

إذا كانت $د$ منتصف $ج هـ$

فإن $د هـ = \dots\dots\dots$ سم.

٤ إذا كان $ل$ ، $م$ جذري المعادلة : $س^2 - ٥س + ٦ = ٠$

فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها $ل + م$ ، $ل + م$ =



٥. ١ (أ) ٢ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ١٢

٦ في الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها $م$

فإن $س = \dots\dots\dots$ سم.

٧ مجموعة حل المتباينة $(س - ٢) (س - ٧) > ٠$ في $س$ هي

١. $\{٢, ٧\}$ (أ) $\{٧, ٢\}$ (ب) $[٢, ٧]$ (ج) $[٧, ٢]$ (د)

٢. $[٢, ٧]$ (أ) $[٧, ٢]$ (ب) $(٢, ٧)$ (ج) $(٧, ٢)$ (د)



٦ في الشكل المقابل :

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{CE}$$

أثبت أن : $\angle A = \angle C$

٧ المصنف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساويين القطعة

١) عمودي

٢) عمودي على

٣) ينصف

٤) يساوي



٨ في الشكل المقابل :

أ - \overline{AB} مماسان للدائرة

$$\angle A = 40^\circ$$

فإن : $\angle D = \dots$

١) 20

٢) 40

٣) 60

٤) 80

٩ يكون جنوا المعادلة $3x - 12 = 9 + x$ متساويين إذا كانت

١) $x < 9$

٢) $x > 9$

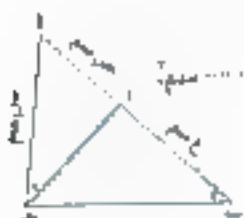
٣) $x = 9$

٤) $x = 9$

١٠ إذا كانت : θ قياس زاوية مربعة في وضعها القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة

الوحدة في النقطة $(-1, 0)$ حيث $0 < \theta < 2\pi$

أوجد قيمة $\sin \theta$ لم أوجد θ ما $(2\pi - \theta) - \theta$ كذا θ



١١ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle A = 36^\circ$ فإن : $\angle D = \dots$ سم

١) 36

٢) 72

٣) 108

٤) 144

١٢ أبسط صورة العدد التخيلي 17 هي

- ١ (أ) ١- (ب) ١- (ج) ١- (د) ١-

١٣ إذا كانت $\vec{u} \perp \vec{v}$ حيث $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم ، $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ سم ، $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم

حيث $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم ، $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ سم

اثبت أن : (١) $\Delta \vec{u} \vec{v} \sim \Delta \vec{u} \vec{w}$ أحده

(٢) الشكل $\vec{u} \vec{v} \vec{w}$ رباعي دائري.

١٤ في الشكل المقابل :



دائرة م طول قطرها ١٢ سم ، $\vec{m} = \vec{h} = \vec{h} = \vec{h}$

وكان $\vec{h} = (\vec{h} + \vec{h})$ سم

فإن : $\vec{h} = \dots$ سم.

- ١ (أ) ١- (ب) ١- (ج) ١- (د) ١-

١٥ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6}$ قياسها المقياس يساوي

- ١ (أ) ١٠٠ (ب) ١٠ (ج) ١٢٠ (د) ٨٢٠

١٦ ليكن إشارة $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم ، $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ سم ، $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم مع توضيح ذلك على خط الأعداد ،

ثم عين مجموعة حل المتباينة : $3\vec{u} + 2\vec{v} \geq 10$

١٧ إذا كان : $\Delta \vec{u} \vec{v} \vec{w}$ قائم الزاوية في \vec{u} ، $\vec{u} \perp \vec{v}$ حيث $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ سم

فإن : (أ) $\vec{u} = \dots$

- ١ (أ) $\vec{u} = \vec{v}$ (ب) $\vec{u} = \vec{w}$ (ج) $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ (د) $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$

١٨ إذا كانت القطعتين (سج) و (سج) متساويتين، و (سج) و (سج) تقعان على منحنى الدالة $y = x^2 - 4x + 4$ ، فما قيمة x ؟

- ١) ١ ٢) ٢ ٣) صفر ٤) ١٨٠

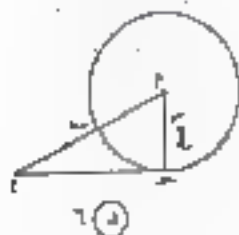
١٩ في الشكل المقابل:



١) أثبت أن \overline{AH} ينصف \overline{BC} أو جـ.

٢) أوجد: $\angle H$ (د.س.و.س).

٢٠ في الشكل المقابل:



١) \overline{AB} مماس للدائرة م في جـ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle B = ?$ سم

٢) $\angle C = ?$ سم

٣) $\angle B = ?$ سم

- ١) ٢ ٢) ٣ ٣) ٤ ٤) ٦

٢١ الشكل المقابل يمثل للمنتج:



س = ٢ - س + س + س

قاي معاً يأتي صحيح ٩

١) $0 < \angle A < 90^\circ$ جـ

٢) $0 < \angle A < 90^\circ$ جـ

٣) $0 < \angle A < 90^\circ$ جـ

٤) $0 < \angle A < 90^\circ$ جـ

٢٢ إذا كان: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ، $270^\circ < \angle A < 360^\circ$

أوجد قيمة: $\angle A$ (د.س.و.س) + $\angle A$ (د.س.و.س) + $\angle A$ (د.س.و.س)



(أ) $\frac{1}{3}$

(ب) $\frac{1}{2}$

(أ) $\frac{1}{3}$

(ب) $\frac{1}{2}$

٢٢. ل الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تكافئ متوسطات الشكل هـ - د

، كان : $\overline{PM} \parallel \overline{DE}$

فإن : $\frac{PM}{DE} = \dots\dots\dots$

٢٣. إذا كان : هـ - د قياساً زاويتان متكاملتين لأي مما يلي يمثل قياساً زاويتين متكاملتين أيضاً

حيث هـ - د

(أ) $(1 - هـ) + (هـ - د)$

(أ) $(هـ + د) + (د + هـ)$

(ب) كل ما سبق

(ب) $(1 - هـ) + (هـ - د)$

٢٤. هـ - د مثل قائم الزاوية في ب ، رُسم $\overline{AA'}$ ينصف د هـ ويقطع هـ - د

في هـ فإذا كان : طول هـ - د = ٢٤ سم ، هـ - د : هـ - د = ٢ : ٣

أوجد : محيط $\triangle A'BE$

٢٥. إذا كان المنحنى : $هـ = هـ - (هـ - هـ)$ فأي من العبارات الآتية يكون صحيحاً ؟

(أ) المنحنى يقطع محور السينات عند $(٠ ، ٠)$ و $(٠ ، ٤)$

(ب) رأس المنحنى هو $(\frac{1}{٤} ، \frac{1}{٤})$

(ج) محور التماثل للمنحنى هو $هـ = ٤$

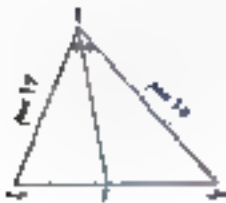
(أ) فقط (١) ، (٢) فقط

(أ) فقط (١) ، (٢) فقط

(ب) فقط (١) ، (٢) ، (٣)

(ب) فقط (١) ، (٢) فقط

٢٧ في الشكل المقابل :



٢٨ (ب)

٤٠ (د)

إذا كانت مساحة $\triangle ABC = 72 \text{ سم}^2$

فإن مساحة $\triangle ADE = \dots \text{ سم}^2$

٢٤ (أ)

٣٢ (ج)

٢٨ إذا كانت : $\theta < 90^\circ$ حاد ، $\theta > 90^\circ$ منفر ، فإن θ تقع في الربع :

(د) الرابع.

(ج) الثالث.

(ب) الثاني.

(أ) الأول.



أجب عن الأسئلة الآتية :

١) المثلث الذي قياسا زاويتين فيه 50° و 60° يشابه المثلث الذي قياسا زاويتين

فيه 60° و

٣٠ (د)

٨٠ (ج)

١١٠ (ب)

٧٠ (أ)

٢) إذا كان : $3 - 2 = 1$ فما يحق للمعادلة : $3 - 1 + 2 = 6$:

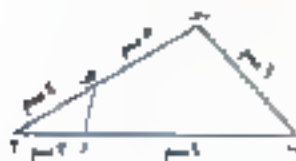
فإن : $2 = 6$

٥ (د)

٢- (ج)

٢- (ب)

١ (أ)



٣) في الشكل المقابل :

هر $\exists \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ حيث : $2 = 4$ سم

، $3 = 6$ سم ، $١ = ٤$ سم

، $٤ = ١$ سم ، $١ = ٤$ سم

أثبت أن : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ثم أوجد طول DE

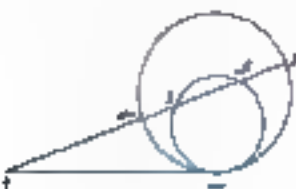
٤) الحالة : $١ = (س) = (س - ١) = (س + ٢)$ تكون موجبة في الفترة

١، ٢- [(ب)

١، ٢- [(أ)

١، ٢- [- (د)

١، ٢- [- (ج)



٥) في الشكل المقابل :

إذا كانت : \overline{AB} مماسة مشتركة لدائرتين

متماثلتين عند B

فإن $١ = ٢$

١ : $١ = ٢$ (د)

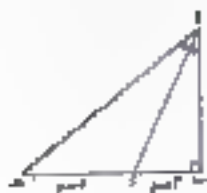
١ : $١ = ٢$ (ج)

١ : $١ = ٢$ (ب)

١ : $١ = ٢$ (أ)

٦ أوجد الحل العام للمعادلة : $(x^2 + 8x) = (x^2 + 8)$ $x \in \mathbb{R}$
 ثم أوجد : قيم $\theta \in [0, \pi]$

٧ في الشكل المقابل :



٥ (ب)
٧ (د)

١ سم
١ (أ)
٦ (ج)

٨ إذا كان T دالة عكسية نسبية فإن جذري المعادلة : $x^2 - 2x + 1 = 0$ يكونان

(ب) مركبان مترافقين.
(د) متساويين.

(أ) مركبان وغير حقيقيين.
(ج) نسبيين.

٩ في الشكل المقابل :



٦ (د)

٥ (ج)

١ سم
١ (ب)
٣ (أ)

١٠ إذا كان f دالة عكسية نسبية : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ فكون المعادلة التي جذراها : $x^2 + 1 = 0$

١١ في الشكل المقابل :



٢١ (د)

٥٢ (ج)

١ سم
١ (ب)
٢٧ (أ)

١٢) إذا كان $m = 1$ و $n = 1$ حيث m و n دائرتان فإن

- ① $m = n$
 ② $m = n$
 ③ m تقع على خط تقاطع الدائرتين m و n
 ④ m تقع على المحور الأساسي للدائرتين m و n

١٣) إذا كانت θ قياس زاوية في وضعها القياسي ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في

النقطتين $(\cos \theta, \sin \theta)$ حيث $\sin \theta > 0$
 فأوجد قيمة $\tan \theta$: ما $(\theta + 90^\circ)$ - ما $(\theta + 180^\circ)$ ما $(\theta + 270^\circ)$



① $\frac{a}{b}$

② $\frac{b}{a}$

③ $\frac{a}{c}$

④ $\frac{b}{c}$

١٤) في الشكل المقابل :

ساحر $a = 5$ سم : ساحر $b = 4$ سم

ساحر $c = 3$ سم

فإن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

١٥) طول القوس في الدائرة التي طول نصف قطرها ٦ سم ويقابل زاوية مركزية

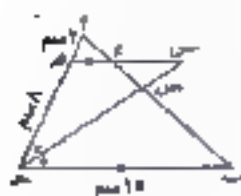
قياسها $\frac{2\pi}{3}$ هو

① 2π سم

② $\frac{2\pi}{3}$ سم

③ 2π سم

④ $\frac{2\pi}{3}$ سم



① ٦

② ٥

③ ٤

④ ٣

١٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : ساحر a ينصف ساحر b

ساحر c // ساحر d

فإن : ساحر $a =$ ساحر



١٧ في الشكل المقابل :

أ ب = ٧ سم ، ب ح = ٥ سم
 أ ح = ٦ سم ، أ د = ٤ سم ، د ح = ٤ سم
 أوجد قيمة س



١٨ في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 أثبت أن : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ يكون كافيًا
 الحصول على

ب) $10 \times 12 = 14 \times x$ فقط
 د) ليس كل ما سبق

١) $\frac{10}{14} = \frac{x}{12}$ فقط
 ج) (ب) ، (د) معًا

١٩ إذا كان : أ ب مثلث قائم الزاوية في ب ، ما أ + ب ح = ١

فلن ، ط أ ح =

١) ١ ب) ١- ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

٢٠ أ ب ح مثلث فيه ، أ ب ينصف الزاوية الداخلية للضلع ب ح في د فإذا كان

أ ح = ١٥ سم ، أ ب = ٢٧ سم ، ب ح = ١٨ سم
 احسب : طول كل من ح د ، أ د

٢١ الشكل المقابل :



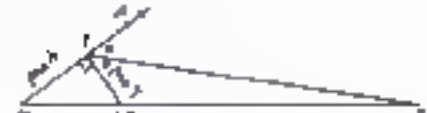
إذا كان : أ ب قطر في دائرة م ، ح د س ، أ ح س
 قطعتان مماستان للدائرة م ، أ ب = ٢٠ سم
 أ ح س = ٨ سم ، أ د س = ٢٠ سم
 فلن : أ ح =

١) ٢ ب) ٦ ج) ٨ د) ١٠

- ٢٢ إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها 60° في الوضع القياسي تدويرين فديع في نفس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يمثل الزاوية
 ١) 60° ٢) 120° ٣) 150° ٤) 210°

- ٢٣ نقطة خارج الدائرة م ، رسم \overline{MA} مماساً للدائرة عند م ثم رسم \overline{MA} قاطعاً للدائرة في ح ، د إذا كان : $\widehat{MAO} = 150^\circ$ و $\widehat{MAO} = (\widehat{MAO})$ أوجد : \widehat{MAO} بالدرجات م (د ١)

- ٢٤ مجموعة حل المعادلة : $x^2 + 9 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة هي
 ١) $\{3-2i, 3+2i\}$ ٢) $\{-2-3i, -2+3i\}$ ٣) $\{2-3i, 2+3i\}$ ٤) $\{3-2i, 3+2i\}$

- ٢٥ في الشكل المقابل :
 مساحة Δ م د = سم²
 ١) ٣٦ ٢) ٤٨ ٣) ٧٢ ٤) ٨٤
- 

- ٢٦ أوجد قيم م ، ن التي تحقق للمعادلة : $\frac{(2m+5)(2n-4)}{m+n} = 2m+5$

- ٢٧ إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 4 \leq x + 3$ هي $[2, 7]$ فإن : $x = 7$
 ١) ٦ ٢) ١ ٣) ٢ ٤) ١٠

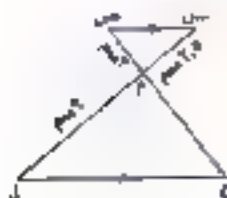
- ٢٨ مدى الدالة د : $d(8) = 2$ ح ٢ هو
 ١) $[2, 7]$ ٢) $[2, 7]$ ٣) $[2, 7]$ ٤) $[2, 7]$



النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ في الشكل المقابل :



ع ٢ = مم.

- ١ ☐ ٣, ٦
٢ ☐ ٤, ٨
٣ ☐ ٤, ٢
٤ ☐ ٤, ٨

٢ أبسط صورة للعدد التكليفي $\frac{23}{100}$ =

- ١ ☐ ١-
٢ ☐ ١-
٣ ☐ ١-
٤ ☐ ١-

٣ مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتهما ٣٢ سم^٢ أوجد : مساحة كل منهما.

٤ في الشكل المقابل :



$\frac{EF}{AD} = \frac{1}{2}$

- ١ ☐ $\frac{1}{2}$
٢ ☐ $\frac{1}{3}$
٣ ☐ $\frac{1}{4}$
٤ ☐ $\frac{1}{5}$

٥ إذا كان أحد جذري المعادلة : $x^2 - (٢ + م)x + ٢ = ٠$ معكوساً جبرياً للآخر

فإن : $م = \dots\dots\dots$

- ١ ☐ ٢-
٢ ☐ ٢-
٣ ☐ ٢-
٤ ☐ ٢

٦ حل في ح المتباينة الآتية : $(٢ + س) ٢ - ١٠ \geq (٢ + س)$

٧ إذا كان المضلع م، هو تكبير للمضلع م، وكانت له نسبة التكبير فإن

- ① له $1 <$ ② له $1 >$
 ③ له $=$ ④ له > 1

٨ مجموعة حل المعادلة $2x = 3x - 1$ هي

- ① $\{0\}$ ② $\{1\}$
 ③ $\{1, -1\}$ ④ $\{1, 0\}$

٩ في الشكل المقابل :



أ ب = سم.

- ① ٤ ② ٥
 ③ ٦ ④ ٨

١٠ في الشكل المقابل :



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان للدائرة م عند ب و ج

و $\angle AOC = 40^\circ$ و $m = 5$ سم

أوجد : طول القوس الأصغر \widehat{BC}

١١ إذا كان : أ ب مماساً للدائرة م عند ب وكانت : ج م (أ) = ٢٥ سم

فإن : أ ب = سم

- ① ٥ سم ② ٣ سم ③ ١٥ سم ④ ٢٥ سم

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كان : $g = 8$ سم ، $h = 6$ سم

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

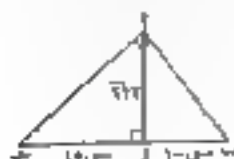
☐ أ $\frac{1}{3}$

☐ ب $\frac{3}{8}$

☐ ج $\frac{3}{7}$

☐ د $\frac{6}{7}$

١٨ في الشكل المقابل :



باستخدام المعطيات الموجودة على الرسم

فإن : $\sin \theta = \dots\dots\dots$

☐ أ $\frac{1}{2}$

☐ ب $\frac{3}{5}$

☐ ج $\frac{4}{5}$

☐ د $\frac{5}{7}$

١٩ إذا كان : $\theta = 60^\circ$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : $\sin \theta = \dots\dots\dots$

☐ أ $\frac{1}{2}$

☐ ب غير معرف

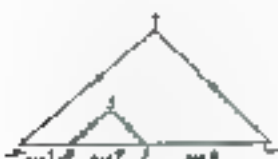
☐ ج $\frac{1}{\sqrt{2}}$

☐ د $\frac{1}{2}$

٢٠ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

٢١ في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة $\triangle ABC = 6$ سم²

فإن مساحة المنطقة المظللة = $\dots\dots\dots$ سم²

☐ أ 1

☐ ب 2

☐ ج 3

☐ د 4

٢٢ الدالة : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ يكون لها إشارة واحدة في ح

قطعا $\dots\dots\dots$

☐ أ $1 < x < 3$

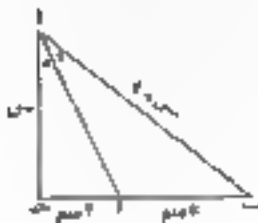
☐ ب $1 < x < 3$

☐ ج $1 < x < 3$

☐ د $1 < x < 3$

١٢ أَفَمَوْسَطُ فِي الْأَعْدَاءِ مِمَّنْ يُلَاقِيهِمْ وَيَقْلَعُ أَيْمَانَهُمْ عَنْهُمْ
يَنْصِفُ ذَا عَدُوٍّ وَيَقْلَعُ أَيْمَانَ مَنْ هُنَا مِنْ // بَعْدَ

٢٤ في الشكل المقابل:



اسماء بنت ابی بکر

1. 4
2. 4

- ① ②
 ③ ④

٢٦ أبسط صورة المقدار : $\frac{1}{(a+b)^2} \times \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^4}$

- ① 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

٦٦ في الشكل التالي :



اب // دھ // سوس

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

١. معرّف = ٤٠ سم ، ٢. ٥ - ٤ = ١ سم

الحمد لله : بالول كل عن سبعة : ٤ فرض

27 | إذا كان: $(\alpha - \beta)$ "أصغر قياس موجب"، $(\gamma - \delta)$ "أكبر قياس سالب"

زاویہ میں متکامل ہے۔

- *9. (J) *14. (M) *18. (N) *77. (I)

[illegible]

- π (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) ۱ صفر



النموذج الرابع

اجب عن الأسئلة الآتية :

١ في الشكل المقابل :



إذا كان : \widehat{AOB} مماساً للدائرة \widehat{AOC} $\widehat{BOC} = 50^\circ$

$\widehat{AOC} = (30^\circ - 10^\circ)$

$\widehat{AOC} = (10^\circ - 30^\circ)$

فإن : $\widehat{BOC} = \dots\dots\dots$

١٥ (د)

٣٠ (ج)

٦٠ (ب)

١٢٠ (أ)

٢ إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان : $\widehat{BOC} = (10^\circ + \theta)$ $\widehat{BOC} = 50^\circ$

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

٥٠ (د)

٢٠ (ج)

٤٠ (ب)

٣٠ (أ)

٣ دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة الدائرة الصغرى ٢٧ سم^٢

فإن مساحة الدائرة الكبرى تساوى سم^٢

١٠٠ (د)

٧٥ (ج)

٥٠ (ب)

٤٥ (أ)

٤ ابحث في \mathbb{Z} إشارة الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 2$ $x = 2$ موضعاً تلك على خط الأعداد

ثم أوجد في \mathbb{Z} مجموعة حل المتباينة : $x^2 + 8x - 2 > 0$

٥ إذا كان $x = 1$ أحد جذرى المعادلة : $x^2 - 6x + 5 = 0$

فإن : $x = \dots\dots\dots$

٦ (د)

٦ (ج)

٥ (ب)

٠ (أ)



٦) \overline{AB} مثلث فيه : \overline{AO} ينصف $\angle A$ من الداخل وكان : $\angle B < \angle C$.

فإن : $\angle O < \dots$ و \dots

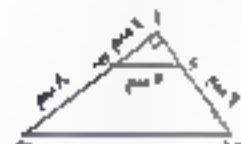
- ① $<$ ② $>$ ③ \leq ④ $=$

٧) في الشكل المقابل :

\overline{AB} مثلث قائم الزاوية في A

١) أثبت أن : $\overline{DH} \parallel \overline{BC}$

٢) أوجد طول \overline{BC}



٨) الزاوية التي قياسها 2922° تقع في الربع

- ① الأول ② الثاني ③ الثالث ④ الرابع

٩) في الشكل المقابل :

\overline{AB} مماسة للدائرة M ، $\angle B = 6^\circ$ سم

، $\angle C = 2.5^\circ$ سم

فإن : $\angle A = \dots$ سم.



- ① 9° ② 4° ③ 2.5° ④ 6°

١٠) أوجد الحل العام للمعادلة : $\sin 2\theta = \sin \theta$

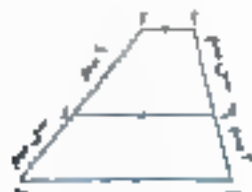
ثم أوجد قيم θ : $\theta \in [0, \pi]$

١١) في الشكل المقابل :

سم = \dots

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$ ④ 18





١٢ في الشكل المقابل :

أ- قطعة مماسة لل دائرة الوحدة

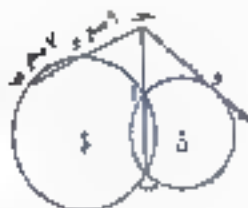
فاين : $\theta =$

- ☐ أ- $\frac{\pi}{4}$ ☐ ب- $\frac{\pi}{6}$
☐ ج- $\frac{\pi}{3}$ ☐ د- $\frac{\pi}{2}$

١٣ الدالة $f(x) = 2 - x$ تكون غير سالبة عندما $x \in$

- ☐ أ- $[-2, \infty)$ ☐ ب- $[-2, \infty)$
☐ ج- $[-2, \infty)$ ☐ د- $[-2, \infty)$

١٤ في الشكل المقابل :



داورتان P و O ن تقاطعتان في A و B حيث $OP = 5$

أ- رسم AB تقطع الدائرة P في C و D

حيث $CD = 6$ سم و $OP = 4$ سم

و رسم AB يمس الدائرة O عند E

١ أثبت أن $\angle AOP = \angle BOP$

٢ إذا كان $\theta = 60^\circ$ سم أوجد طول كل من AB و CD

١٥ القياس الستيني لزاوية محيطية تنصير قوساً طوله 8π سم في دائرة طول نصف

قطرها 16 سم يساوي

- ☐ أ- 60° ☐ ب- 30° ☐ ج- 90° ☐ د- 120°



١٦ في الشكل المقابل :

إذا كان $\theta = 60^\circ$ سم وكان $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$

فاين : $\theta =$

- ☐ أ- 2 ☐ ب- 3 ☐ ج- 4 ☐ د- 5

١٧) استخرج مثلث ليه: $\widehat{A} = 8^\circ$ سم ، $\widehat{B} = 4^\circ$ سم ، $\widehat{C} = 3^\circ$ سم ، $\widehat{D} = 2^\circ$ سم ، $\widehat{E} = 1^\circ$ سم
حيث $\widehat{D} = 2^\circ$ سم أثبت أن: \widehat{A} تقع الدائرة الخارجة بالنقطه \widehat{D} و \widehat{E}

١٨) إذا كانت الدائرة \widehat{C} (مركزه) \widehat{A} خارج عن حيث $\widehat{A} < 90^\circ$: دالة دورية ونورتها $\frac{\pi}{4}$
وبدأها $[-1, 1]$ فإن: $\frac{1}{2} = \dots\dots\dots$

- ١) $\frac{1}{4}$ ٢) $\frac{1}{2}$ ٣) $-\frac{1}{4}$ ٤) $\frac{1}{2}$



١٩) في الشكل المقابل:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$$

فإن: $x = \dots\dots\dots$ سم.

- ١) ٦ ٢) ١١ ٣) ١٥ ٤) ١٢

٢٠) إذا كان: \widehat{A} استخرج \widehat{B} و \widehat{C} و \widehat{D} : $\widehat{A} = 90^\circ$: $\widehat{B} = 120^\circ$: $\widehat{C} = 180^\circ$: $\widehat{D} = 270^\circ$
فإن: $\widehat{D} = (\dots\dots\dots)$

- ١) 180° ٢) 270° ٣) 100° ٤) 120°

٢١) استخرج مثلث ليه: $\widehat{A} = 8^\circ$ سم ، $\widehat{B} = 4^\circ$ سم ، $\widehat{C} = 3^\circ$ سم ، $\widehat{D} = 2^\circ$ سم ، $\widehat{E} = 1^\circ$ سم
رسم \widehat{A} ينصف \widehat{B} و \widehat{C} ويقطع \widehat{D} في \widehat{E} أوجد: طول كل من \widehat{D} و \widehat{E}

٢٢) في الشكل المقابل:

\widehat{A} ينصف \widehat{B} و \widehat{C} و \widehat{D} ينصف \widehat{E} و \widehat{F}

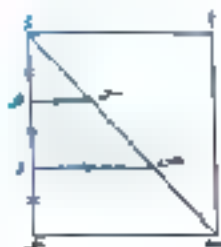
$\widehat{A} = 8^\circ$ سم ، $\widehat{B} = 4^\circ$ سم ، $\widehat{C} = 3^\circ$ سم ، $\widehat{D} = 2^\circ$ سم ، $\widehat{E} = 1^\circ$ سم

فإن: $\widehat{D} = \dots\dots\dots$ سم.



- ١) ٢ ٢) ٣ ٣) ٢.٥ ٤) ١

٢٣ في الشكل المقابل :



أ. مساحة مربع طول ضلعه ٤ سم

ب. $4 = 4 = 4$ و $4 = 4$

ج. فإن : مساحة (الشكل من ص و هـ) = سم^٢

١ (أ) ٦ (ب)

١٠ (ج) ١٢ (د)

٢٤ إذا كان : ل ١ م فما جذري المعادلة التربيعية : $x^2 + 1 = 0$

فإن : ل ١ م $+ 1 = 0$ =

٢- (أ) ٢- (ب) ٢ (ج) ٢.٦٨ (د)

٢٥ إذا كان : Δ أ. مساحة قائم الزاوية في ح ١ ح ٢ ح ٣ = ١ أوجد قيمة : ح ٥

٢٦ إذا كان أحد جذري المعادلة : $(x + 1)(x - 2) = 0$ معكوساً لـ جميعاً للآخر

فإن : لـ =

٦ (أ) ٦- (ب) ٢- (ج) ٢ (د) ٩

٢٧ إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 1 > 0$ ح ١ ح ٢ ح ٣ ح ٤

فإن : ح =

١- (أ) ١- (ب) ٢- (ج) ٢ (د) ٥

٢٨ كون لمعادلة التربيعية التي جذورها :

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١ إذا كان بُعد نقطة P عن مركز دائرة يساوي 24 سم ، وقوة هذه النقطة بالنسبة للدائرة تساوي 176 فأوجد : طول نصف قطر الدائرة.

٢ في الشكل المقابل :



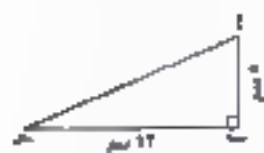
إننا كان : $\overline{AB} // \overline{CD}$

مساحة $\triangle ABC = 27$

فإن : مساحة شبه المثلث ABC هو

- ① $\frac{72}{25}$ ② $\frac{9}{8}$
 ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{3}{25}$

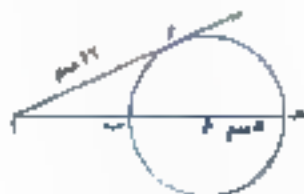
٣ في الشكل المقابل :



ما $\left(\frac{8}{17} \right)^{-1}$ =

- ① $\frac{17}{8}$ ② $\frac{8}{17}$
 ③ $\frac{17}{13}$ ④ $\frac{13}{17}$

٤ في الشكل المقابل :



الدائرة M طول نصف قطرها 8 سم

\overline{AP} مماس لها عند P ، $AP = 12$ سم

أوجد : طول \overline{AO}

٥ إذا كان : L د م فما جزأ المعادلة : $3L + 2 - 5 = 1$ صغر

فإن : $L =$

- ① 2 ② -3 ③ 1 ④ -1

٢١ مجموعة حل المعادلة : $x^2 + 9 = 0$ هي $x = \dots$

- ☐ ١ $\{ -3 \}$
☐ ٢ $\{ 3 \}$
☐ ٣ $\{ -3, 3 \}$
☐ ٤ \emptyset

٢٢ إذا كان M هو مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 2 \leq 0$ وكان N هو مجموعة

حل المتباينة $x^2 + 3 \geq 0$ فإن : $M \cap N = \dots$

- ☐ ١ $[2, 3]$
☐ ٢ $[-2, 2]$
☐ ٣ $[-1, 1]$
☐ ٤ $[-1, 1] \cup [-2, -1] \cup [1, 2]$

٢٣ دائرة طول نصف قطرها 8 سم أوجد : طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي 60°

٢٤ في الشكل المقابل :



إذا كان $AE = 4$ سم //

$DE = 6$ سم $AD = 3$ سم

وكان : $2 - 2 = 2$ سم $2 - 2 = 2$ سم $2 - 2 = 2$ سم

وكان : $10 = 10$ سم فإن : $DE = \dots$ سم

- ☐ ١ ٣
 ☐ ٢ ٤
 ☐ ٣ ٦
 ☐ ٤ ٨

٢٥ الزاوية التي قياسها 80° تكافئ في الموضع القياسي الزاوية التي قياسها \dots

- ☐ ١ $\pi \frac{1}{2}$
☐ ٢ $\pi \frac{2}{3}$
☐ ٣ $\pi \frac{4}{3}$
☐ ٤ $\pi \frac{5}{6}$

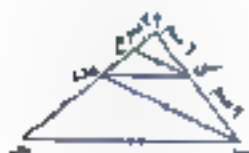
٢٦ إذا كان : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وكان $AB = 2$ سم $BC = 3$ سم

فإن : $\frac{(BC \text{ من } \Delta)}{(AB \text{ من } \Delta)} = \dots$

- ☐ ١ $\frac{1}{2}$
☐ ٢ $\frac{1}{3}$
☐ ٣ $\frac{1}{4}$
☐ ٤ $\frac{1}{5}$



في الشكل المقابل :

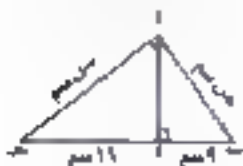


سورض // سجد // سس خ // ساهس

و ۱۰ جن = ۶ سم ، ۱۱ سم = ۵ ص ، ۱۲ سم = ۴ خ ، ۱۳ سم = ۳ سم

أَوَّلُ دُخُولِ كُلِّ مَنْ عَمِلَ بِهِ هُنَا

في الشكل المقابل:



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

④

7/8" Ø

④

الحالة $s = 0$ ما $\left(s + \frac{\pi}{2}\right)$ يتلخّ الكس قبة لها عند $s = \dots$

$\frac{\pi}{2} \otimes$

$\frac{\pi}{4} \odot$



٥٠٠ - حضرت

إذا كان l, m هما جذورا المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$

١) كون المعادلة التي جذراها : $\frac{1}{m}$ ، $\frac{1}{n}$

(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار: $\{ (1 + 3 + 4) \}$

(إشارة إلى (ψ) = ψ - ψ تكون عالية عندما ...)

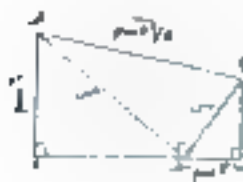
$$4 - 4.5 = -0.5$$

4 → 5 → 6 → 7

• $\leftarrow \rightarrow \oplus$

• ۱-۲

و الشكل المرفق :



$$f = \dots = f_0 + f_1$$

45 (1)

10 (4)

WA (+)

77 (4)

١٨) إذا كان \widehat{AB} معابنا الدائرة عند S ، \widehat{AC} يقطع الدائرة في D حيث $\widehat{CD} = 2\widehat{AD}$:

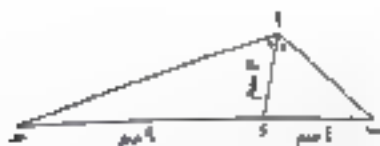
$\widehat{AC} = 3$ سم ، $\widehat{AD} = 6$ سم ، فإن $\widehat{CD} = \dots\dots\dots$ سم .

- ١٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٥

١٩) إذا كان : $\theta = \frac{1}{2}$ حيث $40^\circ > \theta > 180^\circ$

أوجد قيمة : $\widehat{CA} (180^\circ - \theta) + \widehat{AB} (\theta - 260^\circ) + \widehat{BC} (2 - \theta - 270^\circ)$

٢٠) في الشكل المقابل :



$\widehat{AC} = 4$ سم ، $\widehat{AB} = 5$ سم ، $\widehat{BC} = 6$ سم

- ٣٦ (ب) ٤٥ (ج) ١٢ (د) ٢٧

٢١) في الدائرة م إذا تقاطعت وتران \widehat{AB} و \widehat{CD} في نقطة E ، فإن :

(أ) $\widehat{AE} \times \widehat{CE} = \widehat{BE} \times \widehat{DE}$ (ب) $\widehat{AE} \times \widehat{BE} = \widehat{CE} \times \widehat{DE}$

(ج) $\widehat{AE} \times \widehat{DE} = \widehat{BE} \times \widehat{CE}$ (د) $\widehat{AE} \times \widehat{CE} = \widehat{BE} \times \widehat{DE}$

٢٢) إذا كان : $\frac{12 + 12}{\alpha + \beta} = \alpha$ و $\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = \beta$ أوجد : $\alpha + \beta$

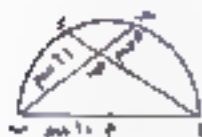
٢٣) إذا كانت : $\widehat{CA} (180^\circ - \theta) = \widehat{AB} (\theta - 260^\circ)$ ، فإن : $\widehat{BC} (\theta - 270^\circ) = \dots\dots\dots$ حيث $\theta = 2$

قياس زاوية حادة.

- ١ (ب) ١ (ج) ١ (د) $\frac{1}{4}$

٢٤) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو 61° فإن قياسها الدرجي هو

- ١٠٠ (ب) ١٠٠ (ج) ١٠٠ (د) $\frac{9}{10}$



نصف دائرة (م) طول نصف قطرها = ١٠ سم

أين : هـ = سم

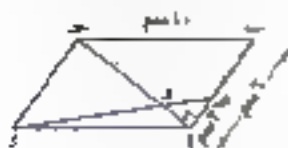
٥٩
١٣

٥٧
١٧

٥٥
١٣

٥١
١٣

في الشكل المقابل :



أب حـ متوازي أضلاع فيه :

أب = ٦ سم ، بـ حـ = ١٠ سم

و (دب حـ) = ٩٠° ، هـ عـ = ٤ سم

بحـ : أ هـ = ٢ سم ، وهـ تقطع أـ حـ في و

البت أن : أ و هـ متساوي الساقين.

إن كان جنوبي المعادلة : $٢س + ٣س + ٤س = ٥$ متساويان في المقادير ومنطقان

في الإشارة فلان =

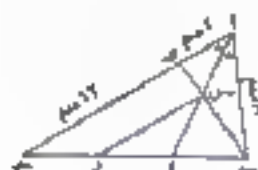
١
٤

٢
٥

٣
٦

٤
٧

في الشكل المقابل :



$\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{DE}$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{DE}$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{DE}$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{DE}$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{DE}$



النموذج السادس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان جذر المعادلة : $x^2 - 12x + c = 0$ حقيقيين متساويين

فإن : $c = \dots$

١٦ د

٩ ح

٤ ب

٢ ١



٢٤ ب

٨ د

٢ في الشكل المقابل :

$\dots = \dots$

٢٥ ١

٥ ح

٣ مجموعة حل المعادلة : $(x+1)^2 = 0$ صفر في x هي

٥ د

{١، -١} ح

{١} ب

{-١} ١

٤ إذا كان : $(2t + 2) + (t - 1) = 3t + 1$ فإن

فما قيمتي : s و t (حيث : $t = 1$) ؟

٥ إذا كان $s^2 - 1 = 0$ و $s > 0$ في المعادلة : $s^2 + s + c = 0$

فإن مجموعة حل المعادلة : $s^2 + s + c = 0$ حيث s سالبي هي

٢ د

٢ ح

٥ ب

٢ ١

٦ جميع تكون متشابهة.

المستطيلات ب

المثلثات ١

المربعات د

متوازيات الأضلاع ح

٧ في الشكل المقابل :



٢) $PC = \dots\dots\dots$ سم

- أ) $2\sqrt{5}$ - ب) $2\sqrt{2}$ - ج) $2\sqrt{3}$ - د) $2\sqrt{4}$

- ١) ٦٥ - ٢) ٤٠

٨ في الشكل المقابل :



١) $PC = \dots\dots\dots$ سم

أوجد : ١) طول PC

٢) قوة النقطة P بالنسبة لل دائرة.

٩ في الشكل المقابل :



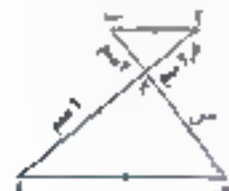
يشترج بشمول بزاوية قياسها 60°

فإذا كان طول نصف قطر الشدول ١٢ سم

فإن طول المسار الدائري الذي يقطعه الشدول يساوي

- أ) 2π سم - ب) 4π سم - ج) 6π سم - د) 8π سم

١٠ في الشكل المقابل :

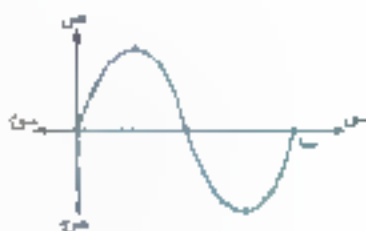


س $PC = \dots\dots\dots$ سم

- أ) ٢, ٦ - ب) ٤ - ج) ٤, ٨ - د) ٤, ٢

١١ أوجد إحدى قيم θ حيث $90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$ التي تحقق :

$$(\theta + 20^\circ) = (\theta + 20^\circ)$$



الشكل المقابل يمثل:

ص - ٣ ما $\frac{1}{3}$ ص

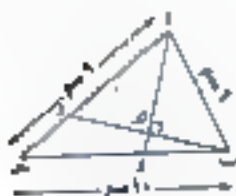
فإن الإحداثي السيني لنقطة م هو

- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) π
(ج) $\pi/2$ (د) $\pi/4$

١٢) إذا (ص - ٣) = صفر) =

- (أ) ١ (ب) -١ (ج) غير معرفة. (د) صفر

١٣) في الشكل المقابل:



أوجد مثلث فيه: $AB = 6$ سم، $AC = 4$ سم، $BC = 8$ سم

و $DE \parallel BC$ حيث $DE = 2$ سم

و رسم $DE \perp AC$ ويقطع AC في F و

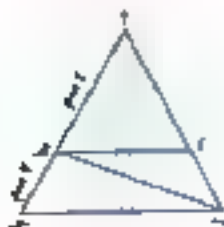
على الترتيب

- (أ) أثبت أن: AF ينصف BC (ب) أوجد AF (ج) ΔABC : ΔAFE (د) ΔABC : ΔAFE

١٤) الزاوية التي قياسها (١٢٠°) تقع في الزوايا:

- (أ) الأولى (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

١٥) في الشكل المقابل:

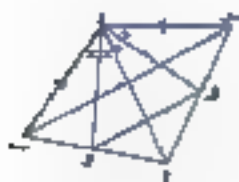


إذا كان: $DE \parallel BC$

وتكلفت مساحة ΔABC = ٩ سم^٢

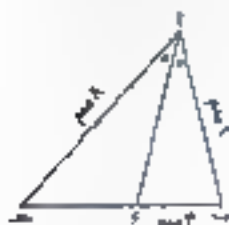
فإن مساحة ΔADE = سم^٢

- (أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٨ (د) ٢٧



١٧ في الشكل المقابل :

أثبت أن : $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



١٨ في الشكل المقابل :

أع و نصف \overline{AB} ، $AC = 6$ سم

، $AD = 4$ سم ، $DE = 3$ سم

فإن : $BC = \dots$ سم

أ ٨

ب ٦

ج ٥

د ٤



١٩ في الشكل المقابل :

وحد = \dots سم

أ ١٠

ب ٩

ج ١٢

د ١١

٢٠ إذا كان : a, b, c أعداد صحيحة ، $a + b + c = 0$ ، $a \neq 0$

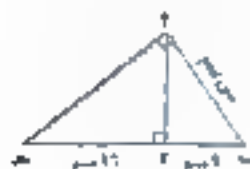
فإن جذري المعادلة : $(a + b - c)x^2 + (b - c)x + (a + b - c) = 0$

أ حقيقيان متساويان.

ب حقيقيان مختلفان متساويان.

ج غير حقيقيين.

د حقيقيان مختلفان غير متساويين.



٢١ في الشكل المقابل :

س = \dots

أ ١٢

ب ٩

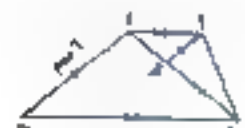
ج ١٥

د ٢٠

٢٢ إذا كانت الزاوية التي قياسها θ والمرسومة في الوضع القياسي ضلعاها النهائي يقطع

دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

فأوجد قيمة المقدار : $\sin(\theta - \pi/2) + \cos(\theta - \pi/4)$



٢٣ في الشكل المقابل ،

إذا كان : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ هو

فإن : $\cos \theta = \dots$ سم

١ (أ)

٢ (ب)

٣ (ج)

٤ (د)

٢٤ إشارة الدالة $y = \sin(x)$ هي تكون سالبة في الفترة

١ (أ) $[\pi, 2\pi]$

٢ (ب) $[\pi, 2\pi]$

٣ (ج) $[\pi, 2\pi]$

٤ (د) $[\pi, 2\pi]$



٢٥ في الشكل المقابل ،

إذا كان : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ حدد $\cos \theta$

أثبت أن : ΔABC - ΔDEF

٢٦ إذا كانت : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $\theta = \dots$

١ (أ) 30°

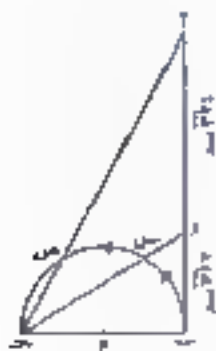
٢ (ب) 45°

٣ (ج) 60°

٤ (د) 90°



في الشكل المقابل :



جد \widehat{A} مماس للدائرة م عند س

$\widehat{C} = (\widehat{BDS}) = \widehat{C} = (\widehat{BAC})$

$\widehat{C} = \widehat{B} = 30^\circ$ ، $\widehat{A} = 60^\circ$ سم

فإن : $\widehat{A} = 60^\circ$ سم

أ 60°

ب 90°

إذا كان : $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ فما جذرا المعادلة : $3x^2 - 12x + 9 = 0$ صفر

فكون المعادلة التي جذورها : $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم = $180^\circ (n-2)$ حيث n عدد الأضلاع فإن قياس زاوية السداسي المنتظم بالقياس الدائري =

أ $\frac{\pi}{3}$

ب $\frac{\pi}{4}$

ج $\frac{\pi}{2}$

د $\frac{\pi}{6}$

٢ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع

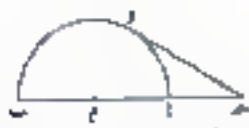
أ الأول

ب الثاني

ج الثالث

د الرابع

٣ في الشكل المقابل :



حرف θ تحس نصف الدائرة θ في 5

إذا كانت : 6 حـ $= 9$ ب $= 6$ سم فإن : حـ =

أ $3\sqrt{2}$

ب $2\sqrt{2}$

ج 3

د 6

٤ في الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان عن الداخل في A

فإن : حـ = 5 سم

أ 2

ب 3

ج 4

د 5

٥ في الشكل المقابل :

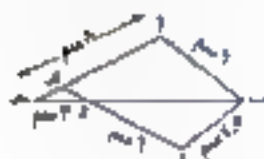


أ قوس في دائرة مركزها O

طول نصف قطرها 10 سم ، $AB = 16$ سم

أوجد : θ بالقياس الدائري ثم أوجد : طول القوس θ

في الشكل المقابل :



أب = ٦ سم وسم د = سم ١٢ سم ،

ج د = ٨ سم ، و د ج = ٢ سم

و س ا = ٤ ، و س ب = ٦ سم

أثبت أن : ① Δ ج د ب ~ Δ ب د ا

② Δ ه و د متساوي الساقين.

٧ إذا كان : $\sqrt{2} - \theta$ ، $\frac{\pi}{4} > \theta > \pi$ ، فإن : $\theta =$

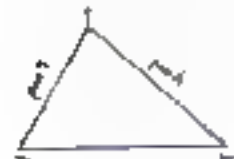
① $\frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{2}$

③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{3}$

٨ في الشكل المقابل :



إذا كان : ب (د) = ٢ (د) س

فإن : س د =

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ ١٠

④ $\sqrt{2}$

⑤ ١٢

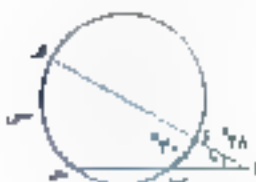
٩ إذا كان : $\theta = ٥٠^\circ$ ، $\theta = ٢٠^\circ$ ، $\theta = ٦٠^\circ$ ، فإن : $\theta > ٦٠^\circ$ ، حيث : $\theta > ٦٠^\circ$

فأوجد : θ

١٠ إذا كان ل ه م فما جذرا المعادلة : $٤س^٢ + ٤س - ١٢ = ٠$

فكّن المعادلة التربيعية التي جذورها : ل + م ، ل م

١١ في الشكل المقابل :



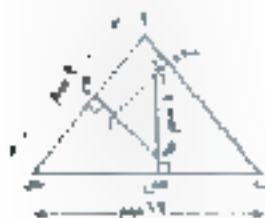
① ٦٠°

② ٨٠°

③ ٦٠°

④ ٨٠°

١٢ في الشكل المقابل :



- إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AD} = 12$ سم ، $\overline{BD} = 16$ سم ، $\overline{DC} = 9$ سم
 فإن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ؟
 (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

١٣ أي مما يأتي تحليل المقادير : $س^2 + ١$

- (أ) $(س - ١)(س + ١)$ (ب) $(س + ٢)(س - ٢)$
 (ج) $(س - ٢)(س + ٢)$ (د) $(س + ٢)(س - ٢)$

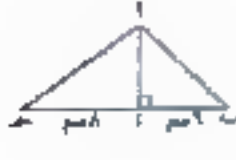
١٤ في الشكل المقابل :



- إذا كانت مساحة (الشكل و هـ) = ٤٠ سم^٢
 ، مساحة (الشكل و هـ ب ج) = ٢٢ سم^٢
 ومساحة (أ ب ج) = ٤ سم^٢
 فإن مساحة (أ ب ج) = سم^٢
 (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

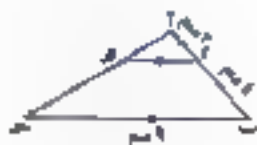
١٥ عين إشارة الدالة : د (س) = $س^2 - س + ١٢$ ومن ذلك عين في ج
 مجموعة حل المتباينة : $س^2 + ١٢ < س$ موضحةً العمل على خط الأعداد.

١٦ في الشكل المقابل :



- أ ب مناح = ١٢ مناح = سم
 (أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١١ (د) ١٢

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت : مساحة $\triangle S = 9$ سم² = A سم²

فإن مساحة الشكل $S = 6$ سم² = سم²

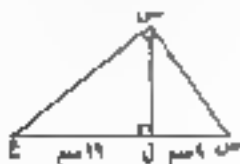
١٦ (د)

٢٤ (ج)

٦٤ (ب)

٢٧ (أ)

١٨ في الشكل المقابل :



س ل = سم.

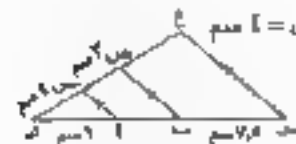
١٢ (ب)

٧ (أ)

١٤٤ (د)

٢٠ (ج)

١٩ في الشكل المقابل :



أ س // ب ع // ج د ، د ٦ = أ ع ، د ٦ = ب س = ٤ سم

س س = ٢ سم ، س د = ٧ سم ، د ٦ = ٤ سم

أوجد طول كل من أ ب ، ع ص

٢٠ الدالة r : د (س) = ٢ س موجبة في

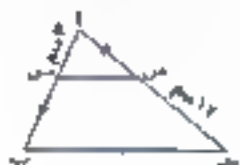
{٠} - \mathbb{R} (د)

\mathbb{R} (ج)

$+\mathbb{R}$ (ب)

\mathbb{R} (أ)

٢١ في الشكل المقابل :



أ د = سم.

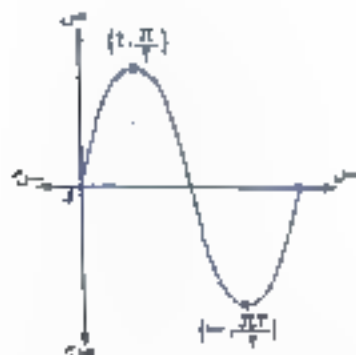
١٦ (ب)

١٥ (أ)

٢٠ (د)

١٨ (ج)

الشكل المقابل :

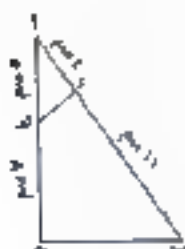


يوضح المنحنى $y = \sin x$

فإن : $|\sin x| + |\cos x| = \dots$

- ١ (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د)

في الشكل المقابل :



مساحة مثلث $\triangle ABC = 6$ سم

مساحة $\triangle ABC = 11$ سم

مساحة $\triangle ABC = 7$ سم

أثبت أن : الشكل $\triangle ABC$ مساحة رياضي دائري.

حاصل ضرب جذور المعادلات :

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ يساوي

- ١ (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د)

إذا كان : $x^2 + 3x + 2 = 0$ فإن : $x^2 + 4x + 3 = 0$ يساوي

- ٢ (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د)

إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ حقيقيين مختلفين

فإن : \exists

- ١ (أ) $[-1, \infty)$ ٢ (ب) $(-\infty, 1]$ ٣ (ج) $[-1, \infty)$ ٤ (د) $\{1\}$



التمرين الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) أي مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟



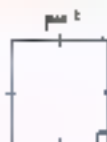
(١)



(٢)



(٣)



(٤)

أ) المضلعان (١) و (٣)

١) المضلعان (١) و (٤)

د) المضلعان (٢) و (٤)

ج) المضلعان (٣) و (٤)

٢) إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجبة $(90^\circ - \theta)$ في الوضع القياسي يقطع دائرة

الوحدة في النقطة $(\frac{7}{10}, \frac{2}{10})$ ، فإن : ما $(\theta - 90^\circ) = \dots\dots\dots$

أ) $\frac{1}{5}$

ب) $\frac{4}{5}$

ج) $\frac{2}{5}$

د) $\frac{3}{5}$

٣) البالة : د (س) = $2 - \varepsilon$ س تكون غير موجبة إذا كانت

أ) $س \geq 2$

ب) $س \leq 2$

ج) $س > 2$

د) $س < 2$

٤) أ ب ح د مستطيل فيه : $ا = ب = 6$ سم ، $ب = ح = 8$ سم

، ورسم $ب د$ \perp $ا ح$ فقاطع $ا ح$ في $هـ$ ، $ا ع$ في $و$

١) أثبت أن : $(ا ب)^2 = (ا و) \cdot (ا ع)$

٢) أوجد : طول $ا د$

٥) قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوسًا طوله π سم في دائرة طول قطرها ٨ سم

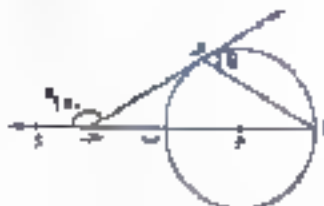
يساوي

أ) $\pi \cdot 2$

ب) $\frac{\pi \cdot 2}{2}$

ج) $\frac{\pi}{2}$

د) $\frac{\pi}{8}$



٦ في الشكل المقابل :

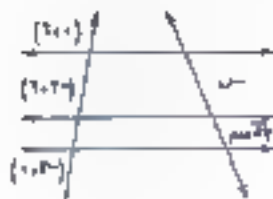
إذا كان : \overline{PA} مماس للدائرة

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

- ☐ أ ٥٠
☐ ب ٦٠
☐ ج ٤٠
☐ د ٣٠

٧ المعادلة التربيعية التي معادلات حدودها أعداد حقيقية واحد جذورها $(2 - 3)$ هي

- ☐ أ $x^2 - 6x + 10 = 0$
☐ ب $x^2 - 2x + 6 + 10 = 0$
☐ ج $x^2 - 6x - 10 = 0$
☐ د $x^2 - 2x + 6 - 10 = 0$



٨ في الشكل المقابل :

سم $\overline{m} = \dots\dots\dots$

- ☐ أ $2\sqrt{5}$
☐ ب $2\sqrt{2}$
☐ ج $2\sqrt{3}$
☐ د $4\sqrt{2}$

٩ إذا كان : $\theta = \frac{\pi}{8}$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن : $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

- ☐ أ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
☐ ب $\frac{2}{\pi}$
☐ ج $\frac{\pi}{2}$
☐ د $\frac{1}{2}$



١٠ في الشكل المقابل :

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

أثبت أن : الشكل $\triangle ABC$ هو مثلث قائم.

وإذا كان : $AD = 2$ سم و $AB = 4$ سم

فما هو طول DE ؟

١١) الدالة g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (g) = $g(x)$ دالة دورية ودورتها $\frac{\pi \sqrt{2}}{4}$ فإن : $g = \dots$

- ☐ أ) $\frac{1}{4}$ ☐ ب) $\frac{1}{2}$ ☒ ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ د) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$



١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$

فإن : $\frac{EF}{BC} = \frac{12}{25}$ ، $\frac{FD}{BC} = \frac{12}{25}$ ، $\frac{DE}{BC} = \frac{12}{25}$

- ☐ أ) $\frac{12}{25}$ ☐ ب) $\frac{12}{25}$ ☐ ج) $\frac{12}{25}$ ☐ د) $\frac{12}{25}$

١٣) إذا كان : $2 + 3 = 5$ ، $3 + 4 = 7$ ، $4 + 5 = 9$ ، $5 + 6 = 11$ ، $6 + 7 = 13$ ، $7 + 8 = 15$ ، $8 + 9 = 17$ ، $9 + 10 = 19$ ، $10 + 11 = 21$ ، $11 + 12 = 23$ ، $12 + 13 = 25$ ، $13 + 14 = 27$ ، $14 + 15 = 29$ ، $15 + 16 = 31$ ، $16 + 17 = 33$ ، $17 + 18 = 35$ ، $18 + 19 = 37$ ، $19 + 20 = 39$ ، $20 + 21 = 41$ ، $21 + 22 = 43$ ، $22 + 23 = 45$ ، $23 + 24 = 47$ ، $24 + 25 = 49$ ، $25 + 26 = 51$ ، $26 + 27 = 53$ ، $27 + 28 = 55$ ، $28 + 29 = 57$ ، $29 + 30 = 59$ ، $30 + 31 = 61$ ، $31 + 32 = 63$ ، $32 + 33 = 65$ ، $33 + 34 = 67$ ، $34 + 35 = 69$ ، $35 + 36 = 71$ ، $36 + 37 = 73$ ، $37 + 38 = 75$ ، $38 + 39 = 77$ ، $39 + 40 = 79$ ، $40 + 41 = 81$ ، $41 + 42 = 83$ ، $42 + 43 = 85$ ، $43 + 44 = 87$ ، $44 + 45 = 89$ ، $45 + 46 = 91$ ، $46 + 47 = 93$ ، $47 + 48 = 95$ ، $48 + 49 = 97$ ، $49 + 50 = 99$ ، $50 + 51 = 101$ ، $51 + 52 = 103$ ، $52 + 53 = 105$ ، $53 + 54 = 107$ ، $54 + 55 = 109$ ، $55 + 56 = 111$ ، $56 + 57 = 113$ ، $57 + 58 = 115$ ، $58 + 59 = 117$ ، $59 + 60 = 119$ ، $60 + 61 = 121$ ، $61 + 62 = 123$ ، $62 + 63 = 125$ ، $63 + 64 = 127$ ، $64 + 65 = 129$ ، $65 + 66 = 131$ ، $66 + 67 = 133$ ، $67 + 68 = 135$ ، $68 + 69 = 137$ ، $69 + 70 = 139$ ، $70 + 71 = 141$ ، $71 + 72 = 143$ ، $72 + 73 = 145$ ، $73 + 74 = 147$ ، $74 + 75 = 149$ ، $75 + 76 = 151$ ، $76 + 77 = 153$ ، $77 + 78 = 155$ ، $78 + 79 = 157$ ، $79 + 80 = 159$ ، $80 + 81 = 161$ ، $81 + 82 = 163$ ، $82 + 83 = 165$ ، $83 + 84 = 167$ ، $84 + 85 = 169$ ، $85 + 86 = 171$ ، $86 + 87 = 173$ ، $87 + 88 = 175$ ، $88 + 89 = 177$ ، $89 + 90 = 179$ ، $90 + 91 = 181$ ، $91 + 92 = 183$ ، $92 + 93 = 185$ ، $93 + 94 = 187$ ، $94 + 95 = 189$ ، $95 + 96 = 191$ ، $96 + 97 = 193$ ، $97 + 98 = 195$ ، $98 + 99 = 197$ ، $99 + 100 = 199$ ، $100 + 101 = 201$ ، $101 + 102 = 203$ ، $102 + 103 = 205$ ، $103 + 104 = 207$ ، $104 + 105 = 209$ ، $105 + 106 = 211$ ، $106 + 107 = 213$ ، $107 + 108 = 215$ ، $108 + 109 = 217$ ، $109 + 110 = 219$ ، $110 + 111 = 221$ ، $111 + 112 = 223$ ، $112 + 113 = 225$ ، $113 + 114 = 227$ ، $114 + 115 = 229$ ، $115 + 116 = 231$ ، $116 + 117 = 233$ ، $117 + 118 = 235$ ، $118 + 119 = 237$ ، $119 + 120 = 239$ ، $120 + 121 = 241$ ، $121 + 122 = 243$ ، $122 + 123 = 245$ ، $123 + 124 = 247$ ، $124 + 125 = 249$ ، $125 + 126 = 251$ ، $126 + 127 = 253$ ، $127 + 128 = 255$ ، $128 + 129 = 257$ ، $129 + 130 = 259$ ، $130 + 131 = 261$ ، $131 + 132 = 263$ ، $132 + 133 = 265$ ، $133 + 134 = 267$ ، $134 + 135 = 269$ ، $135 + 136 = 271$ ، $136 + 137 = 273$ ، $137 + 138 = 275$ ، $138 + 139 = 277$ ، $139 + 140 = 279$ ، $140 + 141 = 281$ ، $141 + 142 = 283$ ، $142 + 143 = 285$ ، $143 + 144 = 287$ ، $144 + 145 = 289$ ، $145 + 146 = 291$ ، $146 + 147 = 293$ ، $147 + 148 = 295$ ، $148 + 149 = 297$ ، $149 + 150 = 299$ ، $150 + 151 = 301$ ، $151 + 152 = 303$ ، $152 + 153 = 305$ ، $153 + 154 = 307$ ، $154 + 155 = 309$ ، $155 + 156 = 311$ ، $156 + 157 = 313$ ، $157 + 158 = 315$ ، $158 + 159 = 317$ ، $159 + 160 = 319$ ، $160 + 161 = 321$ ، $161 + 162 = 323$ ، $162 + 163 = 325$ ، $163 + 164 = 327$ ، $164 + 165 = 329$ ، $165 + 166 = 331$ ، $166 + 167 = 333$ ، $167 + 168 = 335$ ، $168 + 169 = 337$ ، $169 + 170 = 339$ ، $170 + 171 = 341$ ، $171 + 172 = 343$ ، $172 + 173 = 345$ ، $173 + 174 = 347$ ، $174 + 175 = 349$ ، $175 + 176 = 351$ ، $176 + 177 = 353$ ، $177 + 178 = 355$ ، $178 + 179 = 357$ ، $179 + 180 = 359$ ، $180 + 181 = 361$ ، $181 + 182 = 363$ ، $182 + 183 = 365$ ، $183 + 184 = 367$ ، $184 + 185 = 369$ ، $185 + 186 = 371$ ، $186 + 187 = 373$ ، $187 + 188 = 375$ ، $188 + 189 = 377$ ، $189 + 190 = 379$ ، $190 + 191 = 381$ ، $191 + 192 = 383$ ، $192 + 193 = 385$ ، $193 + 194 = 387$ ، $194 + 195 = 389$ ، $195 + 196 = 391$ ، $196 + 197 = 393$ ، $197 + 198 = 395$ ، $198 + 199 = 397$ ، $199 + 200 = 399$ ، $200 + 201 = 401$ ، $201 + 202 = 403$ ، $202 + 203 = 405$ ، $203 + 204 = 407$ ، $204 + 205 = 409$ ، $205 + 206 = 411$ ، $206 + 207 = 413$ ، $207 + 208 = 415$ ، $208 + 209 = 417$ ، $209 + 210 = 419$ ، $210 + 211 = 421$ ، $211 + 212 = 423$ ، $212 + 213 = 425$ ، $213 + 214 = 427$ ، $214 + 215 = 429$ ، $215 + 216 = 431$ ، $216 + 217 = 433$ ، $217 + 218 = 435$ ، $218 + 219 = 437$ ، $219 + 220 = 439$ ، $220 + 221 = 441$ ، $221 + 222 = 443$ ، $222 + 223 = 445$ ، $223 + 224 = 447$ ، $224 + 225 = 449$ ، $225 + 226 = 451$ ، $226 + 227 = 453$ ، $227 + 228 = 455$ ، $228 + 229 = 457$ ، $229 + 230 = 459$ ، $230 + 231 = 461$ ، $231 + 232 = 463$ ، $232 + 233 = 465$ ، $233 + 234 = 467$ ، $234 + 235 = 469$ ، $235 + 236 = 471$ ، $236 + 237 = 473$ ، $237 + 238 = 475$ ، $238 + 239 = 477$ ، $239 + 240 = 479$ ، $240 + 241 = 481$ ، $241 + 242 = 483$ ، $242 + 243 = 485$ ، $243 + 244 = 487$ ، $244 + 245 = 489$ ، $245 + 246 = 491$ ، $246 + 247 = 493$ ، $247 + 248 = 495$ ، $248 + 249 = 497$ ، $249 + 250 = 499$ ، $250 + 251 = 501$ ، $251 + 252 = 503$ ، $252 + 253 = 505$ ، $253 + 254 = 507$ ، $254 + 255 = 509$ ، $255 + 256 = 511$ ، $256 + 257 = 513$ ، $257 + 258 = 515$ ، $258 + 259 = 517$ ، $259 + 260 = 519$ ، $260 + 261 = 521$ ، $261 + 262 = 523$ ، $262 + 263 = 525$ ، $263 + 264 = 527$ ، $264 + 265 = 529$ ، $265 + 266 = 531$ ، $266 + 267 = 533$ ، $267 + 268 = 535$ ، $268 + 269 = 537$ ، $269 + 270 = 539$ ، $270 + 271 = 541$ ، $271 + 272 = 543$ ، $272 + 273 = 545$ ، $273 + 274 = 547$ ، $274 + 275 = 549$ ، $275 + 276 = 551$ ، $276 + 277 = 553$ ، $277 + 278 = 555$ ، $278 + 279 = 557$ ، $279 + 280 = 559$ ، $280 + 281 = 561$ ، $281 + 282 = 563$ ، $282 + 283 = 565$ ، $283 + 284 = 567$ ، $284 + 285 = 569$ ، $285 + 286 = 571$ ، $286 + 287 = 573$ ، $287 + 288 = 575$ ، $288 + 289 = 577$ ، $289 + 290 = 579$ ، $290 + 291 = 581$ ، $291 + 292 = 583$ ، $292 + 293 = 585$ ، $293 + 294 = 587$ ، $294 + 295 = 589$ ، $295 + 296 = 591$ ، $296 + 297 = 593$ ، $297 + 298 = 595$ ، $298 + 299 = 597$ ، $299 + 300 = 599$ ، $300 + 301 = 601$ ، $301 + 302 = 603$ ، $302 + 303 = 605$ ، $303 + 304 = 607$ ، $304 + 305 = 609$ ، $305 + 306 = 611$ ، $306 + 307 = 613$ ، $307 + 308 = 615$ ، $308 + 309 = 617$ ، $309 + 310 = 619$ ، $310 + 311 = 621$ ، $311 + 312 = 623$ ، $312 + 313 = 625$ ، $313 + 314 = 627$ ، $314 + 315 = 629$ ، $315 + 316 = 631$ ، $316 + 317 = 633$ ، $317 + 318 = 635$ ، $318 + 319 = 637$ ، $319 + 320 = 639$ ، $320 + 321 = 641$ ، $321 + 322 = 643$ ، $322 + 323 = 645$ ، $323 + 324 = 647$ ، $324 + 325 = 649$ ، $325 + 326 = 651$ ، $326 + 327 = 653$ ، $327 + 328 = 655$ ، $328 + 329 = 657$ ، $329 + 330 = 659$ ، $330 + 331 = 661$ ، $331 + 332 = 663$ ، $332 + 333 = 665$ ، $333 + 334 = 667$ ، $334 + 335 = 669$ ، $335 + 336 = 671$ ، $336 + 337 = 673$ ، $337 + 338 = 675$ ، $338 + 339 = 677$ ، $339 + 340 = 679$ ، $340 + 341 = 681$ ، $341 + 342 = 683$ ، $342 + 343 = 685$ ، $343 + 344 = 687$ ، $344 + 345 = 689$ ، $345 + 346 = 691$ ، $346 + 347 = 693$ ، $347 + 348 = 695$ ، $348 + 349 = 697$ ، $349 + 350 = 699$ ، $350 + 351 = 701$ ، $351 + 352 = 703$ ، $352 + 353 = 705$ ، $353 + 354 = 707$ ، $354 + 355 = 709$ ، $355 + 356 = 711$ ، $356 + 357 = 713$ ، $357 + 358 = 715$ ، $358 + 359 = 717$ ، $359 + 360 = 719$ ، $360 + 361 = 721$ ، $361 + 362 = 723$ ، $362 + 363 = 725$ ، $363 + 364 = 727$ ، $364 + 365 = 729$ ، $365 + 366 = 731$ ، $366 + 367 = 733$ ، $367 + 368 = 735$ ، $368 + 369 = 737$ ، $369 + 370 = 739$ ، $370 + 371 = 741$ ، $371 + 372 = 743$ ، $372 + 373 = 745$ ، $373 + 374 = 747$ ، $374 + 375 = 749$ ، $375 + 376 = 751$ ، $376 + 377 = 753$ ، $377 + 378 = 755$ ، $378 + 379 = 757$ ، $379 + 380 = 759$ ، $380 + 381 = 761$ ، $381 + 382 = 763$ ، $382 + 383 = 765$ ، $383 + 384 = 767$ ، $384 + 385 = 769$ ، $385 + 386 = 771$ ، $386 + 387 = 773$ ، $387 + 388 = 775$ ، $388 + 389 = 777$ ، $389 + 390 = 779$ ، $390 + 391 = 781$ ، $391 + 392 = 783$ ، $392 + 393 = 785$ ، $393 + 394 = 787$ ، $394 + 395 = 789$ ، $395 + 396 = 791$ ، $396 + 397 = 793$ ، $397 + 398 = 795$ ، $398 + 399 = 797$ ، $399 + 400 = 799$ ، $400 + 401 = 801$ ، $401 + 402 = 803$ ، $402 + 403 = 805$ ، $403 + 404 = 807$ ، $404 + 405 = 809$ ، $405 + 406 = 811$ ، $406 + 407 = 813$ ، $407 + 408 = 815$ ، $408 + 409 = 817$ ، $409 + 410 = 819$ ، $410 + 411 = 821$ ، $411 + 412 = 823$ ، $412 + 413 = 825$ ، $413 + 414 = 827$ ، $414 + 415 = 829$ ، $415 + 416 = 831$ ، $416 + 417 = 833$ ، $417 + 418 = 835$ ، $418 + 419 = 837$ ، $419 + 420 = 839$ ، $420 + 421 = 841$ ، $421 + 422 = 843$ ، $422 + 423 = 845$ ، $423 + 424 = 847$ ، $424 + 425 = 849$ ، $425 + 426 = 851$ ، $426 + 427 = 853$ ، $427 + 428 = 855$ ، $428 + 429 = 857$ ، $429 + 430 = 859$ ، $430 + 431 = 861$ ، $431 + 432 = 863$ ، $432 + 433 = 865$ ، $433 + 434 = 867$ ، $434 + 435 = 869$ ، $435 + 436 = 871$ ، $436 + 437 = 873$ ، $437 + 438 = 875$ ، $438 + 439 = 877$ ، $439 + 440 = 879$ ، $440 + 441 = 881$ ، $441 + 442 = 883$ ، $442 + 443 = 885$ ، $443 + 444 = 887$ ، $444 + 445 = 889$ ، $445 + 446 = 891$ ، $446 + 447 = 893$ ، $447 + 448 = 895$ ، $448 + 449 = 897$ ، $449 + 450 = 899$ ، $450 + 451 = 901$ ، $451 + 452 = 903$ ، $452 + 453 = 905$ ، $453 + 454 = 907$ ، $454 + 455 = 909$ ، $455 + 456 = 911$ ، $456 + 457 = 913$ ، $457 + 458 = 915$ ، $458 + 459 = 917$ ، $459 + 460 = 919$ ، $460 + 461 = 921$ ، $461 + 462 = 923$ ، $462 + 463 = 925$ ، $463 + 464 = 927$ ، $464 + 465 = 929$ ، $465 + 466 = 931$ ، $466 + 467 = 933$ ، $467 + 468 = 935$ ، $468 + 469 = 937$ ، $469 + 470 = 939$ ، $470 + 471 = 941$ ، $471 + 472 = 943$ ، $472 + 473 = 945$ ، $473 + 474 = 947$ ، $474 + 475 = 949$ ، $475 + 476 = 951$ ، $476 + 477 = 953$ ، $477 + 478 = 955$ ، $478 + 479 = 957$ ، $479 + 480 = 959$ ، $480 + 481 = 961$ ، $481 + 482 = 963$ ، $482 + 483 = 965$ ، $483 + 484 = 967$ ، $484 + 485 = 969$ ، $485 + 486 = 971$ ، $486 + 487 = 973$ ، $487 + 488 = 975$ ، $488 + 489 = 977$ ، $489 + 490 = 979$ ، $490 + 491 = 981$ ، $491 + 492 = 983$ ، $492 + 493 = 985$ ، $493 + 494 = 987$ ، $494 + 495 = 989$ ، $495 + 496 = 991$ ، $496 + 497 = 993$ ، $497 + 498 = 995$ ، $498 + 499 = 997$ ، $499 + 500 = 999$ ، $500 + 501 = 1001$ ، $501 + 502 = 1003$ ، $502 + 503 = 1005$ ، $503 + 504 = 1007$ ، $504 + 505 = 1009$ ، $505 + 506 = 1011$ ، $506 + 507 = 1013$ ، $507 + 508 = 1015$ ، $508 + 509 = 1017$ ، $509 + 510 = 1019$ ، $510 + 511 = 1021$ ، $511 + 512 = 1023$ ، $512 + 513 = 1025$ ، $513 + 514 = 1027$ ، $514 + 515 = 1029$ ، $515 + 516 = 1031$ ، $516 + 517 = 1033$ ، $517 + 518 = 1035$ ، $518 + 519 = 1037$ ، $519 + 520 = 1039$ ، $520 + 521 = 1041$ ، $521 + 522 = 1043$ ، $522 + 523 = 1045$ ، $523 + 524 = 1047$ ، $524 + 525 = 1049$ ، $525 + 526 = 1051$ ، $526 + 527 = 1053$ ، $527 + 528 = 1055$ ، $528 + 529 = 1057$ ، $529 + 530 = 1059$ ، $530 + 531 = 1061$ ، $531 + 532 = 1063$ ، $532 + 533 = 1065$ ، $533 + 534 = 1067$ ، $534 + 535 = 1069$ ، $535 + 536 = 1071$ ، $536 + 537 = 1073$ ، $537 + 538 = 1075$ ، $538 + 539 = 1077$ ، $539 + 540 = 1079$ ، $540 + 541 = 1081$ ، $541 + 542 = 1083$ ، $542 + 543 = 1085$ ، $543 + 544 = 1087$ ، $544 + 545 = 1089$ ، $545 + 546 = 1091$ ، $546 + 547 = 1093$ ، $547 + 548 = 1095$ ، $548 + 549 = 1097$ ، $549 + 550 = 1099$ ، $550 + 551 = 1101$ ، $551 + 552 = 1103$ ، $552 + 553 = 1105$ ، $553 + 554 = 1107$ ، $554 + 555 = 1109$ ، $555 + 556 = 1111$ ، $556 + 557 = 1113$ ، $557 + 558 = 1115$ ، $558 + 559 = 1117$ ، $559 + 560 = 1119$ ، $560 + 561 = 1121$ ، $561 + 562 = 1123$ ، $562 + 563 = 1125$ ، $563 + 564 = 1127$ ، $564 + 565 = 1129$ ، $565 + 566 = 1131$ ، $566 + 567 = 1133$ ، $567 + 568 = 1135$ ، $568 + 569 = 1137$ ، $569 + 570 = 1139$ ، $570 + 571 = 1141$ ، $571 + 572 = 1143$ ، $572 + 573 = 1145$ ، $573 + 574 = 1147$ ، $574 + 575 = 1149$ ، $575 + 576 = 1151$ ، $576 + 577 = 1153$ ، $577 + 578 = 1155$ ، $578 + 579 = 1157$ ، $579 + 580 = 1159$ ، $580 + 581 = 1161$ ، $581 + 582 = 1163$ ، $582 + 583 = 1165$ ، $583 + 584 = 1167$ ، $584 + 585 = 1169$ ، $585 + 586 = 1171$ ، $586 + 587 = 1173$ ، $587 + 588 = 1175$ ، $588 + 589 = 1177$ ، 589

١٧) إذا كانت $x = 4$ أحد جذري المعادلة: $x^2 + m + 3 = 0$ فإن $m = \dots$

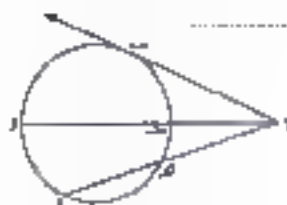
- ١) $m = -2$ ٢) $m = 2$ زوجي
٣) $(m - 1)$ مربع كامل ٤) $1, 2$ صحيحان

١٨) مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة $(x - 2)(x - 1) \geq 0$:

- ١) -1 ٢) 1 ٣) 2 ٤) 3

١٩) مضلعان متشابهان مجموع مساحتي سطحيهما 360° سم² والنسبة بين محيطيهما $3 : 4$ أوجد مساحة سطح كل منهما.

٢٠) في الشكل المقابل :



كل التصريحات الرياضية التالية صحيحة ما عدا العبارة

- ١) $(PA \times PB) = (PE)^2$
٢) $(PA \times PB) = (PC \times PD)$
٣) $PA \times PC = PE \times PD$
٤) $PA \times PD = PE \times PB$

٢١) في الشكل المقابل :



مس^١ - مس^٢ =

- ١) $30^\circ \times 180^\circ$ ٢) $60^\circ \times 180^\circ$
٣) 60° ٤) 150°

٢٢) إذا كان $\alpha = 40^\circ$ قياساً زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم α هي

- ١) 150° ٢) 90° ٣) 180° ٤) 270°

٢٧) أوجد في أبسط صورة بدون استخدام العاصية القيمة المقدرة: $\sin(30^\circ) + \cos(45^\circ)$

٢٨) أوجد محل العام للمعادلة: $\sin(2x) = \sin(60^\circ)$



١٥) $\frac{4}{3}$

١٦) $\frac{4}{3}$

٢٩) في الشكل المقابل:

١) $\frac{4}{3}$

٢) $\frac{4}{3}$

٣) $\frac{4}{3}$



١٥) ٣

١٦) ٤

٣٠) في الشكل المقابل:

إذا كان: $\frac{4}{3} = \frac{3-x}{3+x}$

فإن: $x = \dots$

١٦) ٣

١٧) ٤

٣١) دائرة م طول قطرها ٦ سم، تقع (م) = صفر فإن: $\sin(30^\circ) = \dots$

١) دخل الدائرة

٢) خارج الدائرة

٣) على الدائرة

٣٢) أثبت أن جذور المعادلة: $x^2 - 11x + 28 = 0$ مركبان غير حقيقيين

ثم أوجد مئين الجذور باستخدام القانون العام



التمهيد التاسع

أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١) إشارة الدالة f حيث $d = (س)$ $f = ٦ - ٢س$ تكون موجبة إذا كانت
- ١) $س < ٣$ ٢) $س > ٣$ ٣) $س \leq ٣$ ٤) $س = ٣$



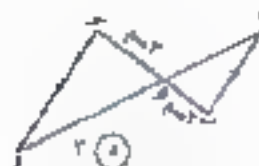
٢) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ فـ

فإن $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$

- ١) $\frac{1}{2}$ ٢) $\frac{2}{3}$ ٣) $\frac{3}{2}$ ٤) $\frac{1}{3}$

- ٣) إذا كن : $\theta = (٦٠ - \theta)$ حيث $\theta > ٠$ ، $\theta > ٦٠$ فإن : $\theta = ٢٠$
- ١) ٦٠ ٢) صغر ٣) ١٠ ٤) $\frac{1}{2}$

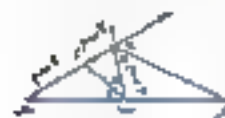


٤) في الشكل المقابل :

إذا $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $AB = ٢$ سم ، $CD = ٤$ سم ، $AC = ٢$ سم

، $AD = ١٠$ سم فإن : $AD =$ سم.

- ١) ٤ ٢) ٦ ٣) ٢ ٤) ٣



٥) في الشكل المقابل :

إذا $AB =$ سم.

- ١) ٦ ٢) ٨ ٣) ٩ ٤) ١٠

- ٦) زاوية محيطية في دائرة قياسها ٦٠° تقابل قوسًا طوله π سم فأوجد : محيط الدائرة مقربًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

$$٦٨٠ \text{ م٢} - ٦٣٠ \text{ م٢} + \frac{٦٥ \text{ م٢}}{٦٦٥} + ٦٥ \text{ م٢} - ٦٥ \text{ م٢} - ٦٥ \text{ م٢}$$

$$\text{م٢} (٦٨٠ - ٦٣٠) = ٥٠ \text{ م٢} = \dots\dots\dots$$

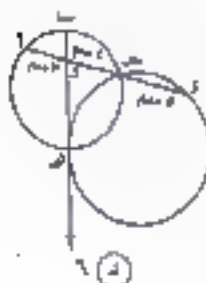
د ٥١٥

ج ١٠

ب ١

١ صفر

في الشكل المقابل :



داورتان متقاطعتان في حـ هـ

سـ هـ مماس للدائرة الكبرى في هـ

إذا كان : $٣ = ٥$ سم ، $٤ = ٦$ سم ، $٥ = ٥$ سم

فإن : سـ هـ =

١ ٩

ب ٨

ج ٧

د ٦

إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها ٣٠° في الوضع التالي ثلاث دورات ونصف

مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يكون في الربع

١ الأول

ب الثاني

ج الثالث

د الرابع

عدد مرات تقاطع المنحنى $٥ = ٣ - ٢$ مع محور السينات في الفترة $[٢٠٢٠ ; ٢٠٢١]$

يساوي

١ ٦

ب ٣

ج ٤

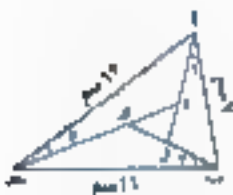
د ٧

سـ هـ مثلث متوسم داخل دائرة هـ منتصف سـ هـ ، رسم Δ المثلث الناتج في هـ

أثبت أن : $١ = ٥$ سم ، $٥ = ٥$ سم ، $٥ = ٥$ سم

١ Δ هـ سـ هـ - Δ هـ سـ هـ

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كان : $AG = 3$ ، $GD = 2$ ، $BE = 4$ ، $GE = 2$ ،

فإن : $\frac{S_{ABC}}{S_{GED}} = \dots$

- ☐ أ ١٢ : ١١ : ٧
☐ ب ١٢ : ١١ : ٧
☐ ج ١٢ : ٧ : ١١
☐ د ١١ : ١٢ : ٧

١٨ في الشكل المقابل :



..... = $\angle AOC$

- ☐ أ ٩٠
☐ ب ٦٠
☐ ج ٣٠
☐ د ٤٠

١٩ إذا كان : $\theta = 2$ حيث θ قياس زاوية حادة ، فإن : $\theta = \dots$

- ☐ أ ٦٠
☐ ب ١٥
☐ ج ٢٠
☐ د ٣٠

٢٠ في الشكل المقابل :



$\overline{AB} = \overline{DE}$ ، $\angle A = \angle D$ ، $\overline{AC} = \overline{DF}$ ،

و $\angle E = \dots$ ، $\angle F = \dots$ ، $\angle C = \dots$ ، $\angle B = \dots$

أوجد : طول كل من AB و DE .

٢١ المصنف الداخلي لزاوية رأس المثلث المصنف الخارجي لها.

- ☐ أ يوازي
☐ ب عمودي على
☐ ج يساوي
☐ د ينطبق على

٢٢ إذا كان $L = 3$ ، $M = 4$ ، $N = 5$ ، $P = 6$ ،

فإن النسبة المئوية للمقدار $L - 1$ ، $M - 1$ ، $N - 1$ ، $P - 1$ =

- ☐ أ ٦٠
☐ ب ٦٠
☐ ج ٩٠
☐ د ٣٠



٢٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : $2 = 3$ سم

و $4 = 6$ سم

فإن : $4 = 6$ سم



٦ (أ)

٩ (ب)

٣٦ (ج)

٢٧ (د)

٢٧ أبسط صورة للعدد التخيلي $14i = \dots\dots\dots$

١٠ (أ)

$10 - i$ (ب)

$1 - i$ (ج)

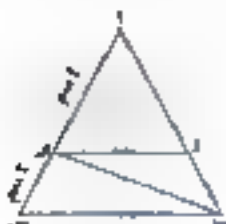
١ (د)

٢٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : $4 \parallel 6$ سم

وكانت مساحة $(\triangle 4)$ سم² = ٩

فإن : مساحة $(\triangle 6)$ = سم²



١٢ (أ)

٦ (ب)

٢٧ (ج)

١٨ (د)

٢٨ إذا كانت : $2 = 3$ و $4 = 6$ سم

فأوجد قيمة المقدار $2 + 3 + 4$ سم

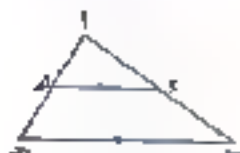


التمرين الخامس

١ في الشكل المقابل :

جميع القعيرلات الرياضية التالية صحيحة

با هذا التعبير ...



٢ $\frac{ا د}{ب د} = \frac{ا ه}{ج ه}$

١ $\frac{ا د}{ب د} = \frac{ا ه}{ج ه}$

٣ $\frac{ا د}{ب د} = \frac{ب ه}{ج ه}$

٢ $\frac{ا د}{ب د} = \frac{ا ه}{ج ه}$

٢ إذا كان : $\alpha = \beta$ حيث β زاويتان جابتان

فإن : $\alpha = (\beta + \alpha)$...

٢ ١

١ $\frac{1}{3\sqrt{}}$

٣ غير معرف.

٢ $\frac{1}{3\sqrt{}}$

٣ أوجد قيمة x التي تجعل أحد جذري المعادلة :

$x^2 - 7x + 6 = 0$ صفر هو للعكس الضربي للجذر الآخر.

٤ القيمة الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 2x + 1$ هي ...

١ - ١

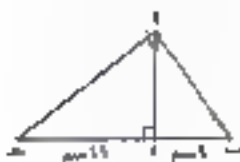
٢ - ٢

٣ - ٣

٤ - ٤

٥ في الشكل المقابل :

طول $\overline{ا ب} = \dots$ ملم.



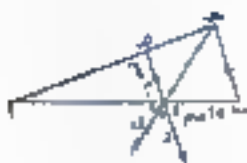
١ ١٥

٢ ١٢

٣ ٢٥

٤ ٢٠

في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{د} \parallel \overline{هـ}$ //

$$د = (د \times هـ) = هـ = (د \times هـ)$$

وكان : $د = هـ = ١٠$ سم ، $د = هـ = ١٥$ سم.

$$\text{فلن : } د = هـ = \dots \dots \dots \text{ سم.}$$

٤٥ (د)

٢٠ (هـ)

٢٥ (ب)

٢٠ (أ)

المعادلة التي جذراها $(٢ + ت)$ و $(٢ - ت)$ هي

$$١ - ت = ١٣ + ت - ٢ \quad \text{(ب)}$$

$$١ - ت = ١٣ + ت - ٢ \quad \text{(أ)}$$

$$١ - ت = ١٣ - ت - ٢ \quad \text{(د)}$$

$$١ - ت = ١٣ - ت - ٢ \quad \text{(ج)}$$

في الشكل المقابل :



إذا كانت الدائرة مماسة لـ $\overline{د}$ ، $\overline{هـ}$ يقطع الدائرة في $د$ و

$$د = (د \times هـ) = هـ = (د \times هـ) = ١٥٠$$

$$\text{لنوجد : } د = \dots \dots \dots$$

٦٤ (د)

٦٤ - (هـ)

٦٤ ت (ب)

٦٤ - ت (أ)

إذا كان معامل تشابه المضلع م المضلع م هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشابه المضلع م المضلع م هو $\frac{٢}{٣}$

م هو $\frac{٢}{٣}$ فأي من العلاقات الآتية يكون صحيح ؟

$$\text{(أ) مساحة (م) = مساحة (م) + مساحة (م)}$$

$$\text{(ب) مساحة (م) = مساحة (م) + مساحة (م)}$$

$$\text{(ج) مساحة (م) = مساحة (م) + مساحة (م)}$$

$$\text{(د) مساحة (م) = مساحة (م) + مساحة (م)}$$

١١) إذا كانت $\angle \theta = \angle \theta$ حيث θ زاوية حادة موجبة
فاوجد θ (١٠ - ٢)



١ (د)

٢ (ب)

٣ (ج)

٤ (أ)

١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\angle \theta = \angle \theta$ متساويان للدائرة

عند θ على الترتيب

و $\angle \theta = \angle \theta = \angle \theta$ سم $\theta = \theta = \theta$ سم

فإن $\theta = \theta$ سم

١ (د)

٢ (ب)

٣ (ج)

٤ (أ)

١٣) القيمة العظمى للدالة θ حيث $\theta = \theta$ هي



١٤) في الشكل المقابل :

سم $\theta = \theta$ سم ، $\theta = \theta$ سم

سم $\theta = \theta$ سم

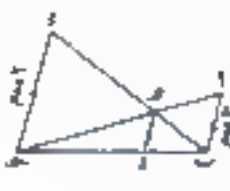
سم θ ينصف θ سم

أثبت أن : $\theta \parallel \theta$ سم

١٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\theta \parallel \theta \parallel \theta$ سم

فإن $\theta = \theta$ سم



١ (د)

٢ (ب)

٣ (ج)

٤ (أ)



١٦ من الشكل المقابل :

$$\theta = \dots\dots\dots$$

① $\frac{L}{TQ}$

② $\frac{TQ}{L}$

③ $TQ \times L$

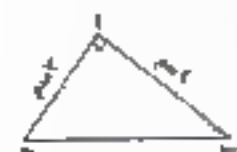
④ $L \times TQ$

١٧ إذا كان θ ما $\theta = 2 - \pi$ ميلر ، $\frac{\pi}{4} > \theta > \pi$

أوجد قيمة : $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

١٨ في الشكل المقابل :

$$\sin A = \dots\dots\dots$$



① $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

② $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

③ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

④ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

١٩ في الشكل المقابل :

محيط ΔABC = سم.



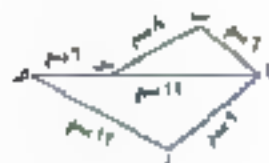
① ٢٦

② ٢٢

③ ٢٨

④ ٢٤

٢٠ الشكل المقابل :



أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم

أ = ٩ سم ، ب = ١٢ سم

أ = ٩ سم ، ب = ١٢ سم

برهن أن : ① $\Delta ABC = \Delta ADE$

② ΔABC يتصف بـ ΔABC

٢١) جذري المعادلة $\sin^2 \theta - 2\sin \theta + 1 = 0$ يكونان

- (أ) حقيقيان متساويان.
 (ب) حقيقيان متساويان وغير متممين.
 (ج) حقيقيان متساويان.
 (د) غير حقيقيين.

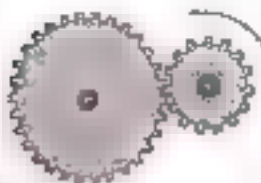
٢٢) إشارة الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 4$ حيث $x \in [0, 4]$ تكون

- (أ) موجبة.
 (ب) سالبة.
 (ج) صفر.
 (د) سالبة وموجبة معاً.

٢٣) إذا كان مثلث فيه: $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle B = 80^\circ$ ، $\angle C = 40^\circ$ سم

و \exists \overline{AD} بحيث $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle B = 80^\circ$ ، $\angle C = 40^\circ$ سم
 برهن أن: $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ وإذا كانت مساحة المثلث $ABC = 3$ سم²
 احسب: مساحة المثلث ABD

٢٤) في الشكل المقابل:



إذا دار القوس الأكبر لفة واحدة فإن القوس الأصغر
 يدور ثلاثة لفات، فإذا دار القوس الأصغر لفة واحدة
 في الاتجاه المعاكس بالسهم فإن الزاوية المركزية
 لدوران القوس الأكبر تصبح

- (أ) $\frac{\pi}{4}$
 (ب) $\frac{\pi}{2}$
 (ج) $\frac{\pi}{3}$
 (د) $\frac{\pi}{6}$

٢٥) في الشكل المقابل:



إذا كان: $\theta = 60^\circ$ متتصف \widehat{AB}

(أ) $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle B = 60^\circ$ سم
 فإن: $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \dots$ سم.

- (أ) $\frac{1}{4}$
 (ب) $\frac{1}{2}$
 (ج) $\frac{3}{4}$
 (د) $\frac{1}{3}$



٢٦ مثل يمينًا الثلاثة : د (س) = س² - ٢ س - ٣ ثم عين إشارة الدالة لـ

٢٧ مثلان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٩ : ٤

فإن النسبة بين مساحتي سطحيهما

د ١ : ٩

هـ ١ : ٨

ب ١ : ٤

ج ١ : ٢

٢٨ إذا كان لـ م هما جذرا المعادلة : س² + س - ١ = ٠

حيث $0 < \alpha < 1$ فإن مجموعة حل المتباينة

س² + س - ١ > ٠ هي

ب $[\alpha, 1]$

أ $[-\alpha, 1]$

د $[-\alpha, 1] \cup [1, \alpha]$

ج $[\alpha, 1] \cup [1, \alpha]$

الإجابات



<p>1. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>2. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>3. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>4. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>5. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>6. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>7. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>8. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>9. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>10. (1) (2) (3) (4) (5)</p>	<p>1. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>2. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>3. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>4. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>5. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>6. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>7. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>8. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>9. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>10. (1) (2) (3) (4) (5)</p>
--	--

<p>1. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>2. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>3. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>4. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>5. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>6. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>7. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>8. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>9. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>10. (1) (2) (3) (4) (5)</p>	<p>1. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>2. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>3. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>4. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>5. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>6. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>7. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>8. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>9. (1) (2) (3) (4) (5)</p> <p>10. (1) (2) (3) (4) (5)</p>
--	--

١٠. **جواب: جداول الاعداد اعلاه**

١١. **لماذا نأخذ 3؟**

١٢. **جواب: 3**

١٣. **جواب: 3**

١٤. **جواب: 3**

١٥. **جواب: 3**

١٦. **جواب: 3**

١٧. **جواب: 3**

١٨. **جواب: 3**

١٩. **جواب: 3**

٢٠. **جواب: 3**

٢١. **جواب: 3**

٢٢. **جواب: 3**

٢٣. **جواب: 3**

٢٤. **جواب: 3**

٢٥. **جواب: 3**

٢٦. **جواب: 3**

٢٧. **جواب: 3**

٢٨. **جواب: 3**

٢٩. **جواب: 3**

٣٠. **جواب: 3**

١٠. **جواب: 3**

١١. **جواب: 3**

١٢. **جواب: 3**

١٣. **جواب: 3**

١٤. **جواب: 3**

١٥. **جواب: 3**

١٦. **جواب: 3**

١٧. **جواب: 3**

١٨. **جواب: 3**

١٩. **جواب: 3**

٢٠. **جواب: 3**

٢١. **جواب: 3**

٢٢. **جواب: 3**

٢٣. **جواب: 3**

٢٤. **جواب: 3**

٢٥. **جواب: 3**

٢٦. **جواب: 3**

٢٧. **جواب: 3**

٢٨. **جواب: 3**

٢٩. **جواب: 3**

٣٠. **جواب: 3**

المسألة الأولى: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x+1}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

المسألة الثانية: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x-1}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

المسألة الثالثة: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x+2}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{\frac{3}{2}+2} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

المسألة الرابعة: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x-2}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\frac{3}{2}-2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

المسألة الخامسة: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x+3}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{\frac{3}{2}+3} = \frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$$

المسألة السادسة: إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ فاحسب $\frac{1}{x-3}$

الحل: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

بالتعويض في المطلوب:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{\frac{3}{2}-3} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

١٠. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٠)

١١. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١١)

١٢. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٢)

١٣. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٣)

١٤. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٤)

١٥. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٥)

١٦. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٦)

١٧. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٧)

١٨. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٨)

١٩. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (١٩)

٢٠. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٠)

٢١. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢١)

٢٢. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٢)

٢٣. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٣)

٢٤. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٤)

٢٥. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٥)

٢٦. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٦)

٢٧. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٧)

٢٨. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٨)

٢٩. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٢٩)

٣٠. اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (٣٠)

١٩- ٢٠

٢١- ٢٢

٢٣- ٢٤

٢٥- ٢٦

٢٧- ٢٨

٢٩- ٣٠

٣١- ٣٢

٣٣- ٣٤

٣٥- ٣٦

٣٧- ٣٨

٣٩- ٤٠

٤١- ٤٢

٤٣- ٤٤

٤٥- ٤٦

٤٧- ٤٨

٤٩- ٥٠

٥١- ٥٢

٥٣- ٥٤

٥٥- ٥٦

٥٧- ٥٨

٥٩- ٦٠

٦١- ٦٢

٦٣- ٦٤

٦٥- ٦٦

٦٧- ٦٨

٦٩- ٧٠

٧١- ٧٢

٧٣- ٧٤

٧٥- ٧٦

٧٧- ٧٨

٧٩- ٨٠

٨١- ٨٢

٨٣- ٨٤

٨٥- ٨٦

٨٧- ٨٨

٨٩- ٩٠

٩١- ٩٢

٩٣- ٩٤

٩٥- ٩٦

٩٧- ٩٨

٩٩- ١٠٠

١٩- ٢٠

٢١- ٢٢

٢٣- ٢٤

٢٥- ٢٦

٢٧- ٢٨

٢٩- ٣٠

٣١- ٣٢

٣٣- ٣٤

٣٥- ٣٦

٣٧- ٣٨

٣٩- ٤٠

٤١- ٤٢

٤٣- ٤٤

٤٥- ٤٦

٤٧- ٤٨

٤٩- ٥٠

٥١- ٥٢

٥٣- ٥٤

٥٥- ٥٦

٥٧- ٥٨

٥٩- ٦٠

٦١- ٦٢

٦٣- ٦٤

٦٥- ٦٦

٦٧- ٦٨

٦٩- ٧٠

٧١- ٧٢

٧٣- ٧٤

٧٥- ٧٦

٧٧- ٧٨

٧٩- ٨٠

٨١- ٨٢

٨٣- ٨٤

٨٥- ٨٦

٨٧- ٨٨

٨٩- ٩٠

٩١- ٩٢

٩٣- ٩٤

٩٥- ٩٦

٩٧- ٩٨

٩٩- ١٠٠

١٩- ٢٠

٢١- ٢٢

٢٣- ٢٤

٢٥- ٢٦

٢٧- ٢٨

٢٩- ٣٠

٣١- ٣٢

٣٣- ٣٤

٣٥- ٣٦

٣٧- ٣٨

٣٩- ٤٠

٤١- ٤٢

٤٣- ٤٤

٤٥- ٤٦

٤٧- ٤٨

٤٩- ٥٠

٥١- ٥٢

٥٣- ٥٤

٥٥- ٥٦

٥٧- ٥٨

٥٩- ٦٠

٦١- ٦٢

٦٣- ٦٤

٦٥- ٦٦

٦٧- ٦٨

٦٩- ٧٠

٧١- ٧٢

٧٣- ٧٤

٧٥- ٧٦

٧٧- ٧٨

٧٩- ٨٠

٨١- ٨٢

٨٣- ٨٤

٨٥- ٨٦

٨٧- ٨٨

٨٩- ٩٠

٩١- ٩٢

٩٣- ٩٤

٩٥- ٩٦

٩٧- ٩٨

٩٩- ١٠٠

١٩- ٢٠

٢١- ٢٢

٢٣- ٢٤

٢٥- ٢٦

٢٧- ٢٨

٢٩- ٣٠

٣١- ٣٢

٣٣- ٣٤

٣٥- ٣٦

٣٧- ٣٨

٣٩- ٤٠

٤١- ٤٢

٤٣- ٤٤

٤٥- ٤٦

٤٧- ٤٨

٤٩- ٥٠

٥١- ٥٢

٥٣- ٥٤

٥٥- ٥٦

٥٧- ٥٨

٥٩- ٦٠

٦١- ٦٢

٦٣- ٦٤

٦٥- ٦٦

٦٧- ٦٨

٦٩- ٧٠

٧١- ٧٢

٧٣- ٧٤

٧٥- ٧٦

٧٧- ٧٨

٧٩- ٨٠

٨١- ٨٢

٨٣- ٨٤

٨٥- ٨٦

٨٧- ٨٨

٨٩- ٩٠

٩١- ٩٢

٩٣- ٩٤

٩٥- ٩٦

٩٧- ٩٨

٩٩- ١٠٠

<p>1. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>2. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>3. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>4. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>5. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>6. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>7. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>8. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>9. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>10. $AB = 10$ - $BC = 11$</p>	<p>1. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>2. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>3. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>4. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>5. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>6. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>7. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>8. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>9. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>10. $AB = 10$ - $BC = 11$</p>
--	--

<p>1. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>2. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>3. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>4. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>5. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>6. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>7. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>8. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>9. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>10. $AB = 10$ - $BC = 11$</p>	<p>1. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>2. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>3. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>4. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>5. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>6. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>7. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>8. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>9. $AB = 10$ - $BC = 11$</p> <p>10. $AB = 10$ - $BC = 11$</p>
--	--

لرياضيات

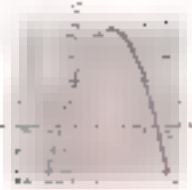
المجلد الدراسي الأول

رد المحتار، عالم جليل



المكتبة

[مكتبة جامعة القاهرة]



من الرسم: مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

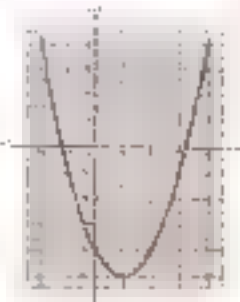
من	إلى
1	3



من الرسم: مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من	إلى
1	3



من الرسم: مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من	إلى
1	3

من الرسم: مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

من الرسم: $x = 3$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

من مجموعة الحل = $\{x \mid -1 < x < 3\}$

من الرسم: $x = 1$

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$ (مربع)
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

$(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0$
 $x = 1$
 جدول:

عدد	1	2	3	4	5
عدد	1	2	3	4	5

 مجموع الأعداد = 15
 مجموع الأعداد = 15

١٦. حل المعادلة الخطية في x : $3x - 1 = 2x + 5$
 الحل: $3x - 1 = 2x + 5$
 $3x - 2x = 5 + 1$
 $x = 6$

١٧. حل المعادلة الخطية في x : $2x + 3 = 5x - 7$
 الحل: $2x + 3 = 5x - 7$
 $2x - 5x = -7 - 3$
 $-3x = -10$
 $x = \frac{10}{3}$

١٨. حل المعادلة الخطية في x : $4x - 2 = 3x + 1$
 الحل: $4x - 2 = 3x + 1$
 $4x - 3x = 1 + 2$
 $x = 3$

١٩. حل المعادلة الخطية في x : $5x + 4 = 2x - 8$
 الحل: $5x + 4 = 2x - 8$
 $5x - 2x = -8 - 4$
 $3x = -12$
 $x = -4$

٢٠. حل المعادلة الخطية في x : $6x - 3 = 4x + 7$
 الحل: $6x - 3 = 4x + 7$
 $6x - 4x = 7 + 3$
 $2x = 10$
 $x = 5$

٢١. حل المعادلة الخطية في x : $7x + 2 = 5x - 6$
 الحل: $7x + 2 = 5x - 6$
 $7x - 5x = -6 - 2$
 $2x = -8$
 $x = -4$

٢٢. حل المعادلة الخطية في x : $8x - 1 = 3x + 9$
 الحل: $8x - 1 = 3x + 9$
 $8x - 3x = 9 + 1$
 $5x = 10$
 $x = 2$

٢٣. حل المعادلة الخطية في x : $9x + 5 = 6x + 11$
 الحل: $9x + 5 = 6x + 11$
 $9x - 6x = 11 - 5$
 $3x = 6$
 $x = 2$

٢٤. حل المعادلة الخطية في x : $10x - 4 = 7x + 2$
 الحل: $10x - 4 = 7x + 2$
 $10x - 7x = 2 + 4$
 $3x = 6$
 $x = 2$

٢٥. حل المعادلة الخطية في x : $11x + 3 = 8x - 5$
 الحل: $11x + 3 = 8x - 5$
 $11x - 8x = -5 - 3$
 $3x = -8$
 $x = -\frac{8}{3}$

٢٦. حل المعادلة الخطية في x : $12x - 2 = 9x + 4$
 الحل: $12x - 2 = 9x + 4$
 $12x - 9x = 4 + 2$
 $3x = 6$
 $x = 2$

٢٧. حل المعادلة الخطية في x : $13x + 1 = 10x - 3$
 الحل: $13x + 1 = 10x - 3$
 $13x - 10x = -3 - 1$
 $3x = -4$
 $x = -\frac{4}{3}$

٢٨. حل المعادلة الخطية في x : $14x - 5 = 11x + 7$
 الحل: $14x - 5 = 11x + 7$
 $14x - 11x = 7 + 5$
 $3x = 12$
 $x = 4$

٢٩. حل المعادلة الخطية في x : $15x + 6 = 12x - 2$
 الحل: $15x + 6 = 12x - 2$
 $15x - 12x = -2 - 6$
 $3x = -8$
 $x = -\frac{8}{3}$

٣٠. حل المعادلة الخطية في x : $16x - 7 = 13x + 5$
 الحل: $16x - 7 = 13x + 5$
 $16x - 13x = 5 + 7$
 $3x = 12$
 $x = 4$

٣١. حل المعادلة الخطية في x : $17x + 8 = 14x - 4$
 الحل: $17x + 8 = 14x - 4$
 $17x - 14x = -4 - 8$
 $3x = -12$
 $x = -4$

٣٢. حل المعادلة الخطية في x : $18x - 9 = 15x + 3$
 الحل: $18x - 9 = 15x + 3$
 $18x - 15x = 3 + 9$
 $3x = 12$
 $x = 4$

٣٣. حل المعادلة الخطية في x : $19x + 10 = 16x - 6$
 الحل: $19x + 10 = 16x - 6$
 $19x - 16x = -6 - 10$
 $3x = -16$
 $x = -\frac{16}{3}$

٣٤. حل المعادلة الخطية في x : $20x - 11 = 17x + 7$
 الحل: $20x - 11 = 17x + 7$
 $20x - 17x = 7 + 11$
 $3x = 18$
 $x = 6$

٣٥. حل المعادلة الخطية في x : $21x + 12 = 18x - 8$
 الحل: $21x + 12 = 18x - 8$
 $21x - 18x = -8 - 12$
 $3x = -20$
 $x = -\frac{20}{3}$

٣٦. حل المعادلة الخطية في x : $22x - 13 = 19x + 9$
 الحل: $22x - 13 = 19x + 9$
 $22x - 19x = 9 + 13$
 $3x = 22$
 $x = \frac{22}{3}$

٣٧. حل المعادلة الخطية في x : $23x + 14 = 20x - 10$
 الحل: $23x + 14 = 20x - 10$
 $23x - 20x = -10 - 14$
 $3x = -24$
 $x = -8$

٣٨. حل المعادلة الخطية في x : $24x - 15 = 21x + 11$
 الحل: $24x - 15 = 21x + 11$
 $24x - 21x = 11 + 15$
 $3x = 26$
 $x = \frac{26}{3}$

٣٩. حل المعادلة الخطية في x : $25x + 16 = 22x - 12$
 الحل: $25x + 16 = 22x - 12$
 $25x - 22x = -12 - 16$
 $3x = -28$
 $x = -\frac{28}{3}$

٤٠. حل المعادلة الخطية في x : $26x - 17 = 23x + 13$
 الحل: $26x - 17 = 23x + 13$
 $26x - 23x = 13 + 17$
 $3x = 30$
 $x = 10$

٤١. حل المعادلة الخطية في x : $27x + 18 = 24x - 14$
 الحل: $27x + 18 = 24x - 14$
 $27x - 24x = -14 - 18$
 $3x = -32$
 $x = -\frac{32}{3}$

٤٢. حل المعادلة الخطية في x : $28x - 19 = 25x + 15$
 الحل: $28x - 19 = 25x + 15$
 $28x - 25x = 15 + 19$
 $3x = 34$
 $x = \frac{34}{3}$

٤٣. حل المعادلة الخطية في x : $29x + 20 = 26x - 16$
 الحل: $29x + 20 = 26x - 16$
 $29x - 26x = -16 - 20$
 $3x = -36$
 $x = -12$

٤٤. حل المعادلة الخطية في x : $30x - 21 = 27x + 17$

الحل: $30x - 21 = 27x + 17$
 $30x - 27x = 17 + 21$
 $3x = 38$
 $x = \frac{38}{3}$

٤٥. حل المعادلة الخطية في x : $31x + 22 = 28x - 18$
 الحل: $31x + 22 = 28x - 18$
 $31x - 28x = -18 - 22$
 $3x = -40$
 $x = -\frac{40}{3}$

٤٦. حل المعادلة الخطية في x : $32x - 23 = 29x + 19$
 الحل: $32x - 23 = 29x + 19$
 $32x - 29x = 19 + 23$
 $3x = 42$
 $x = 14$

٤٧. حل المعادلة الخطية في x : $33x + 24 = 30x - 20$
 الحل: $33x + 24 = 30x - 20$
 $33x - 30x = -20 - 24$
 $3x = -44$
 $x = -\frac{44}{3}$

٤٨. حل المعادلة الخطية في x : $34x - 25 = 31x + 21$
 الحل: $34x - 25 = 31x + 21$
 $34x - 31x = 21 + 25$
 $3x = 46$
 $x = \frac{46}{3}$

٤٩. حل المعادلة الخطية في x : $35x + 26 = 32x - 22$
 الحل: $35x + 26 = 32x - 22$
 $35x - 32x = -22 - 26$
 $3x = -48$
 $x = -16$

٥٠. حل المعادلة الخطية في x : $36x - 27 = 33x + 23$
 الحل: $36x - 27 = 33x + 23$
 $36x - 33x = 23 + 27$
 $3x = 50$
 $x = \frac{50}{3}$

٥١. حل المعادلة الخطية في x : $37x + 28 = 34x - 24$
 الحل: $37x + 28 = 34x - 24$
 $37x - 34x = -24 - 28$
 $3x = -52$
 $x = -\frac{52}{3}$

٥٢. حل المعادلة الخطية في x : $38x - 29 = 35x + 25$
 الحل: $38x - 29 = 35x + 25$
 $38x - 35x = 25 + 29$
 $3x = 54$
 $x = 18$

٥٣. حل المعادلة الخطية في x : $39x + 30 = 36x - 26$
 الحل: $39x + 30 = 36x - 26$
 $39x - 36x = -26 - 30$
 $3x = -56$
 $x = -\frac{56}{3}$

٥٤. حل المعادلة الخطية في x : $40x - 31 = 37x + 27$
 الحل: $40x - 31 = 37x + 27$
 $40x - 37x = 27 + 31$
 $3x = 58$
 $x = \frac{58}{3}$

٥٥. حل المعادلة الخطية في x : $41x + 32 = 38x - 28$
 الحل: $41x + 32 = 38x - 28$
 $41x - 38x = -28 - 32$
 $3x = -60$
 $x = -20$

٥٦. حل المعادلة الخطية في x : $42x - 33 = 39x + 29$
 الحل: $42x - 33 = 39x + 29$
 $42x - 39x = 29 + 33$
 $3x = 62$
 $x = \frac{62}{3}$

٥٧. حل المعادلة الخطية في x : $43x + 34 = 40x - 30$
 الحل: $43x + 34 = 40x - 30$
 $43x - 40x = -30 - 34$
 $3x = -64$
 $x = -\frac{64}{3}$

:- المبررة على المبدأ = 50

\therefore مجموع كل نهاية = 2

إرشادات لممارس

(1) (1)	(2) (2)	(3) (3)	(4) (4)
(5) (5)	(6) (6)	(7) (7)	(8) (8)
(9) (9)	(10) (10)	(11) (11)	(12) (12)

$$(1) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الرابع

في الربع الثاني

$$(2) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(3) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(4) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(5) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(6) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

(1) على دوران الترس الكلي للزاوية 2π على طرفي الترسات دور الترس الكلي 2π مرة في التمام

في الزاوية المركزية دوران الترس الكلي

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

(2) محيط الدائرة $2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

(3) في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

الفرق الثاني الرابع في بسطها المستقيم

$$2\pi = 2\pi \times \frac{1}{1} = 2\pi$$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$



في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

في $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$

$$(1) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(2) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(3) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(4) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(5) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(6) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(7) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(8) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(9) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

وهي تقع في الربع الثاني

في الربع الثاني

$$(1) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(2) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(3) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(4) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(5) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(6) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(7) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(8) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(9) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(10) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(11) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(12) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(13) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(14) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(15) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(16) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(17) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(18) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(19) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(20) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(21) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(22) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(23) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(24) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(25) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(26) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(27) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(28) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$$(29) \quad 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

$[x = 0] \rightarrow \text{true}$. \square

—

$$[Y, Y_L] = \frac{1}{2} \mathbf{L}^{\text{eff}}.$$

100

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \dots$$
$$\left[\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right] = \frac{1}{T''}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$


1. *Small, J. D. 1983. The ecology of the*

$$\left[\frac{3}{7} = \frac{1}{7} \right] = \frac{1}{7} \text{ ،}$$

$$\frac{P}{q} = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{min}}} \text{ (power ratio)} = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{min}}} = \left(\frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{min}}} \right) \text{ (dB)}$$
$$| \mathcal{L}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \mathcal{L}_n^+ \rangle + | \mathcal{L}_n^- \rangle) \quad (1)$$
$$|\tilde{\mu}_{\text{reg}}| \leq |\tilde{\mu}| + \epsilon \|\tilde{\mu}\| \quad \mu \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$$
$$(n) \therefore \text{مضروب} \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right) \text{ مع } \text{الزوج الفطر}$$

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلات البسيطة

المعادلات البسيطة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

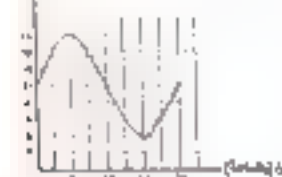
المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة

المعادلة



المعادلة



$$\sin 36.9^\circ = \frac{3}{5}$$

$$\cos 36.9^\circ = \frac{4}{5}$$

$$\tan 36.9^\circ = \frac{3}{4}$$



$$\sin 53.1^\circ = \frac{4}{5}$$

$$\cos 53.1^\circ = \frac{3}{5}$$

$$\tan 53.1^\circ = \frac{4}{3}$$



$$\sin 36.9^\circ = \frac{3}{5}$$

$$\cos 36.9^\circ = \frac{4}{5}$$

$$\tan 36.9^\circ = \frac{3}{4}$$



$$\sin 53.1^\circ = \frac{4}{5}$$

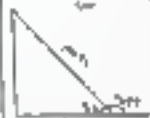
$$\cos 53.1^\circ = \frac{3}{5}$$

$$\tan 53.1^\circ = \frac{4}{3}$$



المعادلة

المعادلة



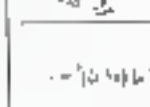
المعادلة



المعادلة



المعادلة



المعادلة



المعادلة



المعادلة

36.9	53.1	126.9	216.9	303.1
0.6	0.8	-0.6	-0.8	0.6
0.8	0.6	0.6	0.8	-0.6



(17)

... انشور الانشور ...
... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

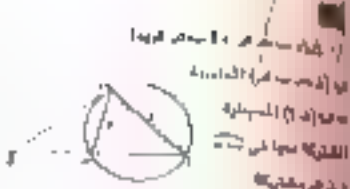
... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...



... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...



... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

(18)

(19)

(20)



... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

... انشور ...

(21)

(22)

(23)

(24)

(25)

(26)

(27)

(28)

(29)

(30)

(31)

(32)

(33)

(34)

(35)

(36)

(37)

(38)

(39)

(40)

(41)

(42)

(43)

(44)

(45)

(46)

(47)

(48)

(49)

(50)

(51)

(52)

(53)

(54)

(55)

(56)

(57)

(58)

(59)

(60)

(61)

(62)

(63)

(64)

(65)

(66)

(67)

(68)

(69)

(70)

(71)

(72)

(73)

(74)

(75)

(76)

(77)

(78)

(79)

(80)

(81)

(82)

(83)

(84)

(85)

(86)

(87)

(88)

(89)

(90)

(91)

(92)

(93)

(94)

(95)

(96)

(97)

(98)

(99)

(100)

١) $\Delta = 1$ سم

٢) مساحة المربع المكمل = $16 - 9 = 7$ سم²

٣) $\Delta = 2$ سم

٤) $\Delta = 3$ سم

٥) $\Delta = 4$ سم

٦) $\Delta = 5$ سم

٧) $\Delta = 6$ سم

٨) $\Delta = 7$ سم

٩) $\Delta = 8$ سم

١٠) $\Delta = 9$ سم

١١) $\Delta = 10$ سم

١٢) $\Delta = 11$ سم

١٣) $\Delta = 12$ سم

١٤) $\Delta = 13$ سم

١٥) $\Delta = 14$ سم

١٦) $\Delta = 15$ سم

١٧) $\Delta = 16$ سم

١٨) $\Delta = 17$ سم

١٩) $\Delta = 18$ سم

٢٠) $\Delta = 19$ سم

٢١) $\Delta = 20$ سم

٢٢) $\Delta = 21$ سم

٢٣) $\Delta = 22$ سم

٢٤) $\Delta = 23$ سم

٢٥) $\Delta = 24$ سم

٢٦) $\Delta = 25$ سم

٢٧) $\Delta = 26$ سم

٢٨) $\Delta = 27$ سم

٢٩) $\Delta = 28$ سم

٣٠) $\Delta = 29$ سم



٣) مساحة المربع المكمل = $16 - 9 = 7$ سم²

٤) $\Delta = 2$ سم

٥) $\Delta = 3$ سم

٦) $\Delta = 4$ سم

٧) $\Delta = 5$ سم

٨) $\Delta = 6$ سم

٩) $\Delta = 7$ سم

١٠) $\Delta = 8$ سم

١١) $\Delta = 9$ سم

١٢) $\Delta = 10$ سم

١٣) $\Delta = 11$ سم

١٤) $\Delta = 12$ سم

١٥) $\Delta = 13$ سم

١٦) $\Delta = 14$ سم

١٧) $\Delta = 15$ سم

١٨) $\Delta = 16$ سم

١٩) $\Delta = 17$ سم

٢٠) $\Delta = 18$ سم

٢١) $\Delta = 19$ سم

٢٢) $\Delta = 20$ سم

٢٣) $\Delta = 21$ سم

٢٤) $\Delta = 22$ سم

٢٥) $\Delta = 23$ سم

٢٦) $\Delta = 24$ سم

٢٧) $\Delta = 25$ سم

٢٨) $\Delta = 26$ سم

٢٩) $\Delta = 27$ سم

٣٠) $\Delta = 28$ سم

٣١) $\Delta = 29$ سم

٣٢) $\Delta = 30$ سم

٣٣) $\Delta = 31$ سم

٣٤) $\Delta = 32$ سم

٣٥) $\Delta = 33$ سم

٣٦) $\Delta = 34$ سم

٣٧) $\Delta = 35$ سم

٣٨) $\Delta = 36$ سم

٣٩) $\Delta = 37$ سم

٤٠) $\Delta = 38$ سم

٤١) $\Delta = 39$ سم

٤٢) $\Delta = 40$ سم

٤٣) $\Delta = 41$ سم

٤٤) $\Delta = 42$ سم

٤٥) $\Delta = 43$ سم

٤٦) $\Delta = 44$ سم

٤٧) $\Delta = 45$ سم

٤٨) $\Delta = 46$ سم

٤٩) $\Delta = 47$ سم

٥٠) $\Delta = 48$ سم

٥١) $\Delta = 49$ سم

٥٢) $\Delta = 50$ سم

٥٣) $\Delta = 51$ سم

٥٤) $\Delta = 52$ سم

٥٥) $\Delta = 53$ سم

٥٦) $\Delta = 54$ سم

٥٧) $\Delta = 55$ سم

٥٨) $\Delta = 56$ سم

٥٩) $\Delta = 57$ سم

٦٠) $\Delta = 58$ سم

٦١) $\Delta = 59$ سم

٦٢) $\Delta = 60$ سم

٦٣) $\Delta = 61$ سم

٦٤) $\Delta = 62$ سم

٦٥) $\Delta = 63$ سم

٦٦) $\Delta = 64$ سم

٦٧) $\Delta = 65$ سم

٦٨) $\Delta = 66$ سم

٦٩) $\Delta = 67$ سم

٧٠) $\Delta = 68$ سم

٧١) $\Delta = 69$ سم

٧٢) $\Delta = 70$ سم

٧٣) $\Delta = 71$ سم

٧٤) $\Delta = 72$ سم

٧٥) $\Delta = 73$ سم

٧٦) $\Delta = 74$ سم

٧٧) $\Delta = 75$ سم

٧٨) $\Delta = 76$ سم

٧٩) $\Delta = 77$ سم

٨٠) $\Delta = 78$ سم

٨١) $\Delta = 79$ سم

٨٢) $\Delta = 80$ سم

٨٣) $\Delta = 81$ سم

٨٤) $\Delta = 82$ سم

٨٥) $\Delta = 83$ سم

٨٦) $\Delta = 84$ سم

٨٧) $\Delta = 85$ سم

٨٨) $\Delta = 86$ سم

٨٩) $\Delta = 87$ سم

٩٠) $\Delta = 88$ سم

٩١) $\Delta = 89$ سم

٩٢) $\Delta = 90$ سم

٩٣) $\Delta = 91$ سم

٩٤) $\Delta = 92$ سم

٩٥) $\Delta = 93$ سم

٩٦) $\Delta = 94$ سم

٩٧) $\Delta = 95$ سم

٩٨) $\Delta = 96$ سم

٩٩) $\Delta = 97$ سم

١٠٠) $\Delta = 98$ سم

١٠١) $\Delta = 99$ سم

١٠٢) $\Delta = 100$ سم

١٠٣) $\Delta = 101$ سم

١٠٤) $\Delta = 102$ سم

١٠٥) $\Delta = 103$ سم

١٠٦) $\Delta = 104$ سم

١٠٧) $\Delta = 105$ سم

١٠٨) $\Delta = 106$ سم

١٠٩) $\Delta = 107$ سم

١١٠) $\Delta = 108$ سم

١١١) $\Delta = 109$ سم

١١٢) $\Delta = 110$ سم

١١٣) $\Delta = 111$ سم

١١٤) $\Delta = 112$ سم

١١٥) $\Delta = 113$ سم

١١٦) $\Delta = 114$ سم

١١٧) $\Delta = 115$ سم

١١٨) $\Delta = 116$ سم

١١٩) $\Delta = 117$ سم

١٢٠) $\Delta = 118$ سم

١٢١) $\Delta = 119$ سم

١٢٢) $\Delta = 120$ سم

١٢٣) $\Delta = 121$ سم

١٢٤) $\Delta = 122$ سم

١٢٥) $\Delta = 123$ سم

١٢٦) $\Delta = 124$ سم

١٢٧) $\Delta = 125$ سم

